Sur l'analogie entre les calculs de réseaux télémétriques et les systèmes hyperstatiques

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **69 (1971)**

Heft 2

PDF erstellt am: **05.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-224308

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

[4] *Gleinsvik, P.:* Experimentelle Prüfung von Auswertemethoden in der Meßtechnik durch Simulation. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1970, Heft 10.

[5] *Grossmann, W.:* Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, 3. Aufl. Berlin/Heidelberg/New York 1969.

[6] *Lilly, J. E.:* Least squares adjustments of dissimilar quantities. Empire Survey Review, Vol. XVI, No. 121, 1961.

[7] *Linkwitz, Klaus:* Über den Einfluß verschiedener Gewichtsannahmen auf das Ausgleichungsergebnis bei bedingten Beobachtungen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1961, Heft 6, 7 und 9.

[8] *Rainsford, H. F.:* Combined adjustments of angles and distances. Survey Review, Vol. XIX, No. 150, 1968.

[9] *Rinner, K.:* Entfernungsmessungen mit lichtelektrischen und elektrischen Geräten im Testnetz Graz. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 123, V. Internationaler Kurs für geodätische Streckenmessung 1965 in Zürich, München 1966.

[10] *Wolf, H.:* Die Ausgleichung von Streckennetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1958, Heft 10.

DK 528.35.063:531,2

Sur l'analogie entre les calculs de réseaux télémétriques et les systèmes hyperstatiques

par A. Ansermet

Zusammenfassung

Es kann die Berechnung eines «unbestimmten» Fachwerksystems mit der Ausgleichung eines Streckennetzes verglichen werden. In den Verbesserungsgleichungen sind Absolutglieder. In einer neuen Lösung, welche eine bedeutende Rolle spielt, sind keine Absolutglieder in den Gleichungen, welche die elastischen Stablängenänderungen ausdrücken. Eine Wahl zwischen den beiden Lösungen ist nicht leicht.

Résumé

Une comparaison peut être établie entre le calcul de réseaux télémétriques et de systèmes articulés hyperstatiques. Les équations amélioratrices contiennent des termes absolus. Il n'y a pas de termes absolus dans les équations exprimant les variations de longueurs des barres; une telle solution est nouvelle et joue un rôle important. Un choix n'est pas facile à faire entre ces deux solutions.

Généralités

Dans le numéro de février dernier de la présente Revue quelques lignes furent consacrées à la matrice dite de rigidité (Steifigkeitsmatrix); les ingénieurs-géomètres et du génie rural sont familiarisés avec ces calculs et pourraient apporter une collaboration utile lors du calcul de systèmes hyperstatiques. La notion d'ellipsoîde d'erreur subsiste mais avec l'appellation: «ellipsoîde de déformation des nœuds». Dans la littérature statique de langue allemande on dit tantôt «Verschiebungsellipsoid» ([3], p. 536), tantôt «Formänderungsellipsoid».

En ce qui concerne les deux solutions mentionnées ci-dessus, la première donne lieu à la formation d'un système dit fondamental (Grundsystem, voir [2]). C'est ce système qui fournit les termes absolus des équations amélioratrices ou aux déformations (Verknüpfungsgleichungen, voir [3]).

Dans la solution sans termes absolus on ne forme pas de système fondamental ni de dérivées de l'énergie.

Avant de poursuivre énumérons quelques notations (indices laissés du côté):

En coupant les barres surabondantes on obtient le système fondamental

l, S	Longueurs et sections transversales des barres
E	Coefficients d'élasticité
Dx, Dy, Dz	Variations coordonnées des nœuds (sans coupures)
dx, dy, dz	Variations coordonnées des nœuds (après coupures)
a, b, c ...	Coefficients de ces variations inconnues
f	Termes absolus équations aux déformations
p	Poids des barres (proportionnels à ES/l et $^1/m$)
P	Poids des barres à posteriori
v	Variations longueurs des barres ($[pvv]$ minimum)
m	Modules des barres (proportionnels à $^1/p$)
T	Efforts axiaux dans les barres (Stabkräfte) $v = mT$

$$M^2 \cong \frac{[pvv]}{\text{nombre barres surabondantes}} \qquad M = \text{déformation moyenne quadratique relative à l'unité de poids}$$

Il y a donc deux formes d'équations aux déformations:

Pour la barre reliant les nœuds libres (x, y, z) et $(x'\ y'\ z')$

1) $v = a\,(dx - dx') + b\,(dy - dy') + c\,(dz - dz') + f$

2) et $v = a\,(Dx - Dx') + b\,(Dy - Dy') + c\,(Dz - Dz') = mT$

Théoriquement les coefficients a, b, c ne sont pas rigoureusement les mêmes pour 1) et 2) mais bien pratiquement ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$). C'est la chaire de statique de Lausanne (voir [1]) qui eut la priorité pour la solution 2); celle-ci, qui est à la base du mode de calcul STRESS, présente certains avantages, mais la solution avec coupures est aussi actuelle. Le mieux est d'appliquer les deux méthodes à une même structure avant de porter un jugement.

On verra que les équations dont les coefficients constituent les éléments de la matrice de rigidité pouvaient être obtenues à partir des conditions d'équilibre des nœuds ou à partir du minimum de l'énergie potentielle (voir [5]). Traitons un cas concret, à certains égards de caractère didactique.

Calcul d'une coupole

L'exemple choisi porte sur une coupole à 4 nœuds libres, 4 nœuds fixes; 22 barres dont 10 surabondantes, 12 variations inconnues des coordonnées.

Un caractère spécial sera conféré à cet exemple: successivement ou simultanément deux systèmes d'axes de coordonnées sont choisis x, y, z et x', y', z', ce qui permet des contrôles et surtout la propriété connue d'invariance relative aux ellipsoïdes de déformation des nœuds sera vérifiée: La somme $Qxx + Qyy + Qzz$ est un invariant pour ces trois coefficients de poids des inconnues (quadratiques), les non-quadratiques étant Qxy, Qxz, Qyz. Cette propriété d'invariance traduit une propriété géométrique connue.

La structure choisie est définie par les valeurs suivantes:

Nœuds libres	x	y	z	Nœuds libres	x'	y'	z'	*Unité de mesure arbitraire*
1	+1	0	1	1	+0,707	—0,707	1	
2	0	—1	1	2	—0,707	—0,707	1	
3	—1	0	1	3	—0,707	+0,707	1	
4	0	+1	1	4	+0,707	+0,707	1	

Nœuds fixes	x	y	z	Nœuds fixes	x'	y'	z'
5	+2	0	0	5	+1,414	—1,414	0
6	0	—2	0	6	—1,414	—1,414	0
7	—2	0	0	7	—1,414	+1,414	0
8	0	+2	0	8	+1,414	+1,414	0

Poids pi des barres ($i = 1, 2 \dots 22$)

Nœuds $i =$	1	2	3	4	5	6	7	$8 = i$
1		0,80	0,70		1,27	1,00	1,00	1,00
2			0,80	0,70	1,00	1,27	1,00	1,00
3				0,80	1,00	1,00	1,27	1,00
4	0,80				1,00	1,00	1,00	1,27

Coefficients des inconnues

	Coordonnées x, y, z				Coordonnées x' y' z'		
Barres	a	b	c	Barres	a	b	c
1–5	—0.707	0,00	+0.707	1–5	—0.5	+0.5	+0.707
1–6	+0.408	+0.815	+0.408	1–6	+0.866	+0.289	+0.408
1–7	+0.949	0.00	+0.316	1–7	+0.671	—0.671	+0.316
1–8	+0.408	—0.815	+0.408	1–8	—0.289	—0.866	+0.408
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

Solution par le calcul du système fondamental (Grundsystem)

Sur les 22 barres il y a lieu d'en couper 10, ce qui laisse subsister un système statiquement déterminé; cette étape des calculs, notamment le choix des barres coupées, est plutôt de la compétence des staticiens. On obtient alors les termes absolus *f*, et le rôle de l'ingénieur-géomètre commence. L'analogie avec le calcul de réseaux télémétriques est manifeste. Les éléments de la matrice de rigidité sont fournis par les équations normales.

La formation des matrices de rigidité par rapport aux axes de coordonnées x, y, z puis x', y', z' donne lieu à des constatations intéressantes; dans le premier cas les coefficients de poids non-quadratiques sont mieux éliminés, ce que l'on s'efforce de réaliser pour des raisons faciles à comprendre. La structure symétrique justifie ce changement de coordonnées; dans les réseaux télémétriques c'est exclu.

Matrices de rigidité

Avant rotation des axes x et y

Nœuds 1 et 2

3,37	0	0	—0,40	—0,40	0—
	2,14	0	—0,40	—0,40	0—
		1,07	0	0	0—
			2,14	0	0—
	symétrique			3,37	0—
					1,07

Après rotation (x', y', z')

Nœuds 1 et 2

2,75	—0,62	0	—0,80	0	0—
	2,75	0		0	0—
		1,07	0	0	0—
			2,75	+0,62	0—
	symétrique			2,75	0—
					1,07

Matrices inverses (Calcul par Centre électronique EPFL)

0,339	0	0	+0,079	+0,025	0—
	0,535	0	+0,102	+0,079	0—
		0,935	6	0	0—
			0,535	0	0—
	symétrique			0,339	0—
					0,935

Matrices inverses (Calcul par Centre électronique EPFL)

0,438	+0,099	0	+0,143	—0,039	0—
	0,438	0	+0,039	+0,015	0—
		0,935	0	0	0—
	symétrique		0,438	—0,099	0—
				0,438	0—
					0,935

Les matrices inverses sont dites aussi de flexibilité (Federungsmatrix).

Propriété d'invariance. Celle-ci est manifeste

$$0{,}339 + 0{,}535 + 0{,}935 = 0{,}438 + 0{,}438 + 0{,}935 = 1{,}81$$

Cette propriété subsiste si les trois coefficients quadratiques varient. Cela résulte du fait que les trièdres trirectangles tangents aux ellipsoïdes de déformation des nœuds ont leurs sommets sur des sphères dites orthoptiques.

Poids à postériori P. Ils constituent un contrôle bienvenu pour les calculs:

	p.	p/P	$p{:}P$
Arêtes supérieures (1–2, 2–3, 3–4, 4–1)	0,8	0,472 × 4	1,89
Diagonales face supérieure (1–3, 2–4)	0,7	0,358 × 2	0,716
Arêtes (1–5, 2–6, 3–7, 4–8)	1,27	0,810 × 4	3,24
Diagonales faces latérales (1–6, 2–5 ...)	1,0	0,572 × 8	4,576
Autres liaisons (1–7, 2–8, 3–5, 4–6)	1,0	0,398 × 4	1,59
		22	
Ces P sont les poids des binômes $(-f + v)$	somme $p{:}P$ = (calcul fait à la règle)		12,01
En général les poids p faibles sont amplifiés dans une plus forte mesure.	(12 inconnues)		

Il faudrait encore déterminer la déformation quadratique moyenne M relative à l'unité de poids; cet élément est fonction du nombre de barres surabondantes, ici 10, des poids p, des corrections v. Ces dernières nécessitent la connaissance des termes absolus f. Cette étape des calculs est connue ainsi que les ellipsoïdes de déformation des nœuds dont la forme dépend des matrices inverses ci-dessus. L'analogie avec les réseaux télémétriques se confirme. A l'échelle près on peut déterminer les ellipsoïdes de déformation des nœuds indépendamment des forces extérieures, car les termes absolus f n'interviennent pas pour la formation des matrices de rigidité. Provisoirement on posera $M = \pm 1$.

Solution sans coupures de barres surabondantes

Elle est actuelle mais sans compensation, sans formation de dérivées de l'énergie.

Les éléments à déterminer sont les 12 variations de coordonnées Dx, Dy, Dz des 4 nœuds libres 1, 2, 3, 4 puis les 22 forces axiales T (Stabkräfte) dans les 22 barres qui interviennent dans les équations par leurs composantes et enfin les 4 réactions relatives aux nœuds 5, 6, 7, 8.

Vis-à-vis de ces inconnues on aura les équations suivantes: 22 équations aux déformations de la forme 2), sans termes absolus, linéaires en fonction des variations de coordonnées des nœuds libres, les coefficients a, b, c étant pratiquement les mêmes dans les équations 1) et 2). On pose $v = mT$ où m est le module connu de la barre ($m = 1/ES$).

En outre, en formant les composantes des forces: 24 équations d'équilibre pour les 8 nœuds dont 12 pour les nœuds libres, lesquelles fournissent des termes absolus, et 12 pour les nœuds fixes 5, 6, 7, 8.

En tout 46 équations linéaires pour 46 inconnues (voir [1]), soit 12 variations de coordonnées, 22 forces T dans les barres et 12 composantes des réactions. Parfois on se borne à calculer les 12 variations de coordonnées et les 22 forces axiales; on a 34 équations dont 12 d'équilibre et 22 aux déformations.

Cette solution fut longtemps considérée comme ayant un intérêt théorique plus que pratique; grâce aux calculatrices modernes elle devient actuelle.

Certains résultats sont mieux obtenus par l'une ou l'autre des solutions; éventuellement les praticiens confronteront les résultats en opérant des coupures puis pas de coupures.

En *conclusion* on peut dire que les ingénieurs-géomètres ou du génie rural peuvent utilement collaborer lors de tels calculs.

Littérature

[1] *Mayor, B.:* Statique graphique spatiale (Payot, Lausanne).
[2] *Stüssi, F.:* Baustatik II (Birkhäuser).
[3] *Wolf, H.:* Ausgleichsrechnung ...
[4] *Ansermet, A.:* La matrice de rigidité (Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, N° 2, 1970).
[5] *Dupuis, G.:* Calculs par voie électronique (Publication EPUL N° 104).

DK 528.44:744.423

FIG-Kommission 6, Prag

F. Pfister

Prag, 20. Oktober 1970: Tagung der Mitarbeiter und Korrespondenten der Studiengruppe D, «Leitungskataster»

Prag, 21.–23. Oktober 1970: Symposium «Die technischen Stadtkarten»

Die Kapazität des unterirdischen Raumes der Städte, der noch baulich erschlossen werden kann, ist nicht unbeschränkt; es muß hier geplant werden. Eine genaue und zuverlässige Dokumentation der unterirdischen Anlagen ist erste Voraussetzung für eine seriöse Planung. In den meisten Städten haben die einzelnen Verwaltungen über ihre unterirdischen Leitungen mehr oder weniger genaue, teilweise unvollständige Pläne, deren Qualität ihrem Ursprung entspricht.

In der Schweiz hat die Stadt Basel einen vorzüglichen zentralen Leitungskataster, in der Stadt Bern ist ein zentraler Leitungskataster im Aufbau. Die Stadt Winterthur hat vor einiger Zeit beschlossen, einen Leitungskataster einzuführen. In der Stadt Luzern ist seit 1908 ein Leitungsbüro mit der Doppelfunktion Leitungskataster und Bauleitung in Betrieb. Die immer größer werdenden Wohnagglomerationen, der immer