Zur Frage der Konvergenz eines Iterationsverfahrens der analytischen Fortsetzung nach unten

Autor(en): **Gottschalk, Hans-Jörg**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **67 (1969)**

Heft 11

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-223008

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 11 · LXVII. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. November 1969

DK 528.27.061

Zur Frage der Konvergenz eines Iterationsverfahrens der analytischen Fortsetzung nach unten

Hans-Jörg Gottschalk

Sind Schwerewerte Δg auf der x–y-Ebene gegeben, so lassen sich Schwerewerte in Punkten P_i mit der Höhe $z_i = z_i\ (x, y)$ über der Ebene mit Hilfe des sogenannten Fortsetzungsintegrals berechnen:

$$\Delta g_i = \frac{z_i}{2\pi} \int_{-00}^{+00} \int_{-00}^{+00} \frac{\Delta g}{D^3}\, dy\ dx \tag{1}$$

$D = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2}$ bedeutet dabei den Abstand zwischen Aufpunkt und Quellpunkt. Das Integral ist über die gesamte, unendlich ausgedehnte x–y-Ebene zu erstrecken. Für die praktische Rechnung teilt man das Integrationsgebiet in endliche Flächenelemente ΔE_k auf, denen entsprechende Schweremittelwerte Δg_k zugeordnet werden. Dann wird aus (1)

$$\Delta g_i = \sum_k \Delta g_k\ \frac{z_i}{2\pi} \iint_{\Delta E_k} \frac{dy\ dx}{D^3} \quad \text{und mit}$$

$$a_{i,k} = \frac{z_i}{2\pi} \iint_{\Delta E_k} \frac{dy\ dx}{D^3} \tag{1.1}$$

$$\Delta g_i = \sum_k \Delta g_k \cdot a_{i,k} \tag{2}$$

Wegen

$$\frac{z_i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy\,dx}{D^3} = 1 \text{ bestimmt man die } a_{i,k} \text{ so, daß}$$

$$\sum_k a_{i,k} = 1 \tag{3}$$

Betrachtet man die Gesamtheit der Δg_i und ordnet sie entsprechend den Δg_k, etwa so, daß Δg_i der Schwerewert ist, der einem Flächenelement der Fläche $z = z(x, y)$, dessen Mittelpunkt P_i senkrecht über dem Mittelpunkt von ΔE_k liegt, zugeordnet ist, so ergibt sich aus (2), vgl. [1], in Matrizenschreibweise

$$f = A^* g \tag{4}$$

Hierin bezeichnen der Vektor f die nach oben fortgesetzten und der Vektor g die auf der x–y-Ebene gegebenen Schwerewerte. Die Matrix A^* besteht aus den Elementen $a_{i,k}$ entsprechend (1.1). Sie hat die Eigenschaft, daß nach (3) die Zeilensumme eins ist. Wegen der unendlichen Ausdehnung der Integrationsebene hat die Matrix A^* ∞^2 Elemente. Für die praktische Durchführung wählt man endliche Grenzen zur Berechnung von (1). Damit wird (4) zu

$$f = Ag + c \tag{5}$$

wobei der Vektor c ausdrückt, daß man zur Berechnung aller Δg_i Δg_k in einem Gebiet benötigt, das um soviel ausgedehnter ist als das der Δg_i, wie es die Größe des Integrationsgebietes bei jeweiliger Berechnung von (1) erfordert, vgl. [2]. Die Matrix A ist eine quadratische Matrix der Dimension (n, n), wenn die Vektoren f, g und c aus n Elementen bestehen. Sie hat die Eigenschaft, daß wegen (3) die Zeilennorm, vgl. [3], S. 203,

$$Z = \|A\| = \operatorname*{Max}_i \sum_k |a_{i,k}| = 1$$

ist und daß mit (1.1) die Glieder auf der Hauptdiagonalen überwiegen:

$$|a_{i,i}| > |a_{i,k}|, \text{ wenn alle } \Delta E_k \text{ gleich groß sind.}$$

Die analytische Fortsetzung nach unten läßt sich nun als die Inversion des Problems der Fortsetzung nach oben deuten: Gegeben ist f, und gesucht ist g. Es wird also nach der Schwereverteilung auf der x–y-Ebene gefragt, die das auf einer beliebig geformten Fläche $z = z(x, y)$ über der x–y-Ebene gemessene Schwerefeld erzeugt.

Aus (5) ergibt sich g zu

$$g = A^{-1}(f - c) \tag{6}$$

wobei A^{-1} die zu A inverse Matrix bezeichnet mit $AA^{-1} = E$. Die Matrix A läßt sich mit Hilfe der Neumannschen Reihe invertieren.

Es ist, wenn E die Einheitsmatrix bedeutet,

$$A^{-1} = E + (E - A) + (E - A)^2 + (E - A)^3 + \ldots + (E - A)^m + \ldots \quad (7)$$

Die Reihe (7) konvergiert im allgemeinen nicht sehr schnell und nur dann, wenn die Eigenwerte λ der Matrix $(E - A)$

$$|\lambda_{E-A}| < 1 \text{ sind.}$$

Die analytische Fortsetzung nach unten wird deshalb mit Hilfe der Iterationsformel, vgl. [4], S. 109 ff.,

$$g^{(m+1)} = (f - c) + (E - A)\, g^{(m)} \quad (8)$$

durchgeführt (m bezeichnet die Anzahl der Iterationsschritte). Nimmt man als Anfangswert für die Iteration $g^{(0)} = (f - c)$, so ist nach (8)

$$\begin{aligned}
g^{(1)} &= (f-c) + (E-A)\ (f-c);\\
g^{(2)} &= (f-c) + (E-A)\,((f-c) + (E-A)\ (f-c))\\
&= (f-c) + (E-A)\ (f-c) + (E-A)^2\,(f-c);\\
g^{(3)} &= (f-c) + (E-A)\,((f-c) + (E-A)\ (f-c) + (E-A)^2\,(f-c))\\
&= (f-c) + (E-A)\ (f-c) + (E-A)^2\,(f-c) + (E-A)^3\,(f-c).\\
g^{(m)} &= (f-c) + (E-A)\ (f-c) + (E-A)^2\,(f-c) + (E-A)^3\,(f-c) +\\
&\quad + \ldots + (E-A)^m\,(f-c)\\
&= (E + (E-A) + (E-A)^2 + (E-A)^3 + \ldots + (E-A)^m)\,(f-c) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Aus (9) wird mit (7), vgl. [5] und [8],

$g^{(m)} = A^{-1}\,(f-c) - (E-A)^m\,A^{-1}\,(f-c)$ und mit (6)

$$g - g^{(m)} = (E-A)^m\, g \quad (10)$$

Der Ausdruck $d = g - g^{(m)} = (E - A)^m g$ ist das Restglied der Reihe (9) und das Maß dafür, wie gut die durch das Iterationsverfahren (8) berechneten Werte $g^{(m)}$ die wahren Werte g annähern. Hier zeigt sich auch wieder die schon bei Gleichung (7) erwähnte Tatsache, daß das Verfahren der iterativen Fortsetzung von Schwerewerten nach unten nur dann konvergiert, wenn die Eigenwerte der Matrix $(E - A)$

$$|\lambda_{E-A}| < 1 \text{ sind, da nur dann gilt}$$

$$\lim_{m \to \infty} (E - A)^m = 0$$

Ein Näherungswert für d ist

$$d' = g^{(m)} - g^{(m-1)} = (E - A)^m\,(f - c) \quad (11)$$

wobei mit Gleichungen (6) und (7) gilt:

$$d = d' + ((E - A)^{m+1} + (E - A)^{m+2} + \dots + (E - A)^{m+m} + \dots)(f - c)$$

$$\text{mit} \lim_{m \to \infty} d = \lim_{m \to \infty} d' = 0, \text{ für } |\lambda_{E-A}| < 1$$

Die Elemente $a_{i,k}$ der Matrix A, wie sie aus Gleichung (1.1) mit Aufteilung der Integrationsfläche in gleiche quadratische Flächenelemente ΔE_k berechnet worden sind, sind sämtlich positiv, $a_{i,k} > 0$, und es gilt, wie schon weiter oben gesagt, $a_{i,i} > a_{i,k}$.

Letztere Ungleichung trifft um so mehr zu, je kleiner das Verhältnis z_i/S der Fortsetzungshöhe z_i und der Seitenlänge S der verwendeten Flächenelemente ist. Das Iterationsverfahren konvergiert also um so schneller, je größer bei einer bestimmten Fortsetzungshöhe das Raster ist, mit dem man die Integrationsebene in Flächenelemente ΔE_k aufgeteilt hat, vgl. [1], [2], [6]. Die Eigenwerte der Matrix $(E - A)$ wurden von Aronow untersucht, vgl. [6], wo angegeben wird, daß sämtliche Eigenwerte $|\lambda_{E-A}| < 1$ sind. Damit ist erwiesen, daß das Iterationsverfahren, bei dem direkt aus dem Fortsetzungsintegral nach (1.1) berechnete Koeffizienten $a_{i,k}$ verwendet werden, theoretisch immer konvergiert. Jedoch zeigt sich bei praktischer Rechnung, daß in den Fällen, in denen die Eigenwerte $|\lambda_{E-A}|$ nahe 1 sind, die Konvergenz sehr langsam ist. Um mit dem Rechenaufwand in erträglichen Grenzen zu bleiben, empfiehlt es sich deshalb, das Verhältnis

$$z_i/S < 1 \text{ zu halten, vgl. [1].}$$

Tabelle 1 zeigt das Verhalten der Konvergenz des Iterationsverfahrens nach Gleichung (9) mit den nach Gleichung (1.1) berechneten Koeffizienten $a_{i,k}$ für das Verhältnis $z_i/S = 0{,}80$. Als Maß für die Konvergenz wurde der Vektor d' aus Gleichung (11) benutzt in der Form

$$\sigma = \sqrt{\frac{d'^T \cdot d'}{\nu}}$$

wobei ν die Anzahl der Glieder von d' bedeutet. σ entspricht also der mittleren quadratischen Abweichung der durch Iteration berechneten $g^{(m)}$ von den Werten $g^{(m-1)}$ und damit näherungsweise von den Sollwerten g.

Tabelle 1

Nr. des Iterationsschritts	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
σ [mGal]	0,72	0,33	0,21	0,15	0,12	0,10	0,09	0,07	0,06	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03

σ nimmt bis zum 5. Iterationsschritt schnell ab und nähert sich dann asymptotisch dem Wert 0. Dieses Verhalten von σ ist für alle Verhältnisse $z_i/S < 0{,}80$ ähnlich. Der Iterationsvorgang konvergiert immer, wenn Gleichung (1.1) zur Berechnung der $a_{i,k}$ benutzt wird. Anders kann es jedoch sein, wenn man eine der anderen bekannten Formeln zur Berechnung des Fortsetzungsintegrals und damit zur Berechnung der Koeffizienten $a_{i,k}$ der Matrix A verwendet. Für dasselbe Schwerematerial wie oben ergab sich bei Ermittlung der Koeffizienten $a_{i,k}$ aus der Formel von Baranov, [7], bei der iterativen analytischen Fortsetzung nach (11) für die Größe σ bei $z_i/S = 0{,}80$:

Tabelle 2

Nr. des Iterationsschritts	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
σ [mGal]	0,85	0,37	0,24	0,19	0,17	0,15	0,15	0,14	0,14	0,15	0,15	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19

σ nimmt ab bis auf $\pm$ 0,14 [mGal] beim 7. und 8. Iterationsschritt, steigt aber dann wieder auf $\pm$ 0,19 [mGal] beim 15. Iterationsschritt an. Das iterative Verfahren ist also divergent.

Da beide Male dasselbe Schwerematerial verwendet wurde – es handelt sich um Schweremittelwerte für Flächenelemente ΔE_k von 50×50 m² Flächeninhalt in einem Gebiet von $1{,}5 \times 1{,}5$ km² Gesamtfläche –, ist die Konvergenz oder Divergenz des Fortsetzungsverfahrens nur auf unterschiedliche Eigenschaften der verwendeten Matrizen A zurückzuführen.

In Verbindung mit Gleichung (7) ist gezeigt, daß das Iterationsverfahren dann und nur dann konvergiert, wenn die Eigenwerte $|\lambda_{E-A}| < 1$ sind, vgl. auch [3].

Diese sind stets $|\lambda_{E-A}| < 1$, wenn die Matrix A nach (1.1) berechnet wird, wie in [6] angegeben ist. Die Zeilennorm der Matrix $(E - A)$, bei der die Koeffizienten der Matrix A nach der Formel von Baranov bestimmt wurden, ist für $z_i/S = 0{,}80$

$$Z_B = \|E - A\|_B = \operatorname*{Max}_i \sum_k |(e - a)_{i,k}|$$

$$Z_B = 1{,}93$$

Bei der nach (1.1) berechneten Matrix beträgt

$$Z = \|E - A\| = 1{,}63$$

Da nach [3] die Zeilennorm eine obere Schranke für die Eigenwerte $|\lambda_{E-A}|$ angibt mit

$$|\lambda_{E-A}| \leq Z, \text{ und da } Z_B < Z \text{ ist,}$$

so liegt der Schluß nahe, daß die Eigenwerte $|\lambda_{E-A}|$ bei der nach Baranov berechneten Matrix so groß werden, daß eine Konvergenz des iterativen Verfahrens zur analytischen Fortsetzung nach unten nicht mehr zu erreichen ist*.

Die hier durchgeführte Untersuchung zeigt, daß Konvergenz oder Divergenz des Iterationsverfahrens zur analytischen Fortsetzung nach unten im wesentlichen von der verwendeten Formel zur Berechnung des Fortsetzungsintegrals abhängen und daß bei gleichem Schwerematerial verschiedene Formeln zu verschiedenen Ergebnissen führen können, je nachdem, welche Eigenschaften die jeweilige Formel der Iterationsmatrix zuordnet. Insbesondere ist nicht auszuschließen, daß bei einer Formel die Eigenwerte der Matrix $(E - A)$ so groß werden können, daß das Verfahren divergent ist. Dies ist besonders dann zu erwarten, wenn die Zeilennorm

$$Z = \|E - A\| = \operatorname*{Max}_{i} \sum_{k} |(e - a)_{i,k}|$$

größer wird als die entsprechende der nach (1.1) berechneten Matrix. Die numerischen Rechnungen wurden auf der Rechenanlage IBM 7090 der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Birlinghoven bei Bonn, vorgenommen.

Literaturverzeichnis

[1] *Koch, K.R.:* Numerical examples for downward continuation of gravity, Rep. Nr. 112, Dep. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus 1968.

[2] *Gottschalk, H.-J.:* Über die gravimetrische Bestimmung des äußeren Schwerefeldes in nächster Nachbarschaft der Erdoberfläche (Dissertation), Bonn 1967.

[3] *Zurmühl, R.:* Matrizen und ihre technischen Anwendungen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1964.

[4] *Madkour, M.F.:* On the gravity anomaly above the earth and its attenuation (Dissertation), The Ohio State University, Columbus 1966.

[5] *Solowejew, O.A.:* Über das Problem der analytischen Fortsetzung von Potentialfunktionen in den unteren Halbraum, Geologija i Geofisika 1968, H. 10, S. 118–124 (Übersetzung aus dem Russischen).

[6] *Aronow, W.I.:* Computations of plumb line deflections from observations of Δg in a mountainous region, Geodesy and Aerophotography, S. 345–348 (Übersetzung aus dem Russischen).

[7] *Baranov, V.:* Calcul du gradient vertical du champ de gravité ou du champ magnétique mesuré à la surface du sol, Geoph. Prospecting, Bd. 1, 1953, S. 171–191.

[8] *Bjerhammar, A.:* On Gravity, The Royal Institute of Technology, Stockholm 1968.

* Das Kriterium der Zeilennorm

$$\operatorname*{Max}_{i} \sum_{k} |(e-a)_{i,k}| < 1$$

vgl. auch [8], erweist sich hier für eine direkte Beurteilung des Konvergenzverhaltens des Iterationsverfahrens als zu grob, da es hinreichend, aber nicht notwendig ist.

Zusammenfassung

Einige Aspekte der Konvergenz der iterativen Schwerereduktion mit Hilfe des Fortsetzungsintegrals werden diskutiert. Es wird gezeigt, daß die Konvergenz des Iterationsvorgangs von der Formel abhängt, die zur Auswertung des Fortsetzungsintegrals benutzt wird.

Résumé

Quelques aspects de la convergence de la réduction itérative des anomalies de la gravité en utilisant l'intégrale de continuation sont discutés. Il est démontré que la convergence du procès itératif dépend de la formule utilisée pour l'évaluation de cette intégrale.

DK 341.222 (282.2)

Zur Festlegung von Hoheitsgrenzen in Flußläufen

H. Griesel

Nebst den Eigentumsgrenzen müssen in der Grundbuchvermessung, sei es in den Original- oder in den Übersichtsplänen, auch die Hoheitsgrenzen kartiert werden. Die Schweizerische Instruktion für die Parzellarvermessung schreibt dies wohl vor, regelt aber leider das Verfahren für die Festlegung der Hoheitsgrenzen zwischen Kantonen nicht. Die Vorschriften für die Festlegung der Territorialgrenzen sind in den kantonalen Vorschriften zu suchen. Die bündnerische Verordnung für die Grundbuchvermessungen widmet einen ganzen Abschnitt den Gemeindegrenzen. Die für Graubünden wichtigen Kreisgrenzen sowie die Bezirksgrenzen werden überhaupt nicht erwähnt. Sie haben sich nach den Gemeindegrenzen zu richten. Dabei wären gerade die Kreisgerichte an klaren Kreisgrenzen interessiert, denn diese begrenzen räumlich ihre Zuständigkeit bei Jagdvergehen und bei Verkehrsdelikten.

In Graubünden sind die Gemeinden in hohem Maße autonom. Sie verleihen die Konzessionen für die Wasserkräfte und die Kiesausbeutung aus Gewässern und öffentlichem Boden, so daß der strengen Befolgung der Vorschriften große Bedeutung zukommt. Da die Grundbücher gemeindeweise angelegt werden und die öffentlichen Auflagen des Vermessungswerkes und des Grundbuches gemeindeweise publiziert werden, ist es notwendig, vor Inangriffnahme einer Vermessung deren Perimeter, welcher oft durch den Gemeindebann bestimmt wird, zu kennen. Der Kleine Rat, die Regierung des Kantons Graubünden, hatte sich kürzlich als Verwaltungsgericht mit einer Territorialgrenzstreitigkeit zu befassen, welche nur dadurch entstanden war, daß die großrätliche Verordnung über die Erstellung von Grundbuchvermessungen nicht beachtet wurde. Diese sieht vor, daß eine Hoheitsgrenze von Vertretern der Gemeinden zusam-