

# Einiges über die Fehlerfortpflanzung bei Absteckungen mit Winkeln

Autor(en): **Schmutter, B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **68 (1970)**

Heft 3

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-223658>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 3 · LXVIII. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. März 1970

DK 528.115:528.486:513

## Einiges über die Fehlerfortpflanzung bei Absteckungen mit Winkeln

*B. Schmutter*

### *Résumé*

Au début, la géométrie du problème est discutée. Les formules concernant la corrélation entre les points voisins sont déduites. Les formules sont valables pour le calcul des éléments de piquetage et le calcul de propagation des erreurs. En plus, une discussion des erreurs est formulée, et l'influence des mesures de cordes et des directions sur l'exactitude des coordonnées est démontrée.

### *1. Einleitung*

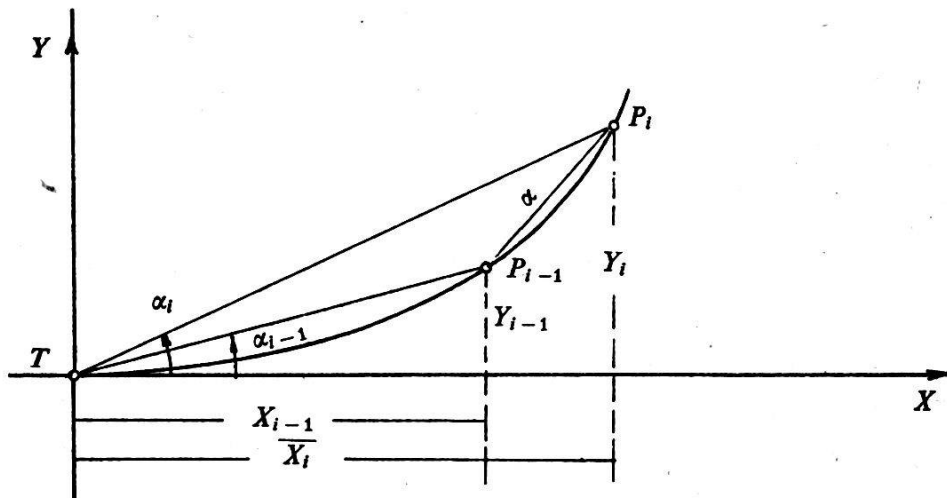
Die Fehlerfortpflanzung längs gemessenen Strecken wurde bis jetzt nur für Polygone umfassend untersucht. Auf die Genauigkeit anderer Absteckungsmethoden wurde in der Fachliteratur der Vermessungskunde nur selten eingegangen. Dieser Aufsatz versucht einige dieser Probleme zu behandeln.

Das Endresultat einer Genauigkeitsuntersuchung sind Formeln für Genauigkeitsabschätzungen, das heißt die Berechnung mittlerer Fehler von Koordinaten, oder die Bestimmung von Fehlerellipsen für jeden Punkt entlang der abgesteckten Kurven. Solche Formeln können dann abgeleitet werden, wenn der Zusammenhang zwischen den Koordinaten  $X$ ,  $Y$  eines beliebigen Punktes auf der Kurve und den Bestimmungsgrößen dieses Punktes bekannt sind.

### *2. Die Geometrie des Problems*

Ein Punkt  $P_i$  auf einer Kurve sei bestimmt durch den Schnitt einer Geraden mit einem Kreis. Der Strahl gehe durch einen Anfangspunkt (im allgemeinen ein Berührungspunkt an den Kreis), und den Punkt  $P_i$ . Der Kreis gehe durch den vorangehenden Punkt  $P_{i-1}$  und sei definiert durch einen Radius  $a$ , der gleich ist der Sehne, welche die zwei aufeinanderfolgenden Punkte  $P_{i-1}$   $P_i$  verbindet (siehe Figur 2.1).

Die Kurve wird in Beziehung gebracht mit einem Koordinatensystem  $X, Y$ , dessen Ursprung der Berührungspunkt  $T$  ist und dessen  $X$ -Achse mit der Tangente an den Kreis zusammenfällt.



Figur 2.1

Die Beziehungen zwischen den gemessenen Werten  $\alpha_i, a_i$  und den Koordinaten eines Punktes  $P_i$  sind:

$$\begin{aligned} Y_i &= \tan \alpha_i X_i = K_i X_i \\ a^2 &= (X_i - X_{i-1})^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Das System (2.1) kann auch in folgende Form umgeschrieben werden:

$$X_i = \frac{(K_i Y_{i-1} + X_{i-1}) + \sqrt{(K_i Y_{i-1} + X_{i-1})^2 - (1 + K_i^2)(X_{i-1}^2 + Y_{i-1}^2 - a^2)}}{1 + K_i^2} \quad (2.2)$$

$$Y_i = K_i X_i$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist wie folgt definiert:

$$\Delta = (1 + K_i^2) a^2 - (K_i X_{i-1} - Y_{i-1})^2 \quad (2.3)$$

Entsprechend der Figur 2.1 kann man auch schreiben:

$$K_i X_{i-1} - Y_{i-1} = a \frac{\sin \delta}{\cos \alpha_i} \quad (2.4)$$

wo  $\delta$  der Winkel zwischen der Geraden  $T P_i$  und der Sehne ist. Demnach nimmt die Formel (2.3) die folgende Form an:

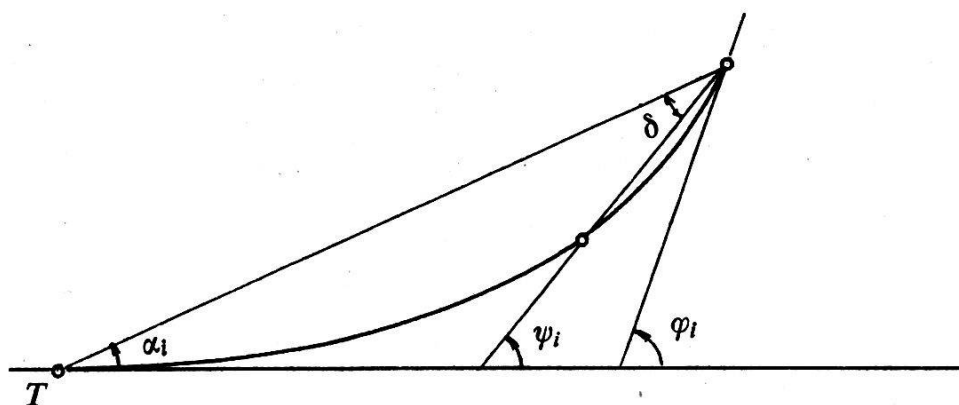
$$\Delta = \frac{a^2 \cos^2 \delta}{\cos^2 \alpha_i} \quad (2.5)$$

Das Einsetzen des Wertes  $\Delta$  gemäß der Formel (2.5) in die Formel (2.2) ergibt:

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_i Y_{i-1} + \cos^2 \alpha_i X_{i-1} + \cos \alpha_i \cos \delta a \\ Y_i &= \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_i X_{i-1} + \sin^2 \alpha_i Y_{i-1} + \sin \alpha_i \cos \delta a \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Ausdrücke (2.6) zeigen die Abhängigkeit zwischen den Koordinaten aufeinanderfolgender Punkte, die von der Absteckungsmethode herrührt. Diese Formeln sind für die Genauigkeitsuntersuchung besonders geeignet. Der Winkel  $\delta$  in den obigen Formeln hängt von der Art der Kurve ab. Hier wird nur die Klothoide behandelt; die Resultate der Überlegungen sind jedoch auch für den Kreis gültig.

Für die Klothoide wird der Winkel  $\delta$  (siehe Figur 2.2):



Figur 2.2

$$\delta = \psi_i - \alpha_i = \psi_i - \frac{\varphi_i}{3} = \arcsin \left( \frac{Y_i - Y_{i-1}}{a} \right) - \frac{\varphi_i}{3} \quad (2.7)$$

Das Argument der arc-sin-Funktion und der Winkel  $\varphi_i$  ergeben sich aus den Eigenschaften der Klothoide. Mit guter Annäherung kann man die Größe  $\delta$  wie folgt ausdrücken:

$$\delta = 2 \alpha_i - 3 \alpha_1, \quad (2.8)$$

wo  $\alpha_1$  der Winkel für die Absteckung des ersten Punktes ist.

Um die Genauigkeitsuntersuchung zu vereinfachen, nehmen wir eine weitere Approximation vor:  $\cos \delta \cong \cos \alpha_i$ . Diese Annäherung ist aus zwei Gründen gestattet: Erstens sind beide Winkel  $\delta$  und  $\alpha_i$  klein, und zweitens ist  $\cos \delta$  nur mit der Sehne zu multiplizieren. Mit dieser Approximation nehmen die Ausdrücke (2.6) eine einfachere Form an:

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_i Y_{i-1} + \cos^2 \alpha_i (X_{i-1} + a) \\ Y_i &= \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_i (X_{i-1} + a) + \sin^2 \alpha_i Y_{i-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Trotz den gemachten Approximationen ist das Resultat genügend genau, um diese Ausdrücke auch für Berechnungen von Absteckungsdaten anwenden zu können. Das folgende Beispiel illustriert die Schärfe der Formeln.

Gegeben: Länge der Klothoide  $L = 100,0$  m  
 Radius des Kreises  $R = 400,0$  m  
 Länge der Sehne  $a = 10,0$  m

Die Richtungswinkel  $\alpha_i$  sind entsprechend der Klothoidengleichung definiert.

*Tafel 2.1: Vergleich zwischen den Koordinaten laut Formeln (2.9) und den exakten Klothoidenkoordinaten*

Punkte	Koordinaten entsprechend der Formel (2.9)		Exakte Klothoiden Koordinaten		Differenzen	
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	dX (m)	dY (m)
1	10,000	0,004	10,000	0,004		
2	20,000	0,033	20,000	0,033		
3	30,000	0,112	30,000	0,112		
4	39,999	0,267	39,999	0,267		
5	49,996	0,521	49,995	0,521	0,001	
6	59,990	0,900	59,998	0,900	0,002	
7	69,979	1,429	69,974	1,429	0,005	
8	79,960	2,133	79,949	2,132	0,011	0,001
9	89,929	3,036	89,908	3,035	0,021	0,001
10	99,881	4,164	99,844	4,162	0,037	0,002

### 3. Anwendung der Formeln (2.9) für die Analyse der Fehlerfortpflanzung

Jede der Formeln (2.9) besteht aus zwei Gliedern. Das Glied, welches die Y-Koordinate enthält, ist klein im Vergleich zu dem X-Glied. Dies kann durch folgende Beziehungen gezeigt werden:

$$\frac{\sin^2 \alpha_i Y_{i-1}}{\frac{1}{2} \sin 2 \alpha_i (X_{i-1} + a)} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2 \alpha_i Y_{i-1}}{\cos^2 \alpha_i (X_{i-1} + a)} = \tan \alpha_i \frac{Y_{i-1}}{X_{i-1} + a} < \tan \alpha_i \tan \alpha_{i-1} \quad (3.1)$$

Die Größenordnung des Produktes  $\tan \alpha_i \tan \alpha_{i-1}$  ist im Grenzfalle 0,001; daher können die kleinen Glieder in den Formeln (2.9) vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} X_i &= \cos^2 \alpha_i (X_{i-1} + a) \\ Y_i &= \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_i (X_{i-1} + a) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wenn die Formel für die  $X$ -Koordinate wiederholt angewendet wird, ergibt sich:

$$X_i = a_1 \prod_1^i \cos^2 \alpha_k + a_2 \prod_2^i \cos^2 \alpha_k + \prod_3^i \cos^2 \alpha_k + \dots a_i \cos^2 \alpha_i \quad (3.3)$$

Das Differential  $dX_i$  ist entsprechend der Formel (3.3):

$$\begin{aligned} dX_i &= \prod_1^i \cos^2 \alpha_k da_1 + \prod_2^i \cos^2 \alpha_k da_2 + \dots \cos^2 \alpha_i da_i \\ &\quad - 2 a_1 \tan \alpha_1 \prod_1^i \cos^2 \alpha_k d\alpha_1 \\ &\quad - 2 a_2 \tan \alpha_2 \left( \prod_1^i \cos^2 \alpha_k + \prod_2^i \cos^2 \alpha_k \right) d\alpha_2 \\ &\quad - 2 a_i \tan \alpha_i \left( \prod_1^i \cos^2 \alpha_k + \prod_2^i \cos^2 \alpha_k + \dots \cos^2 \alpha_i \right) d\alpha_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wegen der kleinen Winkel können alle Kosinuse im Ausdruck (3.4) gleich 1 und die Tangenswerte gleich den Winkeln selbst gesetzt werden. Wenn man zudem beachtet, daß alle Sehnen einander gleich sind, so ergibt sich für das Differential  $dX$ :

$$dX_i = \sum da_i - 2 a \sum i \alpha_i d\alpha_i \quad (3.5)$$

Der entsprechende Ausdruck für  $dY$  ist:

$$dY_i = \tan \alpha_i dX_i + \frac{X_i}{\cos^2 \alpha_i} d\alpha_i \quad (3.6)$$

Das zweite Glied des Produktes  $\tan \alpha_i dX_i$  ist eine Summe von kleinen Elementen, deren jedes eine Größenordnung von  $\alpha^2 d\alpha$  hat. Es ist leicht einzusehen, daß diese Summe vernachlässigt werden kann. Es ergibt sich dann für das Differential  $dY$  der Ausdruck:

$$dY_i = \alpha_i \sum da_i + X_i d\alpha_i \quad (3.7)$$

Bevor man von Differentialen zu mittleren Fehlern übergeht, ist es nötig, das Absteckungsverfahren zu beschreiben. Die abgesteckte Kurve ist im Felde mit Pfählen markiert. Es ist klar, daß Pfähle keine scharf definierte Punkte sind und daß sie für die Beurteilung der Absteckungsgenauigkeit nicht geeignet sind. Scharf definierte Punkte werden leicht durch feine, auf die Pfähle getragene Striche erreicht. Die Richtungsmessung kann dann so ausgeführt werden, daß der für die Markierung verwendete Bleistift auf dem Pfahl aufgesetzt wird und so zur Zielung dient. Es muß auch betont werden, daß bei den kurzen Zielweiten bei Absteckungsarbeiten die Genauigkeit der Richtungsmessung hauptsächlich von der Größe und der Schärfe des Zieles abhängt. Nur wenn die Ziele klar definiert sind, kann eine einheitliche Genauigkeit aller Richtungen angenommen werden.

Was die Sehnen betrifft, ist es erwünscht, daß ihre Bestimmungsgenauigkeiten derjenigen der Richtungen entsprechen. Wegen der kurzen Abstände kann man einen mittleren Fehler der Richtungsmessung von 2° annehmen, und daher kann der mittlere Fehler der Bestimmung der Sehnen zu einigen Millimetern angenommen werden. Das wird nur dann erreicht, wenn die Sehnen zwischen feinen Strichen bestimmt sind.

Somit werden von den Formeln (3.6) und (3.7) die Ausdrücke für die mittleren Fehler der Koordinaten

$$\begin{aligned} m_{X_i}^2 &= i m_a^2 + 4 a^2 m_\alpha^2 (\alpha_1^2 + 2^2 \alpha_2^2 + 3^2 \alpha_3^2 + \dots i^2 \alpha_i^2) \\ m_{Y_i}^2 &= i \alpha_i^2 m_a^2 + X_i^2 m_{\alpha_i}^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Obwohl die Annäherung, die wir bis jetzt angenommen haben (wegen der größeren Richtungswinkel), nicht so streng für den Kreis wie für die Klothoide gelten, sind die Formeln (3.8) für die Untersuchung der Fehlerfortpflanzung gut geeignet, und sie können sowohl für die Klothoide als auch für den Kreis angewandt werden. Alle Winkel  $\alpha_i$  können mittels des Winkels  $\alpha_1$  ausgedrückt werden (wo  $\alpha_1$  zur Absteckung des ersten Punktes dient).

Für die Klothoide besteht die Beziehung  $\alpha_i = i^2 \alpha_1$ , und für den Kreis hat man  $\alpha_i = i \alpha_1$ . Werden diese Werte in die Formel (3.8) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} m_{X_i}^2 &= i m_a^2 + 4 a^2 \alpha_1^2 m_\alpha^2 (1^6 + 2^6 + 3^6 + \dots i^6) \text{ Klothoide} \\ m_{X_i}^2 &= i m_a^2 + 4 a^2 \alpha_1^2 m_\alpha^2 (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots i^4) \text{ Kreis} \\ m_{Y_i}^2 &= i^5 \alpha_1^2 m_a^2 + X_i^2 m_{\alpha_i}^2 \text{ Klothoide} \\ m_{Y_i}^2 &= i^3 \alpha_1^2 m_a^2 + X_i^2 m_{\alpha_i}^2 \text{ Kreis} \end{aligned} \quad (3.9) \quad (3.10)$$

Die Formeln (3.9) und (3.10) können wie folgt interpretiert werden: Der mittlere Fehler der Abszisse hängt hauptsächlich von der Genauigkeit der Sehnenmessung ab. Der Beitrag der Richtungsmessung [das zweite Glied in Formel (3.9)] erreicht für die letzten Punkte der Kurve (dort, wo  $i$  groß wird) einen bedeutenden Wert.

Der mittlere Fehler der Ordinate hängt hauptsächlich von der Richtungsmessung ab. Auch hier nimmt das erste Glied der Formel (3.10) nur dann einen meßbaren Wert an, wenn  $i$  groß wird, das heißt für die letzten Punkte auf der Kurve.

Der praktische Schluß, den man aus der letzten Behauptung ziehen kann, ist folgender: Wenn es auf die Form der Kurve ankommt, muß die Genauigkeit der Richtungsmessung besonders beachtet werden, weil die Ordinaten in diesem Fall von entscheidender Bedeutung sind.

Das untenstehende Diagramm illustriert die Folgerungen der Formel (3.9). Das Diagramm stellt den mittleren Fehler der Abszissen entlang der abgesteckten Klothoide dar. Die untere Kurve repräsentiert nur den Anteil der Sehnenmessung, und die unterbrochenen Kurven stellen die

Summen der beiden Glieder der Formel dar. Für die Berechnung der Kurven sind folgende Werte angenommen worden:  $m_a = 3 \text{ mm}$ ,  $m_\alpha = 2^\circ$ ,  $a = 10,0 \text{ m}$ ,  $L = 100,0 \text{ m}$ . Die Radien sind auf dem Diagramm angegeben.

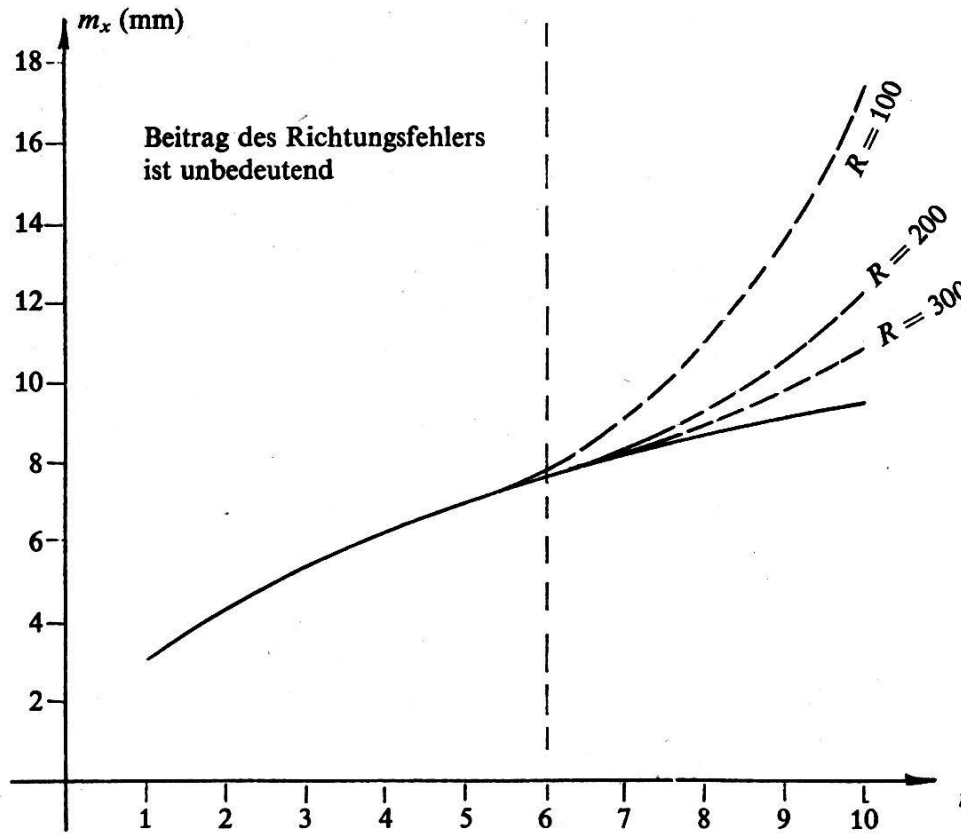


Diagramm 3.1

#### 4. Zusammenfassung

Am Anfang wird die Geometrie des Problems diskutiert. Formeln, die die gegenseitige Abhängigkeit der Koordinaten benachbarter Punkte auf der Kurve ausdrücken, werden abgeleitet. Diese Formeln sind sowohl für die Behandlung der Fehlerfortpflanzung als auch für die Berechnung von Absteckungsdaten (für die Klothoide) gültig.

Im weiteren wird eine Fehlerdiskussion durchgeführt. Es wird auch gezeigt, wie die Genauigkeit der Sehnens- und Richtungsmessung die Koordinaten beeinflusst.