

Die geodätischen Linien und die Mechanik

Autor(en): **Schürer, Max**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mensuration, photogrammétrie, génie rural**

Band (Jahr): **73-F (1975)**

Heft 3-4: **Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag**

PDF erstellt am: **26.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-227521>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

letzteres ist definitionsgemäss das gleiche für Geoid und Ellipsoid.

Standardatmosphäre. Für die Berücksichtigung atmosphärischer Einflüsse, auf elektronische Distanzmessungen ebenso wie auf Schweremessungen, braucht man eine geeignete Standardatmosphäre. Hier gibt es vor allem zwei:

1. CIRA (COSPAR International Reference Atmosphere), zuletzt 1972 veröffentlicht;
2. U. S. Standard Atmosphere 1962, mit Ergänzungen 1966.

Keine dieser Standardatmosphären ist unmittelbar für geodätische Anwendungen bestimmt. CIRA ist primär für Zwecke der Weltraumforschung gedacht, daher wird das Hauptgewicht auf grössere Höhen gelegt. Die US-Standardatmosphäre dient vor allem der Luftfahrt. Sie gibt deswegen auch mehr Details in geringen Höhen.

Die World Meteorological Organization (WMO) hat die U. S. Standard Atmosphere zum Gebrauch angenommen. Die Erstellung einer Standardatmosphäre für geodätische Zwecke erscheint wünschenswert; mittlerweile könnte die U. S. Standard Atmosphere mit dem gebotenen Verständnis verwendet werden.

Weitere Einzelheiten und Literaturhinweise können dem Bericht der IAG-Studiengruppe 5.39, «Fundamental Geodetic Constants», der der Generalversammlung in

Grenoble vorgelegt werden wird, entnommen werden. Das Problem der geodätischen Konstanten gibt einen aufschlussreichen Einblick in die heutige Geodäsie. Die Lichtgeschwindigkeit c liefert über die elektronische Entfernungsmessung den Massstab für die geodätische Längenbestimmung. Die Satellitengeodäsie hat unsere Kenntnis der Erdparameter entscheidend bereichert: klassische Parameter wie die grosse Halbachse a sind nun wesentlich genauer bekannt, und neue physikalisch definierte Parameter wie GM und J_2 sind als geodätische Fundamentalgrössen eingeführt worden, denen gegenüber etwa die geometrische Erdabplattung f als abgeleitete Grösse gilt. So sieht man, dass Geometrie und Physik sich heute in der Geodäsie untrennbar miteinander verbinden.

Die relative Genauigkeit, mit der die Gestalt der Erde und ihre physikalischen Parameter bekannt sind, liegt heute etwa bei 10^{-6} . In den kommenden Jahren wird, insbesondere durch die Genauigkeitssteigerung der Lasermessung zu Satelliten, eine um eine oder gar zwei Grössenordnungen höhere Genauigkeit erhofft.

Adresse des Verfassers:

o. Prof. Dipl. Ing. Dr. techn. Helmut Moritz,
Institut für Erdmessung und Physikalische Geodäsie,
Technische Hochschule Graz, Steyrergrasse 17, A-8010 Graz

Die geodätischen Linien und die Mechanik

Max Schürer

Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien auf einer Fläche lassen sich in kanonischer Form schreiben (1). Speziell gilt für das Rotationsellipsoid mit den Koordinaten b und l (reduzierte Breite und Länge):

$$\frac{db}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \frac{dp}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial b}$$

$$\frac{dl}{ds} = \frac{\partial H}{\partial q} \quad \frac{dq}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial l}$$

$$p = E \frac{db}{ds} \quad q = G \frac{dl}{ds}$$

Die unabhängig Veränderliche s ist die Bogenlänge, E und G sind die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform:

$$ds^2 = E \cdot db^2 + G \cdot dl^2 = a^2 (1 - e^2 \cos^2 b) db^2 + a^2 \cos^2 b \cdot dl^2$$

und

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{E} + \frac{q^2}{G} \right)$$

Die Gleichungen zeigen eine gewisse Analogie zur Mechanik (Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes auf einer Fläche mit dem Potential null und der Bogenlänge s als unabhängiger Variabler anstelle der Zeit t), und es liegt nahe, die Analogie weiter zu verfolgen.

Eine Lösungsmethode für die Gleichungen in der Mechanik besteht in der Aufstellung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial W}{\partial b} \right)^2 + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial W}{\partial l} \right)^2 \right\} + \frac{\partial W}{\partial s} = 0$$

Sie ist in unserem Falle durch Separation der Variablen lösbar und führt, wie zu erwarten war, auf elliptische Funktionen. Zerlegt man jedoch H in zwei Anteile H_0 und R , wo

$$H_0 = \frac{1}{2a^2} \left(p^2 + \frac{q^2}{\cos^2 b} \right) \text{ und } R = \frac{e^2}{2a^2} \frac{p^2 \cos^2 b}{(1 - e^2 \cos^2 b)},$$

so kann die Gleichung mit H_0 ohne Schwierigkeiten gelöst und R als Störungsfunktion betrachtet werden. Die Analogie zum Störungsproblem der Himmelsmechanik wird dadurch ersichtlich.

Die Hamilton-Jacobische Gleichung für das «unge störte» Problem lautet nun:

$$\frac{1}{2a^2} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial b} \right)^2 + \frac{1}{\cos^2 b} \left(\frac{\partial W}{\partial l} \right)^2 \right\} + \frac{\partial W}{\partial s} = 0$$

Setzt man $W = B(b) + L(l) + S(s)$, so folgt:

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{dS}{ds} = -\frac{\alpha^2}{2a^2} \quad S = -\frac{\alpha^2}{2a^2} s$$

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{dL}{dl} = \beta \quad L = \beta l$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial b} \right) = \left(\frac{dB}{db} \right) = \alpha^2 - \frac{\beta^2}{\cos^2 b}$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich sofort integrieren, wenn man beachtet, dass man auf der rechten Seite die ungestörten Elemente $\alpha_0 = a$, $\cos i_0$, σ_0 und Ω_0 einsetzen darf und ausserdem $ds = a du$ ist. Man erhält:

$$\alpha = a \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 i_0 \sin^2 u \right)$$

$$\cos i = \cos i_0 \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 i_0 \sin^2 u \right)$$

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{e^2 a}{2} \left(u + \sin u \cdot \cos u - \frac{\sin^2 i_0}{2} (\sin u \cdot \cos u - u \cdot \cos 2u) \right)$$

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{e^2}{2} \cos i_0 (u + \sin u \cdot \cos u)$$

Die Gleichungen lassen den Verlauf der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid im Grossen erkennen. Insbesondere stellt man nach der letzten Gleichung fest, dass sich die Knotenlänge nach einem Umlauf ($u = 2\pi$) um

den Betrag $\pi e^2 \cos i$ nach rückwärts verschoben hat. Man beachte jedoch, dass i nur genähert die Neigung der geodätischen Linie gegen den Äquator darstellt, und dass für diese das Clairautsche Theorem gilt, das sofort aus der vierten kanonischen Gleichung gewonnen werden kann. Es ist:

$$\frac{dq}{ds} = - \frac{\partial H}{\partial l} = 0,$$

$$q = \text{konst.} = a^2 \cos^2 b \left(\frac{dl}{ds} \right)$$

$$\cos b \frac{dl}{ds} = \sin A,$$

$$\cos b \sin A = \text{konst.}$$

Prinzipiell können mit Hilfe dieser Gleichungen auch die geodätischen Hauptaufgaben lösen; praktisch bietet dies jedoch kaum Vorteile.

Literatur

(1) Courant, R., und Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik II, Berlin 1937.

Adresse des Verfassers

Prof. Dr. Max Schürer, Astronomisches Institut der Universität Bern, Sidlerstrasse 5, 3006 Bern

Zur Bedeutung der Schwerereduktion bei der Bestimmung der Figur und Massenverteilung der Erde*

H.-G. Kahle, E. Klingelé und St. Müller, Zürich

Zusammenfassung

Es wird eine Übersicht über die Grundlagen und Anwendungen von verschiedenen Schwerereduktionen gegeben, die für geodätische und geophysikalische Zwecke wichtig sind. Diese Reduktionen umfassen die Bouguer-, topographische, Freiluft-, isostatische und geologische Reduktion. Für die Reduktion der Geländewirkung in den Alpen sind besondere Berechnungsmethoden erforderlich. Modelle und Anwendungen dafür sind zusammenfassend dargestellt.

A. Einleitung

Als Figur der Erde bezeichnet man jene Äquipotentialfläche des Schwerefeldes der Erde, die etwa mit dem mittleren Meeresniveau zusammenfällt. Diese als Geoid bezeichnete Niveaulfläche ist definiert durch das Schwerepotential $W = W_0 = \text{const.}$ W enthält das Potential U der nur von der geographischen Breite φ abhängigen Normalschwere $g(\varphi)$ und das Potential T der Störungsmassen: $W = U + T$. Die Kompliziertheit der Niveaulflächen legt es nahe, das Geoid auf eine Referenzfläche zu beziehen, die man nach geometrischen oder potentialtheoretischen Gesichtspunkten auswählen kann. Im Fall der potentialtheoretischen Definition bezieht man das

Geoid mit dem Potential $W_0 = \text{const.}$ zweckmässigerweise auf die Niveaulfläche der Normalschwere $g(\varphi)$. Diese Niveaulfläche ist dadurch definiert, dass auf ihr das Potential U der Normalschwere genau so gross ist wie das Schwerepotential W auf dem Geoid: $U^{(Q)} = W^{(P)} = W_0 = \text{const.}$ Wegen ihrer kugelähnlichen Gestalt ist es üblich, die Referenzfläche als Sphäroid (genauer als Referenzellipsoid) zu bezeichnen (Abb. 1). Der Abstand

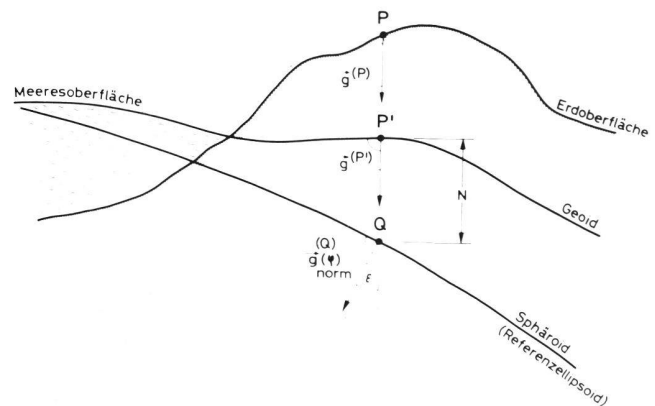


Abbildung 1 Geoid und Referenzellipsoid, stark überhöht dargestellt

- N = Geoidundulation
- ϵ = Lotabweichung
- $\rightarrow_{g(P)}$ = beobachteter Schwerevektor im Punkt P (auf der Erdoberfläche)
- $\rightarrow_{g(P')}$ = Vektor der beobachteten Schwere, umgerechnet auf den Punkt P' (auf dem Geoid)
- $\rightarrow_{g(Q)}$ = Vektor der Normalschwere im Punkt Q (auf dem Referenzellipsoid)

Auf dem Geoid herrscht das Potential $W = U + T$, auf dem Referenzellipsoid das Potential U der Normalschwere $g_{\text{norm}}(\varphi)$ mit $T = \text{Störpotential}$

* Dieser Aufsatz wird als «Beitrag Nr. 115 des Institutes für Geophysik, ETH Zürich» bezeichnet.