Geodätische Parameter und Bezugssysteme

Geodätische Parameter und Bezugssysteme

H. Moritz, Graz

Das Bezugsellipsoid spielt für die geodätischen Berechnungen eine grundlegende Rolle. Man verwendet allgemein ein Rotationsellipsoid, dessen grosse Halbachse im folgenden mit a und dessen Abplattung mit f bezeichnet wird. Jeder Geodät kennt das Ellipsoid von Bessel (1841)

$$a = 6\,377\,397 \text{ m}, \qquad f = 1/299{,}15$$

und das Internationale Ellipsoid (Hayford, 1909)

$$a = 6\,378\,388 \text{ m}, \qquad f = 1/297.$$

Das Ellipsoid von Hayford wurde 1924 von der Internationalen Assoziation für Geodäsie als einheitliche Bezugsfläche für alle geodätischen Arbeiten angenommen; 1930 wurde es durch die von W. A. Heiskanen berechnete Internationale Schwereformel zu einem vollständigen geometrisch-gravimetrischen Bezugssystem erweitert. Dieses Bezugssystem blieb mehrere Jahrzehnte unwidersprochen gültig. Erst die Satellitengeodäsie erlaubte die Bestimmung der Parameter des Erdellipsoids mit wesentlich grösserer Genauigkeit. Daher beschloss die Internationale Assoziation für Geodäsie auf ihrer Generalversammlung in Luzern die Einführung eines neuen Bezugssystems, des Geodätischen Bezugssystems 1967. Dieses ist durch folgende Parameter bestimmt:

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,160 \text{ m}, \\ GM &= 398\,603 \cdot 10^9 \text{ m}^3\text{s}^{-2}, \\ J_2 &= 0{,}001\,0827; \end{aligned}$$

hierbei bedeuten GM die geozentrische Gravitationskonstante, das heisst das Produkt aus Gravitationskonstante G und Erdmasse M (einschliesslich der Atmosphäre), und J_2 den dynamischen Formfaktor der Erde, definiert als zonaler Kugelfunktionskoeffizient 2. Grades für das Gravitationspotential der Erde.

Ausserdem war es notwendig, die Orientierung des Bezugsellipsoids im Raum durch Achse und Nullmeridian in geeigneter Weise festzulegen. Dies erfordert wegen der Polbewegung und dergleichen eine präzise Definition, die wir hier übergehen.

Die Parameter des Bezugssystems 1967 wurden in Übereinstimmung mit dem von der Internationalen Astronomischen Union 1964 angenommenen System astronomischer Konstanten gewählt. Nimmt man den aus diesem astronomischen System abgeleiteten Wert für die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation,

$$\omega = 0{,}000\,072\,921\,151\,467 \text{ rad s}^{-1},$$

hinzu, so können nach der Theorie des Niveauellipsoids alle geometrischen und physikalischen Parameter des Bezugssystems berechnet werden.

Dies erfolgte durch das Zentralbüro der IAG in Zusammenarbeit mit mehreren Wissenschaftlern; die Ergebnisse wurden im Sonderheft 3 des Bulletin Géodésique, «Geodetic Reference System 1967», Paris 1971, veröffentlicht und auf der Generalversammlung in Moskau 1971 bestätigt.

Bereits bei der Schaffung des Geodätischen Bezugssystems 1967 war klar, dass die angenommenen Parameter nicht dem allerletzten Stand entsprachen; sie wurden aber trotzdem wegen der Übereinstimmung mit dem astronomischen System so gewählt. Inzwischen wurden die Bestimmungen weiter verfeinert, und immer wieder wird an die IAG die Frage nach den gegenwärtig besten Werten für die Erdparameter herangetragen, von Geodäten ebenso wie von Vertretern anderer Wissenschaften.

So beschloss das Exekutivkomitee der IAG auf seiner Sitzung im Februar 1974 in Paris, eine Studiengruppe «Fundamental Geodetic Constants» unter Leitung des Verfassers einzurichten. Aufgabe dieser Studiengruppe ist es, in Zusammenarbeit mit den entsprechenden internationalen Institutionen und Organisationen die Entwicklung neuer Zahlenwerte für geodätisch wichtige Konstanten zu verfolgen und bei jeder Generalversammlung der IAG Empfehlungen über die jeweils besten Zahlenwerte abzugeben.

Die im folgenden angegebenen Zahlenwerte entsprechen dem Stand der Beratungen der genannten Studiengruppe zum Zeitpunkt der Niederschrift des vorliegenden Aufsatzes (Ende Mai 1975); bis zur Generalversammlung der IUGG/IAG in Grenoble (August/September 1975) sind unter Umständen noch kleine Änderungen möglich.

Lichtgeschwindigkeit c. Gegenwärtig wird von vielen internationalen Organisationen ein neuer Wert für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum angenommen. Es ist dies der Wert

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}.$$

Dieser Wert wurde im Oktober 1973 vom Comité international des Poids et Mesures empfohlen; er ist so genau, dass er wahrscheinlich auch einer künftigen Neudefinition des Meters zugrunde gelegt werden wird. Bereits heute bildet ja c über die elektronische Entfernungsmessung den effektiven Längenmassstab in der Geodäsie.

Rotationsgeschwindigkeit der Erde ω. Der oben für das Geodätische Bezugssystem 1967 angegebene konstante Wert für ω ist zwar ausserordentlich genau, er bezieht sich aber auf die durch die Erdrotation definierte mittlere Zeit.

Die moderne Zeitdefinition ist aber die Atomzeit. Sie ist ein völlig gleichförmiges Zeitmass, bezüglich dessen die Erdrotation geringfügigen Schwankungen unterliegt. So kommt es, dass ω in diesem Zeitsystem nicht mehr exakt konstant ist.

Leider ist es nicht möglich, diese Zeitabhängigkeit von ω formelmässig zu erfassen. Der Direktor des Bureau international de l'Heure hat sich jedoch freundlicherweise bereit erklärt, die genauen Werte für ω als Jahresmittel für die vergangenen Jahre künftig in den Jahresberichten des BIH zu veröffentlichen.

Geozentrische Gravitationskonstante GM. Der heute wohl genaueste Wert wurde aus der Bahn der Raumsonde Mariner 10 und auf Grund von Lasermessungen zum Mond bestimmt; er ist

$$GM = 3{,}986\,005 \cdot 10^{14}\ m^3 s^{-2}.$$

Für diesen Wert wird eine relative Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-7}$ angegeben. Demgegenüber ist der Wert der Newtonschen Gravitationskonstante G selbst wesentlich weniger genau bekannt; als offiziell angenommener Wert gilt

$$G = 6{,}6720 \cdot 10^{-11}\ m^3 s^{-2} kg^{-1}.$$

Zonale Kugelfunktionskoeffizienten. Die Kugelfunktionsentwicklung für das Gravitationspotential der Erde lautet unter Beschränkung auf die zonalen Glieder

$$V = \frac{GM}{r}\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 P_2(\cos\theta) - \left(\frac{a}{r}\right)^3 J_3 P_3(\cos\theta) - - \left(\frac{a}{r}\right)^4 J_4 P_4(\cos\theta) - \ldots\right];$$

es bedeuten r (Radiusvektor) und θ (Poldistanz) räumliche Polarkoordinaten, und die $P_n(\cos\theta)$ sind Legendresche Polynome.

Recht genaue Werte für J_2, J_3 und J_4 wurden bald nach dem Aufkommen der ersten künstlichen Satelliten bestimmt: bereits um 1960 erkannte man, dass die mit J_2 in enger Beziehung stehende Erdabplattung f nicht 1/297 beträgt, sondern einen Wert um 1/298,25 haben muss.

Heute wurden Werte für J_n bis $n = 20$ und höher bestimmt; für J_2 bis J_6 stimmen die Werte so gut überein, dass es sinnvoll ist, Mittelwerte zu empfehlen:

$$\begin{aligned} J_2 &= 1082{,}635 \cdot 10^{-6},\\ J_3 &= -2{,}54 \cdot 10^{-6},\\ J_4 &= -1{,}61 \cdot 10^{-6},\\ J_5 &= -0{,}23 \cdot 10^{-6},\\ J_6 &= 0{,}54 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Der mittlere Fehler dieser Werte liegt in der Grössenordnung von 10^{-8}, für J_2 vielleicht etwas besser und für J_6 etwas schlechter.

Tesserale Kugelfunktionskoeffizienten. In den letzten Jahren wurden einige Bestimmungen der tesseralen Kugelfunktionskoeffizienten bis $n = 16$ oder höher durchgeführt, von denen die Standard Earth III des Smithsonian Astrophysical Observatory (1973) und die Lösung GEM 6 der NASA (1974) als die modernsten gelten. Aus diesen Lösungen kann man zum Beispiel auch die Grossform des Geoids berechnen.

Immerhin sind, insbesondere für $n > 8$, die Abweichungen zwischen diesen beiden Lösungen so gross, dass es nicht möglich ist, eine davon als verbindlich zu empfehlen: man sollte stets beide Lösungen (eventuell auch noch andere) verwenden und die Ergebnisse miteinander vergleichen.

Ellipsoidparameter. Ein Rotationsellipsoid erfüllt in der Geodäsie zwei Aufgaben:

1. Als Bezugsellipsoid dient es als Bezugs- und Rechenfläche für Geoid und Erdoberfläche.
2. Als mittleres Erdellipsoid dient es als beste Annäherung der Erde durch ein Ellipsoid.

Beide Aufgaben sind begrifflich verschieden und sind streng voneinander zu trennen. Als Bezugsfläche kann grundsätzlich jedes Ellipsoid dienen, welches das Geoid einigermassen annähert; es braucht keineswegs die beste Annäherung zu sein. Hingegen ist es wünschenswert, die Dimensionen des Bezugsellipsoids nicht zu oft zu ändern, da eine grosse Menge von Daten sich darauf bezieht und bei einer Änderung zu transformieren ist. So ist auf der diesjährigen Generalversammlung der IUGG/IAG eine Änderung des Geodätischen Bezugssystems 1967 nicht vorgesehen.

Was jedoch das mittlere Erdellipsoid betrifft, so werden seine Parameter mit der Verbesserung der Messdaten immer genauer bekannt. Es ist daher zweckmässig, sie laufend neu zu berechnen, um sie Benutzern aus Geodäsie, Astronomie und anderen Wissenschaften zur Verfügung zu stellen. Im folgenden werden Werte für die Ellipsoidparameter betrachtet, die dem heutigen Stand der Wissenschaft entsprechen.

Die neuesten Bestimmungen der grossen Halbachse a des Erdellipsoids liegen zwischen 6 378 129 und 6 378 146 m, wobei die geometrisch bestimmten Werte allgemein niedriger sind als die dynamisch bestimmten; auch hier liefert also die Satellitengeodäsie, sowohl durch die geometrische als auch durch die dynamische Methode, entscheidende Beiträge.

Unter sorgfältiger Abwägung aller vorhandenen Bestimmungen – es sind deren heute rund zehn bekannt, die freilich nicht alle voneinander unabhängig sind – kann der Wert

$$a = 6\,378\,140\ m$$

empfohlen werden. Vielleicht liegt der beste Wert noch um 1 bis 2 m niedriger, aber diese Abweichung ist kaum als statistisch signifikant zu bezeichnen, da die Genauigkeit der Bestimmung von a etwa ± 5 m betragen dürfte.

Aus diesem Wert für a und den oben angegebenen Werten für GM, J_2 und ω kann man alle Parameter des mittleren Erdellipsoids und des darauf beruhenden Normalschwerefeldes berechnen. Die dabei zugrunde liegende Theorie ist die des Niveauellipsoids, das bekanntlich durch vier Parameter vollständig definiert ist.

Bei der heutigen Messgenauigkeit beginnt bereits der Einfluss der Erdatmosphäre eine Rolle zu spielen. Dieser wird zweckmässig dadurch berücksichtigt, dass die Erdatmosphäre in das Innere des Erdellipsoids verlagert gedacht wird; auf diese Weise kann man GM, wobei M die Masse der Erde einschliesslich der Atmosphäre bedeutet, unmittelbar als Ellipsoidparameter verwenden.

Abgeleitete Parameter sind zum Beispiel

$$\begin{aligned} f &= 1/298{,}2564 && \text{(Abplattung)},\\ \gamma_e &= 978\,031{,}8\ \text{mgal} && \text{(Normalschwere am Äquator)},\\ W_0 &= 6\,263\,683\ \text{kgal m} && \text{(Geoidpotential)}; \end{aligned}$$

letzteres ist definitionsgemäss das gleiche für Geoid und Ellipsoid.

Standardatmosphäre. Für die Berücksichtigung atmosphärischer Einflüsse, auf elektronische Distanzmessungen ebenso wie auf Schweremessungen, braucht man eine geeignete Standardatmosphäre. Hier gibt es vor allem zwei:

1. CIRA (COSPAR International Reference Atmosphere), zuletzt 1972 veröffentlicht;
2. U. S. Standard Atmosphere 1962, mit Ergänzungen 1966.

Keine dieser Standardatmosphären ist unmittelbar für geodätische Anwendungen bestimmt. CIRA ist primär für Zwecke der Weltraumforschung gedacht, daher wird das Hauptgewicht auf grössere Höhen gelegt. Die US-Standardatmosphäre dient vor allem der Luftfahrt. Sie gibt deswegen auch mehr Details in geringen Höhen.

Die World Meteorological Organization (WMO) hat die U. S. Standard Atmosphere zum Gebrauch angenommen. Die Erstellung einer Standardatmosphäre für geodätische Zwecke erscheint wünschenswert; mittlerweile könnte die U. S. Standard Atmosphere mit dem gebotenen Verständnis verwendet werden.

Weitere Einzelheiten und Literaturhinweise können dem Bericht der IAG-Studiengruppe 5.39, «Fundamental Geodetic Constants», der der Generalversammlung in Grenoble vorgelegt werden wird, entnommen werden.

Das Problem der geodätischen Konstanten gibt einen aufschlussreichen Einblick in die heutige Geodäsie. Die Lichtgeschwindigkeit c liefert über die elektronische Entfernungsmessung den Massstab für die geodätische Längenbestimmung. Die Satellitengeodäsie hat unsere Kenntnis der Erdparameter entscheidend bereichert: klassische Parameter wie die grosse Halbachse a sind nun wesentlich genauer bekannt, und neue physikalisch definierte Parameter wie GM und J_2 sind als geodätische Fundamentalgrössen eingeführt worden, denen gegenüber etwa die geometrische Erdabplattung f als abgeleitete Grösse gilt. So sieht man, dass Geometrie und Physik sich heute in der Geodäsie untrennbar miteinander verbinden.

Die relative Genauigkeit, mit der die Gestalt der Erde und ihre physikalischen Parameter bekannt sind, liegt heute etwa bei 10^{-6}. In den kommenden Jahren wird, insbesondere durch die Genauigkeitssteigerung der Lasermessung zu Satelliten, eine um eine oder gar zwei Grössenordnungen höhere Genauigkeit erhofft.

Adresse des Verfassers:
o. Prof. Dipl. Ing. Dr. techn. Helmut Moritz,
Institut für Erdmessung und Physikalische Geodäsie,
Technische Hochschule Graz, Steyrergrasse 17, A-8010 Graz

Die geodätischen Linien und die Mechanik

Max Schürer

Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien auf einer Fläche lassen sich in kanonischer Form schreiben (1). Speziell gilt für das Rotationsellipsoid mit den Koordinaten b und l (reduzierte Breite und Länge):

$$\frac{db}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \frac{dp}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial b}$$

$$\frac{dl}{ds} = \frac{\partial H}{\partial q} \qquad \frac{dq}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial l}$$

$$p = E\frac{db}{ds} \qquad q = G\frac{dl}{ds}$$

Die unabhängig Veränderliche s ist die Bogenlänge, E und G sind die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform:

$$ds^2 = E \cdot db^2 + G \cdot dl^2 = a^2 (1 - e^2\cos^2 b)\, db^2 + a^2\cos^2 b \cdot dl^2$$

und

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{E} + \frac{q^2}{G}\right)$$

Die Gleichungen zeigen eine gewisse Analogie zur Mechanik (Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes auf einer Fläche mit dem Potential null und der Bogenlänge s als unabhängiger Variabler anstelle der Zeit t), und es liegt nahe, die Analogie weiter zu verfolgen.

Eine Lösungsmethode für die Gleichungen in der Mechanik besteht in der Aufstellung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{E}\left(\frac{\partial W}{\partial b}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial W}{\partial l}\right)^2\right\} + \frac{\partial W}{\partial s} = 0$$

Sie ist in unserem Falle durch Separation der Variablen lösbar und führt, wie zu erwarten war, auf elliptische Funktionen. Zerlegt man jedoch H in zwei Anteile H_0 und R, wo

$$H_0 = \frac{1}{2a^2}\left(p^2 + \frac{q^2}{\cos^2 b}\right) \text{und } R = \frac{e^2}{2a^2}\,\frac{p^2\cos^2 b}{(1 - e^2\cos^2 b)},$$

so kann die Gleichung mit H_0 ohne Schwierigkeiten gelöst und R als Störungsfunktion betrachtet werden. Die Analogie zum Störungsproblem der Himmelsmechanik wird dadurch ersichtlich.

Die Hamilton-Jacobische Gleichung für das «ungestörte» Problem lautet nun:

$$\frac{1}{2a^2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial b}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2 b}\left(\frac{\partial W}{\partial l}\right)^2\right\} + \frac{\partial W}{\partial s} = 0$$

Setzt man W = B (b) + L (l) + S (s), so folgt:

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{dS}{ds} = -\frac{\alpha^2}{2a^2} \qquad S = -\frac{\alpha^2}{2a^2}s$$

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{dL}{dl} = \beta \qquad L = \beta l$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial b}\right) = \left(\frac{dB}{db}\right) = \alpha^2 - \frac{\beta^2}{\cos^2 b}$$