Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 2 · LXVIII. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Februar 1970

DK 528.14 : 531.2

Sur une notion nouvelle: la matrice de rigidité

A. Ansermet

Zusammenfassung

Interessante Parallelen bestehen zwischen der Methode der kleinsten Quadrate und der statischen Berechnung elastischer Systeme.

Die Methode der kleinsten Quadrate steht in Einklang mit dem Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit. Dabei spielt die Steifigkeitsmatrix eine sehr wichtige Rolle.

Résumé

D'intéressants parallèles existent entre la méthode des moindres carrés et le calcul statique de systèmes élastiques.

La méthode des moindres carrés et le principe du travail de déformation minimum sont mutuellement en corrélation étroite. La matrice dite de rigidité joue alors un rôle très important.

Le problème traité ci-après a fait déjà l'objet d'une publication, mais sous une forme un peu fragmentaire, dans le numéro de mai 1968; ce domaine important de l'hyperstatique subissant constamment de nouveaux développements, il a paru opportun de lui consacrer encore quelques lignes. Les ingénieurs-géomètres et ceux du génie-rural peuvent apporter en effet une collaboration bienvenue lors du calcul de structures même compliquées. La notion d'ellipsoïde de déformation (Formänderungsellipsoid) leur deviendra familière.

La méthode bien connue, aux variations de coordonnées des nœuds, trouve une occasion excellente d'être appliquée, mais les staticiens ont, à certain égards, de la chance: les poids des barres ne donnent pas lieu à des controverses comme c'est le cas pour les côtés d'un réseau électrotélémétrique par exemple. Les poids des barres d'un système sont proportionnels aux inverses des modules des barres dont la définition sera indiquée ci-après; la solution usuelle consiste à couper fictivement les barres surabondantes laissant ainsi subsister un système statiquement déterminé, donc facilement calculable, dit fondamental (Grundsystem). Les forces remplaçant les barres coupées sont choisies arbitrairement. Le calcul de ce système fournit les termes absolus f des équations.

Avant de poursuivre, il convient d'énumérer les notations en faisant abstraction des indices:

l, S	Longueurs et sections transversales des barres
E	Coefficient d'élasticité de la barre
a, b, c ...	Coefficients des inconnues
dx, dy, dz	Variations des coordonnées des nœuds
f	Terme absolu des équations aux déformations
p	Poids des barres (proportionnels à $ES: l$)
v, m	Variation longueur des barres et modules ($v = mT = \frac{l}{ES} T$)
T	Efforts axiaux dans les barres (Stabkräfte)
	Pour la barre $(x, y, z) - (x', y', z')$ on a:
	$v = a\,(dx - dx') + b\,(dy - dy') + c\,(dz - dz')$ (poids p) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
	$[pvv]$ = minimum

On retrouve l'analogie avec les mesures linéaires. Avant de poursuivre donnons, sous sa forme originale, le théorème de K. Friedrich: «Im 3. dimensionalen Raum stimmen der einknotige statisch beliebig unbestimmte Stabverband und der zugehörige überbestimmte Kugelschnitt völlig überein» (K. Friedrich écrit «Bogenschnitt»). Bien entendu, les poids des barres et des côtés sont les mêmes à un facteur près.

Des équations normales, sous forme implicite, sont:

$$[pav] = 0 \quad [pbv] = 0 \quad [pcv] = 0 \quad \ldots$$

On possède tous les éléments permettant de former la matrice dite de *rigidité* qui est celle aux coefficients des équations normales. On entre dans l'étape des calculs qui peut être confiée aux ingénieurs-géomètres et du génie-rural. La matrice de rigidité de la structure ne *dépend pas du cas de charge considéré,* ce qui lui confère de l'intérêt, surtout quand on procède à son inversion par voie électronique d'où l'on déduit les coefficients de poids des inconnues.

Quant aux termes absolus f, ils sont fournis en général par les staticiens.

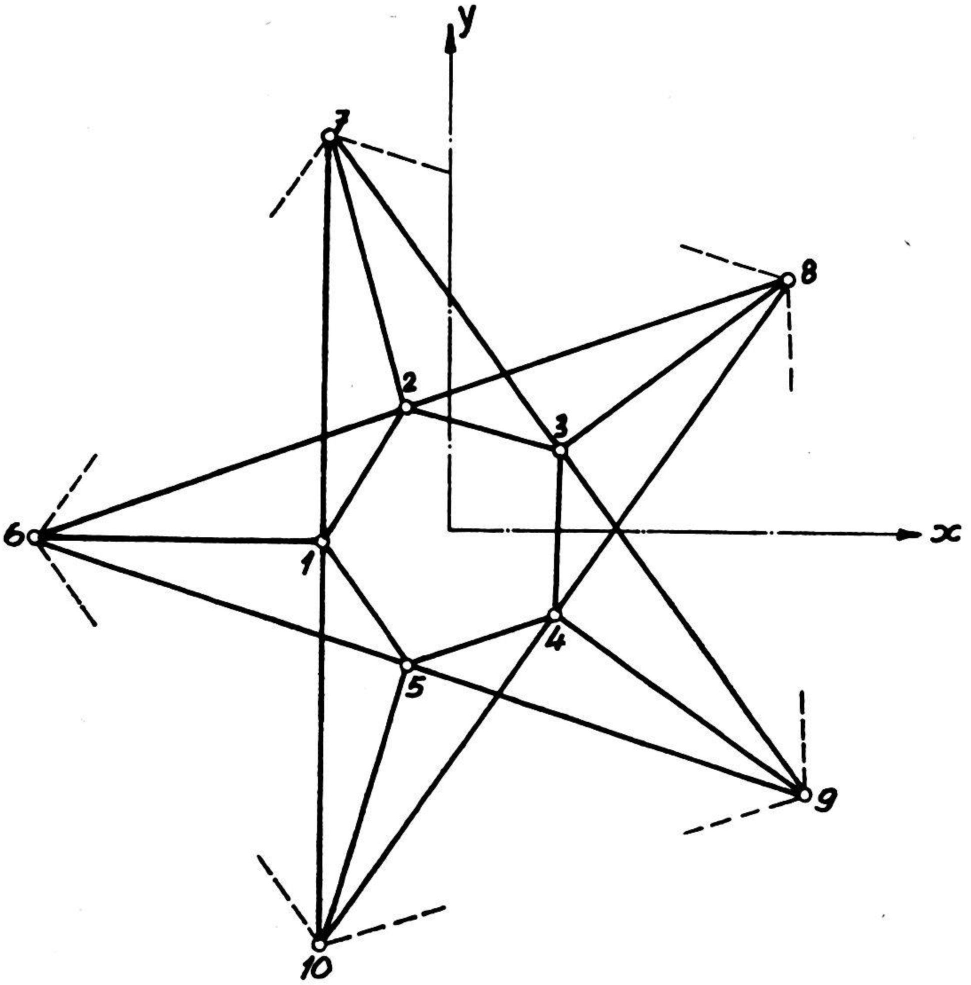
Cas concret[1]. Bien que revêtant un caractère en partie didactique, ce cas est spécial, car il comporte 30 barres dont 15 surabondantes, 15 inconnues, 10 nœuds dont 5 libres. Ci-dessous sont les tableaux des coordonnées et poids des barres p_{gh}:

Nœuds libres	x	y	z	Nœuds	x	y	z	$g=$ \ $h=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$-0{,}62$	0	$+1{,}3$	6	$-2{,}00$	0	0	1		0,7				1,15	1	0,8	0,8	1
2	$-0{,}19$	$+0{,}59$	$+1{,}3$	7	$-0{,}62$	$+1{,}90$	0	2			0,7			1	1,15	1	0,8	0,8
3	$+0{,}50$	$+0{,}365$	$+1{,}3$	8	$+1{,}62$	$+1{,}18$	0	3				0,7		0,8	1	1,15	1	0,8
4	$+0{,}50$	$-0{,}365$	$+1{,}3$	9	$+1{,}62$	$-1{,}18$	0	4					0,7	0,8	0,8	1	1,15	1
5	$-0{,}19$	$-0{,}59$	$+1{,}3$	10	$-0{,}62$	$-1{,}90$	0	5	0,7					1	0,8	0,8	1	1,15

Unité de mesure arbitraire — Dimension donnée par ES/l

Déformation quadratique moyenne $m_0 : m_0^2 \cong [pvv] : 15$ (provisoire $m_0^2 = 1$, numérique)

Les 30 barres ne sont pas toutes tracées sur la figure.



Pour des structures simples, la collaboration du staticien n'est pas indispensable; en principe les barres coupées fictivement seront celles dont les poids sont faibles.

Cette étape des calculs est moins familière aux staticiens qu'aux ingénieurs-géomètres et à ceux du génie-rural; la formation des coefficients [*paa*], [*pbb*] ... [*pab*], [*pac*], [*pbc*] ... est connue. Ce sont les éléments diagonaux et non diagonaux de la matrice de rigidité de la structure hyperstatique; de nombreux éléments non diagonaux, surtout ceux voisins de la diagonale, devraient avoir peu d'influence.

Matrice de rigidité
(*dérivées de l'énergie*)

2,115	0	0	−0,24	−0,335	0	...
	2,55	0	−0,335	−0,46	0	...
		1,51	0	0	0	...
			2,51	+0,13	0	...
				2,12	0	...
					1,51	...

Matrice inverse
(*calcul électronique EPFL*)

0,51	0	0	+0,05	+0,08	0	...
	0,44	0	+0,06	+0,09	0	...
		0,66	0	0	0	...
			0,44	−0,02	0	...
				0,51	0	...
					0,66	...

[1] Ce cas concret faisait partie de publications qui furent subsidiées par le Fonds national de la recherche.

Pour le nœud 1, les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde de déformation (Formänderungsellipsoid) sont proportionnelles à:

$$\sqrt{0{,}51} : \sqrt{0{,}44} : \sqrt{0{,}66} = 0{,}71 : 0{,}66 : 0{,}81\,,$$

ce qui n'est pas défavorable.

Contrôle par les poids a posteriori P. Ce contrôle est le bienvenu en statique:

	$1 : P =$
5 barres $p = 0{,}7$	$5 \times 0{,}7 \times 0{,}630 = 2{,}21$
5 barres $p = 1{,}15$	$5 \times 1{,}15 \times 0{,}581 = 3{,}35$
10 barres $p = 1$	$10 \times 1 \times 0{,}512 = 5{,}12$
10 barres $p = 0{,}8$	$10 \times 0{,}8 \times 0{,}533 = 4{,}27$
	Somme $p/P = 14{,}95$

(théoriquement 15; calcul à la règle).

Une fois le calcul terminé, on peut, en fonction des v, déterminer les efforts axiaux T (Stabkräfte) dans les barres. L'étude de ce problème offre un intérêt théorique mais ouvre aussi des perspectives réjouissantes quant à son application.

Littérature

[1] *Friedrich, K.:* Richtigkeit der Methode der kl. Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet (Zeitschrift für Vermessungswesen, 1943).
[2] *Stüssi, F.:* Baustatik II (Birkhäuser, Basel).
[3] *Ansermet, A.:* Berechnung von Fachwerkkuppeln (traduction chaire statique ETH).

Korrektur

Im Artikel *A. Ansermet* «Sur une notion nouvelle: la matrice de rigidité», erschienen im Februar 1970, muß folgende Korrektur angebracht werden: auf Seite 22, Abschnitt «Avant de poursuivre, il convient d'énumerer les notations en faisant abstraction des indices», muß es heißen:

Pour la barre $(x, y, z) - (x', y', z')$ on a:
$$-f + v = a\,(dx - dx') + b\,(dy - dy') + c\,(dz - dz')$$
(poids p) $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad [pvv] = \text{minimum}$

Buchbesprechung

G. Krauss, W. Beck, G. Appelt und H. Knorr: Die amtlichen topographischen Kartenwerke der Bundesrepublik Deutschland. Heft 10 der Schriftenreihe «Sammlung Wichmann, Neue Folge». Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. H. Draheim. Kartoniert DM 8.50. Verlag C. F. Müller, Postfach 210729, 75 Karlsruhe 21.

Daß Bücher ihre eigenen Schicksale haben, diese Erfahrung machten bereits die Schriftsteller des Altertums. Nicht weniger eigenartig sind oft die Schicksale von Kartenwerken. So können ausgezeichnete Kartenwerke vollständig in Vergessenheit geraten, weil der Staat, der sie erstellen ließ, in einen anderen aufging, wie dies etwa bei Sardinien-Piemont der Fall war. Aber selbst dann, wenn der gleiche Staat ein Kartenwerk im Laufe der Jahrzehnte aufbaut, tragen die zuerst erschienenen Blätter einen anderen Charakter als die später erschienenen. Gründe dafür sind vielleicht Verbesserungen in den Aufnahme- und Reproduktionsmethoden. Nicht selten jedoch erhält ein Kartenwerk im Laufe der Zeit eine andere Zweckbestimmung. Dienten beispielsweise die früheren deutschen Karten 1:25000 und 1:50000 in erster Linie militärischen Zwecken, so liegt ihr wichtigstes Anwendungsgebiet heute in der Planung. An das gleiche Werk werden heute demnach andere Anforderungen in bezug auf Karteninhalt und in bezug auf Kartengenauigkeit gestellt als vor 100 Jahren, obwohl der Maßstab der gleiche blieb. Ein Kartenwerk, dessen Schaffung meistens Jahre oder vielleicht Jahrzehnte in Anspruch nimmt, kann daher nicht einheitlich sein. In der Schweiz waren es die Siegfried- und die Dufourkarte nicht, und beim Betrachten eines Blattes der Landeskarte in Maßstäben 1:25000 und 1:50000 wird man ohne Mühe feststellen können, ob es zu den frühen oder späten Ausgaben gehört. Noch viel weniger einheitlich ist zufolge seiner sehr unterschiedlichen Entstehung der Übersichtsplan. Will man daher ein Kartenwerk in bezug auf Inhalt und Genauigkeit beurteilen, so muß unbedingt der Entstehung Rechnung getragen werden. In den meisten Fällen stehen jedoch dem Kartenbenützer die «historischen» Unterlagen nicht zur Verfügung und es muß den Landesvermessungsämtern immer wieder nahegelegt werden, dem Benützer von Zeit zu Zeit in Publikationen Aufschluß über den Aufbau und den Stand eines Landeskartenwerkes zu geben.

Das vorliegende Büchlein verfolgt diesen Zweck. Es entstand zunächst als Heft 1/1969 der «Allgemeinen Vermessungs-Nachrichten», und der