Zeitschrift: Mensuration, photogrammétrie, génie rural
Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF))
Band: 73-F (1975)
Heft: 1

Artikel: Kartenprojektionen und Computer
Autor: Conzett, Rudolf
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-227511

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kartenprojektionen und Computer

Rudolf Conzett

Einleitung

Mein kurzer Aufsatz ist Herrn Prof. Dr. Eduard Imhof zum 80. Geburtstag gewidmet. Er darf deshalb wohl recht persönlich eingeleitet werden.
Im Jahre 1956 erhielt ich von der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich den Auftrag, eine zweistündige Vorlesung über Kartenprojektionen zu halten. Professor Imhof erläuterte mir seine Intensionen dazu: es sei der Abschnitt «Kartenprojektionen» seiner Vorlesung über Kartographie in eine möglichst geschlossene mathematische Form zu bringen. Diese Vorlesung «Kartenprojektionen» ist mir bis heute geblieben. Sie hat meine zum Teil «computerorientierte» Entwicklung mitgemacht. Im folgenden soll allerdings nur von der Analyse vorgegebener Abbildungen die Rede sein.

Ansatz

Die geschlossene mathematische Form wollte ich erreichen, indem konsequent alle Eigenschaften der Abbildungen möglichst direkt aus den Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} X &= f_{(B,\,L)} \\ Y &= g_{(B,\,L)} \end{aligned} \qquad (1)$$

hergeleitet werden sollten. B und L bedeuten die geographischen Koordinaten auf dem Ellipsoid und X, Y die rechtwinkligen Projektionskoordinaten in der Abbildungsebene.
Offengestanden: anschauliche Betrachtungen über geometrische Bezugsebenen, über Verzerrungen, Verschwenkungen und über Netzbilder schienen mir eher störend als nützlich (was mein Gewissen gelegentlich etwas belastete, wenn ich an meinen «Auftraggeber» dachte).
Es ist bekannt, dass der Formelapparat für die Berechnung der Tissotschen Indikatrix, in der die meisten Eigenschaften der Abbildung enthalten sind, im wesentlichen partielle Differentialquotienten der Projektionskoordinaten nach den geographischen Koordinaten enthält. Aber nur bei ein paar Schulbeispielen war mit den formalen Ableitungen durchzukommen; als methodisch einfacher drängten sich die numerischen Verfahren der Differentiation auf. Was lag näher, als in den Übungsstunden entsprechende Computerprogramme zu erstellen. Und als später die automatischen Plotter zugänglich wurden, konnte die Programmierung auf die automatische Zeichnung der Netzbilder ausgedehnt werden. Die Anschauung kam wieder zu ihrem Recht!

Neue Aspekte

Im folgenden befasse ich mich nur noch mit den sogenannten konformen Abbildungen. Konforme Abbildungen können als Funktion der komplexen Variablen W dargestellt werden.

$$Z = F_{(W)} \qquad (2)$$

Dabei bedeuten:

$Z = X + iY$ — X, Y: Projektionskoordinaten,
$W = Q + iL$ — Q: isometrische Breite,
L: geographische Länge.
F: eine analytische Funktion.

Während man in der klassischen Literatur fast ausschliesslich mit Reihenentwicklungen operierte, kamen in den letzten Jahren immer mehr geschlossene Darstellungen unter anderem mit hyperbolischen Funktionen auf. Die Zeit, die man früher darauf verwenden musste, raffinierte Reihen zu entwickeln, kann man sich heute sparen, weil der Computer solche Funktionen automatisch auswertet. Tabellen, die früher eine massgebende Rolle spielten, werden überflüssig.

Am einfachen Beispiel der konformen Abbildung

$$z = \mathrm{Tgh}\,\frac{w}{2} \; * \qquad (3)$$

der Kugel in die Ebene soll das gezeigt werden. Zur Vereinfachung sei der Radius der Kugel R = 1 gesetzt. Es gilt für die Kugel:

$$w = q + il, \qquad (4)$$

$$q = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right) = \mathrm{Ar\,Sh\,(tgb)}.$$

b, l sind die geographischen Koordinaten auf der Kugel,
q die isometrische Breite auf der Kugel.

Die Zerlegung von (3) in Real- und Imaginärteil gibt die Formeln für die Projektionskoordinaten x, y:

$$x = \frac{\mathrm{Sh}\,\frac{q}{2}\,\mathrm{Ch}\,\frac{q}{2}}{\mathrm{Ch}^2\,\frac{q}{2} - \sin^2\frac{l}{2}} \qquad (5)$$

$$y = \frac{\sin\frac{l}{2}\,\cos\frac{l}{2}}{\mathrm{Ch}^2\,\frac{q}{2} - \sin^2\frac{l}{2}}.$$

Die Theorie der konformen Abbildungen gibt uns aber noch mehr. Das Längenverhältnis einer konformen Abbildung des Ellipsoides ist:

$$\wedge = \frac{1}{N\cos B}\left|\frac{dZ}{dW}\right| \qquad (6)$$

---

* für die Kugel werden anstelle der grossen Buchstaben kleine gesetzt.

N: Querkrümmungsradius

$\left|\frac{dZ}{dW}\right|$: Absolutwert der Ableitung $\frac{dZ}{dW}$.

Im übrigen sei daran erinnert, dass
$\frac{dZ}{dW} = \frac{\partial Z}{\partial Q} = \frac{\partial Z}{i\partial L}$
ist.

Auf die Kugel mit dem Radius R = 1 spezialisiert, gibt das

$$\lambda = \frac{1}{\cos b}\left|\frac{dz}{dw}\right|. \qquad (7)$$

Auch die Meridiankonvergenz ist einfach darzustellen:

$$\mu = -\arg\left(\frac{dZ}{dW}\right), \qquad (8)$$

wobei arg ( ) das Argument der komplexen Grösse bedeutet; für die Kugel ist z statt Z und w statt W zu setzen.

In unserem Beispiel lässt sich

$$\frac{dz}{dw} = \frac{d}{dw}\left(\mathrm{Tgh}\frac{w}{2}\right) = \frac{1}{2\,\mathrm{Ch}^2\frac{w}{2}} \qquad (9)$$

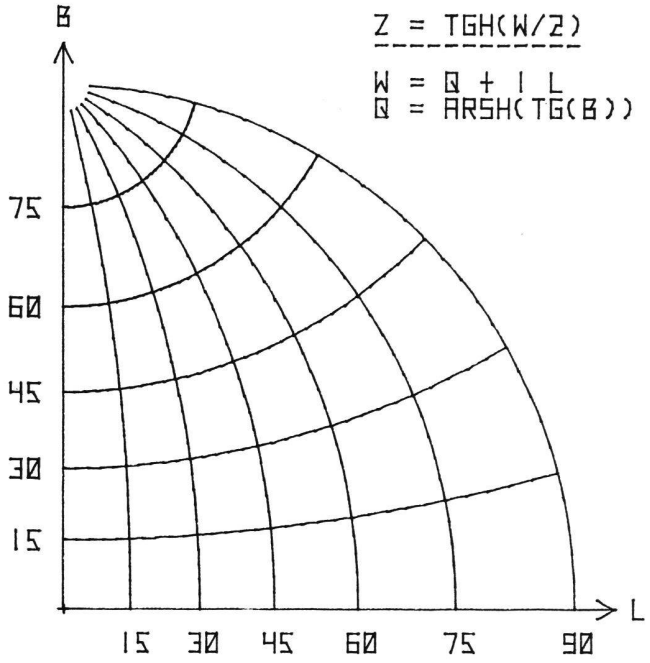
leicht formal rechnen. Aber schon die Berechnung von Betrag und Argument dürfte dem Nichtgeübten einige Mühe bereiten.

«Computer-Intelligenz»

Moderne Computer-Programmiersprachen wie etwa FORTRAN, zum Teil auch BASIC vereinfachen das Problem wesentlich. Sie übernehmen weitgehend die Zerlegungen in Real- und Imaginärteil und in Betrag und Argument.
Die Formeln (5) müssen nicht mehr ausgerechnet werden, die Ableitung nach (9) wird nach einem numerischen Verfahren vom Computer übernommen; auch zerlegt er den Differentialquotienten in Betrag und Argument.

Ein Ausschnitt aus der mit dem Tischcomputer Hewlett Packard Modell 9830 gerechneten Tabelle sieht so aus:

Das nachstehende Netzbild für die Abbildung nach (3) ist mit dem Plotter des HP 9830 gezeichnet worden.



Aus diesen Ausführungen ergibt sich: Da dem Computer auch schwierigere funktionale Zusammenhänge weder beim numerischen Differenzieren noch beim Zerlegen in die Komponenten Mühe bereiten, werden viel mehr Abbildungen einer breiteren praktischen Anwendung leicht zugänglich.

Am schweizerischen Projektionssystem soll abschliessend gezeigt werden, wie man mit dieser Technik umgehen kann.

Das schweizerische Projektionssystem

Es handelt sich um eine schiefaxige Zylinderprojektion der Kugel, auf die zuvor das Ellipsoid konform abgebildet wird.
Die schiefaxige konforme Abbildung der Kugel mit dem Fundamentalpunkt $b = b_0$, $l = 0$ ergibt aus der Theorie der analytischen Fortsetzung als

$$z = R \ln \mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\beta - b_0)\right] \qquad (10)$$

ARGUMENTE (GRAD)		Z = X + I Y		L-VERH.	M-KONV.
B	L	X	Y		(GRAD)
0.0	30.0	0.0000000	0.2679492	0.5358983	0.0000000
15.0	30.0	0.1409293	0.2629777	0.5445092	4.0406765
30.0	30.0	0.2857143	0.2474358	0.5714285	8.2132107
45.0	30.0	0.4385505	0.2192753	0.6202041	12.6664693
60.0	30.0	0.6043390	0.1744576	0.6978305	17.5879539
75.0	30.0	0.7890623	0.1057143	0.8168973	23.2367376

mit der «komplexen Breite» β nach [1] Seite 75:

$$\beta = \frac{1}{i} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + i\frac{w}{2}\right)$$

oder

$$w = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \tag{11}$$

In (10) lässt sich der Numerus mit Hilfe des Additionstheorems und der Formel (11) umformen:

$$\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\beta - b_0)\right] = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{b_0}{2}} =$$

$$= \frac{e^w - \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}}{1 + e^w \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}}.$$

Damit wird (10)

$$z = R \ln \frac{e^w - \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}}{1 + e^w \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}}. \tag{12}$$

Der Ansatz für die konforme Abbildung des Ellipsoides auf die Kugel lautet mit den bekannten komplexen Variablen w und W:

$$w - w_0 = \alpha (W - W_0). \tag{13}$$

α, w_0, W_0 sind Parameter, die zur Optimierung des Längenverhältnisses benützt werden. Wegen

$l = \alpha L$, also $l_0 = L_0 = 0$
gilt
$w - q_0 = \alpha (W - Q_0)$,
oder
$$w = \alpha W + (q_0 - \alpha Q_0) = \alpha W + \triangle q_0, \tag{14}$$
mit

$$Q = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B}$$

$$Q_0 = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B_0}{2}\right) - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin B_0}{1 - e \sin B_0}.$$

Nach Djazmati [2] werden

$$R = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 B_0},$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 - e^2 (1 - \cos^4 B_0)}{1 - e^2}}, \tag{15}$$

$$\sin b_0 = \frac{1}{\alpha} \sin B_0 \quad \text{und}$$

$$\operatorname{Tgh}\frac{q_0}{2} = \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}.$$

(15) in (13) eingesetzt, gibt eine *geschlossene* Formel für die Abbildung:

$$Z = R \ln \frac{e^{\alpha W + \triangle q_0} - \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}}{1 + e^{\alpha W + \triangle q_0} \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}} \tag{16}$$

mit

$$W = Q + iL.$$

Die Formel (16) lässt sich unmittelbar programmieren. Man erhält X, Y und mit (6) und (8) $\wedge$ und μ.

Die in [2] von Djazmati angegebenen Beispiele sind mit einem nach diesen Formeln geschriebenen BASIC-Programm für die HP 9830 nachgerechnet worden. Die grössten Abweichungen betragen in den Koordinaten 1 mm, im Längenverhältnis etwa 10^{-8} und in der Meridiankonvergenz einige $^1/_{1000}$ Sekunden. Diese Restfehler werden von der beschränkten Stellenkapazität der HP 9830 verursacht.

Ich danke bei dieser Gelegenheit meinem Assistenten, Herrn dipl. Math. Ulrich Bucher für die wertvolle Unterstützung bei den Programmierungs- und Verifikationsarbeiten.

Schluss

Ich weiss, dass dem Jubilar der künstlerische Umgang mit der Natur näher liegt als die künstlichen Sprachen mit natürlichen Logarithmen und dem Tangens hyperbolicus. Über die Kartenprojektionen bestehen offensichtlich dennoch gewisse Beziehungen.

Literatur

[1] *König R./Weise H.:* Mathematische Grundlagen der Höheren Geodäsie und Kartographie; I. Band. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1951.

[2] *Djazmati S.:* Application du Calcul Electronique à la Géodésie; Nouvelles Formules pour la Projection Suisse. Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, Publication No 94; Librairie Payot, Lausanne, 1966.