Gewichtsfestsetzungen und Dimensionen in der Ausgleichsrechnung

DK 528.118

Gewichtsfestsetzungen und Dimensionen in der Ausgleichungsrechnung

Friedel Kern

Zusammenfassung

Diese Abhandlung schließt an die Ausführungen von Herrn Werner Fischer in [1], «Strecken- und Richtungsgewichte», an. Es wird gezeigt, wie eine entsprechende Behandlung der Gewichte auch bei der Frage nach den Dimensionen verschiedener Größen, die bei der Ausgleichung heterogener Meßgrößen auftreten, zu plausiblen Ergebnissen führt.

Résumé

On traite le problème de la détermination des dimensions de différents termes utilisés chez la compensation d'après la methode des moindres carrés. Ce traité-ci veut compléter l'élaboration de M. Werner Fischer en [1], «Strecken- und Richtungsgewichte», concernant une définition propre des poids pour des mesures de différente espèce.

Vorbemerkungen

Herr Werner Fischer hat in seiner Abhandlung [1] das Problem der Gewichtsfestsetzung bei der Ausgleichung verschiedenartiger Meßgrößen in dankenswert klarer Weise behandelt. Wenn ich mich nun zum gleichen Thema äußere, so will ich versuchen, Wiederholungen zu vermeiden und lediglich Ergänzungen bringen.

Ich sah mich vor einiger Zeit im Rahmen einer Examensarbeit bei der Ausgleichung eines Polygonnetzes mit den gleichen Problemen konfrontiert, die Herr Fischer in [1] behandelt hat. Um meinem obengenannten Vorsatz – Wiederholungen zu vermeiden – getreu zu bleiben, darf ich nur erwähnen, daß meine damaligen Überlegungen in allen wesentlichen Punkten mit den Ausführungen in [1] übereinstimmen. Ich werde mich daher an dieser Stelle darauf beschränken, der Frage nach den Dimensionen verschiedener Größen nachzugehen, die im Rahmen einer Ausgleichung heterogener Beobachtungen auftreten.

Dimensionen

a) Fehlergleichungen

Ich werde nur einige Beispiele behandeln, diese Beispiele aber so anlegen, daß man erforderlichenfalls auch ähnlich gelagerte Fälle nach der gleichen Methode bearbeiten kann. Ich gehe von der Ausgleichung nichtkorrelierter vermittelnder Beobachtungen aus. Damit sich die formelmäßigen Beziehungen übersichtlich darstellen lassen, verwende ich die

Matrizenschreibweise (Matrizen und Vektoren sind im folgenden halbfett gedruckt).

Es bedeuten:

$\boldsymbol{v}$ Verbesserungen
$\boldsymbol{l}$ Beobachtungen
$\boldsymbol{X}$ Unbekannte
$\boldsymbol{A}$ Koeffizientenmatrix der Fehlergleichungen
$\boldsymbol{P}$ Gewichtsmatrix

Die Fehlergleichungen schreiben sich dann wie folgt:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{l} \tag{1.0}$$

Bei manueller Rechnung arbeitet man gewöhnlich mit den sogenannten «homogenisierten Fehlergleichungen $\bar{v}_i$», die man als

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{P}^{1/2} \cdot \boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{X} - \bar{\boldsymbol{l}} \tag{1.1}$$

definiert, wobei

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}^{1/2} \cdot \boldsymbol{A} \quad \text{und} \quad \bar{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{P}^{1/2} \cdot \boldsymbol{l} \tag{1.2}$$

bedeuten.

Anmerkung: Die Matrix $\boldsymbol{P}$ der Gewichte der nichtkorrelierten Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ enthält in der Hauptdiagonalen die Gewichte p_i der Beobachtungen l_i, während alle übrigen Elemente gleich Null sind. – Ich folge Herrn Fischer in [1] und definiere

$$p_i = \frac{C}{m_i^2} \tag{1.3}$$

C ist eine Konstante, m_i der – meist a priori geschätzte – mittlere Fehler der Beobachtung l_i. Damit erhält man die homogenisierten Verbesserungen $\bar{v}_i$ zu

$$\bar{v}_i = \sqrt{p_i} \cdot v_i = \sqrt{C} \cdot \frac{v_i}{m_i} \tag{1.4}$$

Um die Entwicklung der Dimensionen zu verfolgen, zerlege ich die auftretenden Matrizen in Untermatrizen, die so gewählt sind, daß sie nur noch Elemente gleicher Dimension enthalten.

Ich stimme wieder mit Herrn Fischer überein ([1], S. 114), wenn ich die Konstante C in (1.3) als dimensionslos und die mittleren Fehler m_i in der gleichen Dimension wie die jeweiligen Beobachtungen l_i ansetze. Dann wird

$$[pvv] = [\overline{vv}] = \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}}^T \cdot \bar{\boldsymbol{v}} \tag{1.5}$$

selbstverständlich *dimensionslos*. (Hier zeigt sich wieder, daß die Begriffe «Standardisierungs-, Normierungs- oder Homogenisierungsfaktoren» in [1], S. 114, an sich treffender gewählt sind als der Begriff «Gewichte». Da ein einmal eingeführter Begriff aber nur sehr schwer wieder auszumerzen ist, werde ich weiterhin von «Gewichten p_i» reden.)

Ich möchte nun – von den Unbekannten ausgehend – folgende Gruppeneinteilung vornehmen:

Bei der gemeinsamen Ausgleichung von Strecken und Richtungen nach vermittelnden Beobachtungen treten normalerweise 3 verschiedene Typen von Unbekannten auf:

$\boldsymbol{X}_1$ Koordinatenunbekannte x_i, y_i
$\boldsymbol{X}_2$ Orientierungsunbekannte z_i
$\boldsymbol{X}_3$ Maßstabsunbekannte k_i

Diese Gruppen stellen Untermatrizen der Spaltenmatrix (das heißt des Vektors) $\boldsymbol{X}$ dar.

$$\boldsymbol{X} = \begin{array}{|c|} \hline \boldsymbol{X}_1 \\ \hline \boldsymbol{X}_2 \\ \hline \boldsymbol{X}_3 \\ \hline \end{array} \tag{1.6}$$

Verbesserungen, Beobachtungen und Gewichte zerfallen in 2 Gruppen, wobei der Index 1 *Strecken* und der Index 2 *Richtungen* kennzeichnen möge. (Theoretisch kann man bei Unbekannten und Beobachtungen beliebig viele Gruppen bilden; im Interesse der Übersichtlichkeit beschränke ich mich auf 3 beziehungsweise 2 Gruppen.)

$$\boldsymbol{v} = \begin{array}{|c|} \hline \boldsymbol{v}_1 \\ \hline \boldsymbol{v}_2 \\ \hline \end{array} \, , \quad \boldsymbol{l} = \begin{array}{|c|} \hline \boldsymbol{l}_1 \\ \hline \boldsymbol{l}_2 \\ \hline \end{array} \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{|c|c|} \hline \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2 \\ \hline \end{array} \tag{1.8}$$

Die Koeffizienten der Fehlergleichungen teilen sich demnach in $2 \cdot 3 = 6$ Untermatrizen von $\boldsymbol{A}$ auf:

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \hline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \end{array}\right] \tag{1.9}$$

Bevor wir nun die Entwicklung der Dimensionen durch die Normalgleichungen usw. verfolgen können, müssen wir die in den bisher definierten Untermatrizen auftretenden Dimensionen bestimmen:

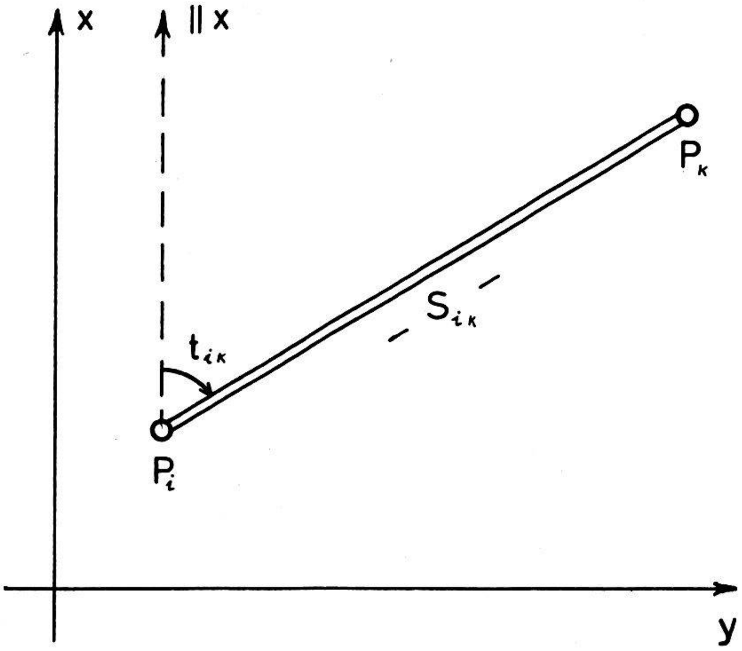
Streckenbeobachtungen und -verbesserungen seien in Zentimetern gegeben, Richtungsbeobachtungen und -verbesserungen in Neusekunden (cc). Dann müssen wir, um übersichtliche Ergebnisse zu erhalten, auch die entsprechenden mittleren Fehler in Zentimetern beziehungsweise Neusekunden ansetzen. Die Koordinatenunbekannten wollen wir in Zentimetern, die Orientierungsunbekannten in Neusekunden und die Maßstabsunbekannten beispielsweise in Zentimeter/Kilometer, das heißt in Einheiten von $1 \cdot 10^{-5}$, erhalten.

Damit sind die Dimensionen der Elemente folgender Untermatrizen festgelegt:

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{v}_1\ [\mathrm{cm}] & \boldsymbol{l}_1\ [\mathrm{cm}] & \\ \boldsymbol{v}_2\ [\mathrm{cc}] & \boldsymbol{l}_2\ [\mathrm{cc}] & \\ \boldsymbol{X}_1\ [\mathrm{cm}] & & \\ \boldsymbol{X}_2\ [\mathrm{cc}] & \boldsymbol{P}_1\ [\mathrm{cm}^{-2}] & \boldsymbol{P}_1^{1/2}\ [\mathrm{cm}^{-1}] \\ \boldsymbol{X}_3\ [\mathrm{cm} \cdot \mathrm{km}^{-1}] & \boldsymbol{P}_2\ [\mathrm{cc}^{-2}] & \boldsymbol{P}_2^{1/2}\ [\mathrm{cc}^{-1}] \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

Die hier gewählte und im folgenden beibehaltene Schreibweise zeigt rechts neben einer Matrix in eckigen Klammern die Dimension der Elemente dieser Matrix.

Anhand der Festlegungen (2.1) ergeben sich die Dimensionen der Fehlergleichungskoeffizienten in $\boldsymbol{A}_{11}$ bis $\boldsymbol{A}_{23}$ automatisch. Betrachten wir zunächst die *Streckenbeobachtungen,* so hat jede Fehlergleichung aus $\boldsymbol{v}_1$ folgenden Aufbau (wie man in den einschlägigen Lehrbüchern der Ausgleichungsrechnung – zum Beispiel in [2] – nachlesen kann):



$$v_{ik} = -\cos t_{ik} \cdot \delta x_i - \sin t_{ik} \cdot \delta y_i + \cos t_{ik} \cdot \delta x_k + \sin t_{ik} \cdot \delta y_k - S_{ik} \cdot \delta k_j - l_{ik} \tag{2.20}$$

Ich bin dabei von dem Ansatz

$$S_{ik} \cdot (1 + \delta k_j) + v_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} \tag{2.21}$$

ausgegangen; dabei bedeuten:

$$\left.\begin{array}{ll} S_{ik} & = \text{beobachtete Strecke} \\ k_j & = 1 + \delta k_j = \text{Maßstabsunbekannte des jeweiligen Meßgerätes beziehungsweise eines Netzteiles} \\ x_i & = x_{0,i} + \delta x_i = \text{Koordinatenunbekannte (Näherungswert + Restunbekannte)} \\ \text{usw.} & \\ s_{ik} & = \sqrt{(x_{0,k} - x_{0,i})^2 + (y_{0,k} - y_{0,i})^2} = \text{genäherte Strecke} \\ l_{ik} & = S_{ik} - s_{ik} = \text{Absolutglied} \\ t_{ik} & = \operatorname{arc\,tan} \dfrac{y_{0,k} - y_{0,i}}{x_{0,k} - x_{0,i}} = \text{genäherter Richtungswinkel} \end{array}\right\} \tag{2.22}$$

Die Gleichung (2.20) zeigt nun folgendes:

$\boldsymbol{A}_{11}$ enthält die $\sin t_{ik}$ und $\cos t_{ik}$,

$\boldsymbol{A}_{12} = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{A}_{13}$ enthält die $-S_{ik}$.

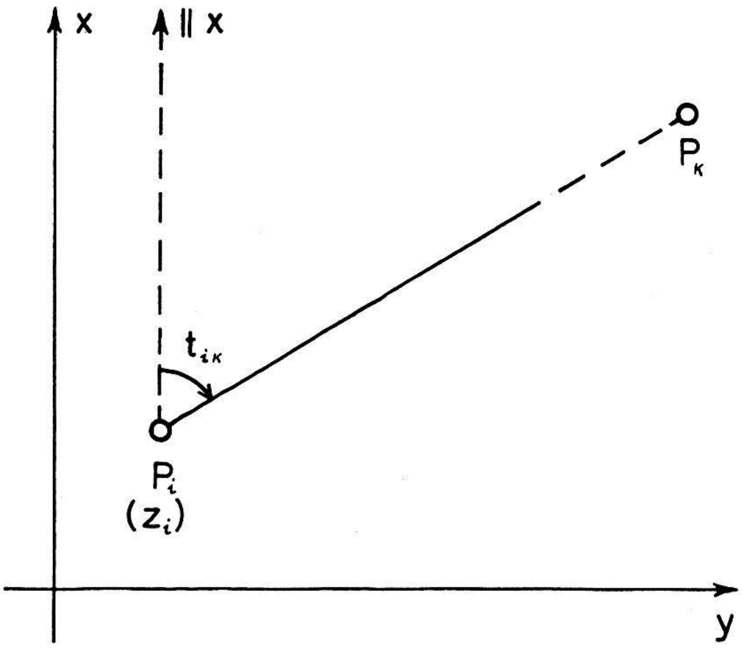
($\boldsymbol{A}_{12}$ ist eine Nullmatrix, da Orientierungsunbekannte in den Fehlergleichungen der Streckenbeobachtungen nicht auftreten.) Somit haben wir erhalten:

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{A}_{11} & [-] \\ \{\boldsymbol{A}_{12} = \boldsymbol{0}\} & \\ \boldsymbol{A}_{13} & [\mathrm{km}] \end{array}\right\} \quad (2.23)$$

Die $-S_{ik}$ in $\boldsymbol{A}_{13}$ sind in Kilometern anzusetzen, wenn wir die Maßstabsunbekannten δk_j in Zentimeter/Kilometer erhalten wollen.

Nach den Streckenbeobachtungen wollen wir nun die *Richtungsbeobachtungen* betrachten. Die Fehlergleichungen $\boldsymbol{v}_2$ zeigen die bekannte Form

$$v_{ik} = a_{ik} \cdot \delta x_i + b_{ik} \cdot \delta y_i - a_{ik} \cdot \delta x_k - b_{ik} \cdot \delta y_k - 1 \cdot \delta z_i - l_{ik} \quad (2.30)$$



$$\left.\begin{array}{l} a_{ik} = \dfrac{+\sin t_{ik}}{s_{ik}} \cdot \varrho = \text{Richtungskoeffizienten} \\ b_{ik} = \dfrac{-\cos t_{ik}}{s_{ik}} \cdot \varrho = \text{Richtungskoeffizienten} \\ \varrho \approx 63\ 6620^{cc} \\ z_i = z_{0,i} + \delta z_i = \text{Orientierungsunbekannte der Station } P_i \\ r_{ik} = \text{beobachtete Richtung} \\ t_{ik} = \text{genäherter Richtungswinkel} \\ l_{ik} = r_{ik} + z_{0,i} - t_{ik} = \text{Absolutglied} \end{array}\right\} \quad (2.31)$$

Die Richtungskoeffizienten stellen demnach die Elemente von $\boldsymbol{A}_{21}$ dar; die Elemente von $\boldsymbol{A}_{22}$ sind gleich -1 oder 0, je nachdem, in welchen Fehlergleichungen die Unbekannten δz_i auftreten beziehungsweise nicht erscheinen. $\boldsymbol{A}_{23}$ ist wieder eine Nullmatrix, da die Maßstabsunbekannten δk_j in den Fehlergleichungen der Richtungsbeobachtungen nicht auftreten. Unser Ergebnis lautet also:

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{A}_{21} & [\mathrm{cc} \cdot \mathrm{cm}^{-1}] \\ \boldsymbol{A}_{22} & [-] \\ \{\boldsymbol{A}_{23} = \boldsymbol{0}\} & \end{array}\right\} \quad (2.32)$$

Zur Erleichterung weiterer Betrachtungen seien hier zunächst die Dimensionen der entsprechenden homogenisierten Matrizen angegeben:

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{P}_1^{1/2} \cdot \boldsymbol{v}_1 & [-] & \\ \bar{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{P}_2^{1/2} \cdot \boldsymbol{v}_2 & [-] & \\ \bar{\boldsymbol{l}}_1 = \boldsymbol{P}_1^{1/2} \cdot \boldsymbol{l}_1 & [-] & \\ \bar{\boldsymbol{l}}_2 = \boldsymbol{P}_2^{1/2} \cdot \boldsymbol{l}_2 & [-] & \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{11} = \boldsymbol{P}_1^{1/2} \cdot \boldsymbol{A}_{11} & & [\mathrm{cm}^{-1}] \\ \{\bar{\boldsymbol{A}}_{12} = \boldsymbol{P}_1^{1/2} \cdot \boldsymbol{A}_{12} = \boldsymbol{0}\} & & \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{13} = \boldsymbol{P}_1^{1/2} \cdot \boldsymbol{A}_{13} & & [\mathrm{km} \cdot \mathrm{cm}^{-1}] \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} = \boldsymbol{P}_2^{1/2} \cdot \boldsymbol{A}_{21} & & [\mathrm{cm}^{-1}] \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{22} = \boldsymbol{P}_2^{1/2} \cdot \boldsymbol{A}_{22} & & [\mathrm{cc}^{-1}] \\ \{\bar{\boldsymbol{A}}_{23} = \boldsymbol{P}_2^{1/2} \cdot \boldsymbol{A}_{23} = \boldsymbol{0}\} & & \end{array}\right\} \quad (2.40)$$

b) Normalgleichungen

Im nächsten Schritt will ich die Dimensionen der Normalgleichungskoeffizienten darstellen.

Das Ausgleichungsprinzip $\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} =$ Min. führt auf die sogenannten Normalgleichungen

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \qquad (3.00)$$

Dabei bedeuten

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} = \bar{\boldsymbol{A}}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}} \qquad (3.01)$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l} = \bar{\boldsymbol{A}}^T \cdot \bar{\boldsymbol{l}} \qquad (3.02)$$

Setzt man jetzt in (3.00), (3.01) beziehungsweise (3.02) die Untermatrizen aus (1.6) bis (1.9) ein, so ergibt sich:

$$\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_{13} \\ \hline \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \boldsymbol{B}_{23} \\ \hline \boldsymbol{B}_{31} & \boldsymbol{B}_{32} & \boldsymbol{B}_{33} \end{array}\right] \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{N} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{N}_1 \\ \hline \boldsymbol{N}_2 \\ \hline \boldsymbol{N}_3 \end{array}\right] \tag{3.12}$$

Da $\boldsymbol{B}$ eine symmetrische Matrix ist **($\boldsymbol{B}^T \equiv \boldsymbol{B}$)**, kann man vorweg sagen:

$$\boldsymbol{B}_{21} = \boldsymbol{B}_{12}^T, \quad \boldsymbol{B}_{31} = \boldsymbol{B}_{13}^T, \quad \boldsymbol{B}_{32} = \boldsymbol{B}_{23}^T \tag{3.13}$$

Für die übrigen Untermatrizen erhält man unter Verwendung von (1.7), (1.8), (1.9) und (2.40) durch Ausmultiplizieren nach (3.01) beziehungsweise (3.02):

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_{11} &= \bar{\boldsymbol{A}}_{11}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{11} + \bar{\boldsymbol{A}}_{21}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{21} && [\mathrm{cm}^{-2}] \\
\boldsymbol{B}_{12} &= \bar{\boldsymbol{A}}_{11}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{12} + \bar{\boldsymbol{A}}_{21}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{22} && [\mathrm{cc}^{-1} \cdot \mathrm{cm}^{-1}] \\
\boldsymbol{B}_{13} &= \bar{\boldsymbol{A}}_{11}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{13} + \bar{\boldsymbol{A}}_{21}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{23} && [\mathrm{km} \cdot \mathrm{cm}^{-2}] \\
\boldsymbol{B}_{22} &= \bar{\boldsymbol{A}}_{12}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{12} + \bar{\boldsymbol{A}}_{22}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{22} && [\mathrm{cc}^{-2}] \\
\Big\{ \boldsymbol{B}_{23} &= \bar{\boldsymbol{A}}_{12}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{13} + \bar{\boldsymbol{A}}_{22}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{23} = \boldsymbol{0} \Big\} && \\
\boldsymbol{B}_{33} &= \bar{\boldsymbol{A}}_{13}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{13} + \bar{\boldsymbol{A}}_{23}^T \cdot \bar{\boldsymbol{A}}_{23} && [\mathrm{km}^2 \cdot \mathrm{cm}^{-2}]
\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_1 &= \bar{\boldsymbol{A}}^T_{11} \cdot \bar{\boldsymbol{l}}_1 + \bar{\boldsymbol{A}}^T_{21} \cdot \bar{\boldsymbol{l}}_2 \quad [\mathrm{cm}^{-1}] \\
\boldsymbol{N}_2 &= \bar{\boldsymbol{A}}^T_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{l}}_1 + \bar{\boldsymbol{A}}^T_{22} \cdot \bar{\boldsymbol{l}}_2 \quad [\mathrm{cc}^{-1}] \\
\boldsymbol{N}_3 &= \bar{\boldsymbol{A}}^T_{31} \cdot \bar{\boldsymbol{l}}_1 + \bar{\boldsymbol{A}}^T_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{l}}_2 \quad [\mathrm{km} \cdot \mathrm{cm}^{-1}]
\end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

Man kann die Richtigkeit der in (2.1), (3.21) und (3.22) angegebenen Dimensionen anhand der expliziten Form der Normalgleichungen überprüfen:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_{11} \cdot \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{B}_{12} \cdot \boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{B}_{13} \cdot \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{N}_1 &= \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{B}^T_{12} \cdot \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{B}_{22} \cdot \boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{B}_{23} \cdot \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{N}_2 &= \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{B}^T_{13} \cdot \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{B}^T_{23} \cdot \boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{B}_{33} \cdot \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{N}_3 &= \boldsymbol{0}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.23)$$

Die Gleichungen (3.23) sind mit (3.00) identisch.

c) Die inverse Matrix $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}^{-1}$

Für die Berechnung der Unbekannten $\boldsymbol{X}$ wird die inverse Matrix $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}^{-1}$ benötigt. (Eine entsprechende Berechnung von $\boldsymbol{Q}$ wird oft als «unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen» bezeichnet; vgl. zum Beispiel [2], S. 99.)

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{N} \qquad (4.0)$$

Wir teilen $\boldsymbol{Q}$ ein in gewisse Untermatrizen, die denen von $\boldsymbol{B}$ entsprechen, und erhalten zunächst:

$$\boldsymbol{Q} = \left|\begin{array}{c|c|c}
\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12} & \boldsymbol{Q}_{13} \\
\hline
\boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{Q}_{22} & \boldsymbol{Q}_{23} \\
\hline
\boldsymbol{Q}_{31} & \boldsymbol{Q}_{32} & \boldsymbol{Q}_{33}
\end{array}\right| \qquad (4.1)$$

Mit Hilfe von $\boldsymbol{B}^T \equiv \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}^{-1}$ läßt sich unter Anwendung elementarer Rechenregeln der Matrizenrechnung leicht zeigen, daß auch $\boldsymbol{Q}$ eine symmetrische Matrix ist:

$$\boldsymbol{Q} \equiv \boldsymbol{Q}^T \qquad (4.2)$$

Daraus folgt sofort:

$$\underset{\sim}{Q}_{21} = \underset{\sim}{Q}_{12}^T , \qquad \underset{\sim}{Q}_{31} = \underset{\sim}{Q}_{13}^T , \qquad \underset{\sim}{Q}_{32} = \underset{\sim}{Q}_{23} \tag{4.3}$$

Nun können wir – analog zu (3.23) – das nach den Unbekannten aufgelöste Gleichungssystem angeben:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= \underset{\sim}{Q}_{11} \cdot \boldsymbol{N}_1 + \underset{\sim}{Q}_{12} \cdot \boldsymbol{N}_2 + \underset{\sim}{Q}_{13} \cdot \boldsymbol{N}_3 \\ \boldsymbol{X}_2 &= \underset{\sim}{Q}_{12}^T \cdot \boldsymbol{N}_1 + \underset{\sim}{Q}_{22} \cdot \boldsymbol{N}_2 + \underset{\sim}{Q}_{23} \cdot \boldsymbol{N}_3 \\ \boldsymbol{X}_3 &= \underset{\sim}{Q}_{13}^T \cdot \boldsymbol{N}_1 + \underset{\sim}{Q}_{23}^T \cdot \boldsymbol{N}_2 + \underset{\sim}{Q}_{33} \cdot \boldsymbol{N}_3 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Durch Vergleich von (4.4) und (3.23) erkennt man, daß die Dimensionen der $\underset{\sim}{Q}_{ik}$ zu denen der $\boldsymbol{B}_{ik}$ reziprok sind (das gilt ganz allgemein für zueinander inverse Matrizen):

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{Q}_{11}\,[\mathrm{cm}^2] \\ &\underset{\sim}{Q}_{12}\,[\mathrm{cm} \cdot \mathrm{cc}] \\ &\underset{\sim}{Q}_{13}\,[\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{km}^{-1}] \\ &\underset{\sim}{Q}_{22}\,[\mathrm{cc}^2] \\ &\underset{\sim}{Q}_{23}\,[\mathrm{cc} \cdot \mathrm{km}^{-1} \cdot \mathrm{cm}] \\ &\underset{\sim}{Q}_{33}\,[\mathrm{km}^{-2} \cdot \mathrm{cm}^2] \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Die Dimension von $\underset{\sim}{Q}_{23}$ ergibt sich nach (4.4), 2. Gleichung.

d) Gewichtskoeffizienten und mittlere Fehler der Unbekannten

Wenn wir die mittleren Fehler der Unbekannten berechnen wollen, müssen wir diese Unbekannten zunächst als Funktionen der ursprünglichen Beobachtungen darstellen und dann auf diese Funktionen das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz anwenden.

Wir erhalten nacheinander:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{D}^T \cdot \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{D}^T &= \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Das Fehler- (beziehungsweise Gewichts-) Fortpflanzungsgesetz lautet in Matrizenschreibweise:

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{D}^T \cdot \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{D} \tag{5.2}$$

$\boldsymbol{R_X}$ stellt dabei die Korrelationsmatrix der Unbekannten $\boldsymbol{X}$ dar; diese Darstellung läßt sich bekanntlich noch vereinfachen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R_X} &= (\boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{A}^T\,\boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{P}^{-1} \cdot (\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^{-1})\\ &= \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}\\ &= \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{R_X} = \boldsymbol{B}^{-1} \equiv \boldsymbol{\underset{\sim}{Q}} \tag{5.3}$$

Mit Hilfe des – nach (1.5) dimensionslosen! – mittleren Gewichtseinheitsfehlers

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \pm\sqrt{\frac{[\bar{v}\bar{v}]}{n-u}} \tag{5.4}$$

errechnet sich der mittlere Fehler einer Unbekannten x_i als Produkt des Gewichtseinheitsfehlers mit der Wurzel aus der «Gewichtsreziproken von x_i», das heißt der Wurzel aus dem Element q_{ii} in der Hauptdiagonalen von $\boldsymbol{\underset{\sim}{Q}}$. [Vgl. [2], S. 94/95, Gleichung (8) ff.]

Da somit die Gewichtsreziproken der Koordinatenunbekannten $\boldsymbol{X}_1$ in $\boldsymbol{\underset{\sim}{Q}}_{11}$, die der Orientierungsunbekannten $\boldsymbol{X}_2$ in $\boldsymbol{\underset{\sim}{Q}}_{22}$ und die der Maßstabsunbekannten $\boldsymbol{X}_3$ in $\boldsymbol{\underset{\sim}{Q}}_{33}$ enthalten sind, sind die Dimensionen der gesuchten mittleren Fehler identisch mit der Wurzel aus den Dimensionen von $\boldsymbol{\underset{\sim}{Q}}_{11}$, $\boldsymbol{\underset{\sim}{Q}}_{22}$ und $\boldsymbol{\underset{\sim}{Q}}_{33}$:

$$\left.\begin{array}{ll} m_{X_1} & [\mathrm{cm}] \\ m_{X_2} & [\mathrm{cc}] \\ m_{X_3} & [\mathrm{cm} \cdot \mathrm{km}^{-1}] \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

Es ist beruhigend, daß die bisherigen Überlegungen in Gleichung (5.5) zu einem durchaus plausiblen Ergebnis geführt haben.

Ausblick

Nach meiner Ankündigung, nur einige Beispiele zu behandeln, will ich es nun auch bei den Darstellungen bis zur Gleichung (5.5) bewenden lassen. Ich hoffe, gezeigt zu haben, wie ein vernünftiger und logisch begründeter Gewichtsansatz nach [1] auch bezüglich der Dimensionen abgeleiteter Größen zu eindeutigen und plausiblen Ergebnissen führt. Die Art der Herleitung mit Hilfe geeigneter Untermatrizen läßt sich auch auf beliebige andere abgeleitete Größen und natürlich auch auf andere Ausgleichungsformen anwenden.

Der Leser möge auch mir gestatten, in diesem Zusammenhang auf den letzten Satz der Abhandlung [1] – ein Zitat von Lilly – hinzuweisen.

Literaturverzeichnis

[1] *Fischer, W.:* Strecken- und Richtungsgewichte. Schweizer Zeitschrift für Vermessungswesen, Photogrammetrie und Kulturtechnik, Heft 5/1969, S. 106–119.

[2] *Grossmann, W.:* Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. 2. Aufl. 1961, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Mitteilung der Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Generalversammlung der Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA am 19. September 1969, 17.30 Uhr, im Hotel Krone, Winterthur.

Kurse der Schweizerischen Vereinigung für Landesplanung

Einladung an die Mitglieder des SVVK

Die Schweizerische Vereinigung für Landesplanung veranstaltet diesen Herbst regionale Kurse über das Thema:

Beiträge und Gebühren als Mittel zur Erschließung des Baulandes in der Gemeinde

Die Kurse dauern anderthalb Tage und umfassen neben Referaten über die Finanzierung der Erschließungsanlagen, wie Straßen, Kanalisationen, Werkleitungen usw., auch Gruppenübungen für die Teilnehmer. Eingeladen sind Behördemitglieder und Funktionäre der Gemeinden sowie – auf Anregung des Präsidenten der «Société vaudoise des ingénieurs géomètres et du génie rural» und entsprechende Verhandlungen der Zentralvorstandes – auch die Mitglieder des Schweizerischen Vereins für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Die Kosten beziffern sich in der Größenordnung von Fr. 65.– für Mitglieder und Vertreter von Mitgliedsgemeinden der VLP und Fr. 75.– für die übrigen Teilnehmer.

Die Kursdaten sind:

15./16. Oktober 1969	in Brunnen, für die Kantone Uri, Schwyz, Zug und Glarus
22./23. Oktober 1969	in Langenthal, für den Kanton Bern, speziell das Gebiet des Oberaargaus (weitere Kurse im Kanton Bern folgen)
12./13. November 1969	in Luzern, für die Kantone Luzern, Obwalden und Nidwalden
25./26. November 1969	in Chur, für den Kanton Graubünden

Kurse für die Westschweiz und die Region St. Gallen–Appenzell finden bereits im September statt.

Interessenten an den Kursen der Monate Oktober und November melden sich direkt beim Zentralsekretariat der VLP, Eidmattstraße 38, 8032 Zürich, Telephon (051) 32 14 54 und 47 55 54, zum Bezug der Anmeldepapiere.

Zentralvorstand SVVK