Zur Koordinatentransformation zwischen zwei Meridianstreifen

Autor(en): **Hubeny, Karl**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mensuration, photogrammétrie, génie rural**

Band (Jahr): **73-F (1975)**

Heft 3-4: **Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag**

PDF erstellt am: **26.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-227523

Zur Koordinatentransformation zwischen zwei Meridianstreifen

Karl Hubeny, Graz

Das gewählte Thema ist keinesfalls neu – man denke nur an die vielen Arbeiten, die sich in den vergangenen Jahrzehnten damit beschäftigt haben. Dass es aber noch immer eine gewisse Aktualität besitzt, zeigt eine 1973 unter dem Titel «Koordinatentransformation durch Reduktion auf die geodätische Linie» [1] veröffentlichte Abhandlung, die die Anregung zu den nachstehenden Zeilen bot.

Die Problemstellung ist bekannt: Ein Punkt P des Ellipsoids habe, bezogen auf den Meridianstreifen 1, die Koordinaten x_1, y_1; seine Koordinaten x_2, y_2 im benachbarten Streifen 2 werden gesucht. Ferner sei noch ein Punkt P_0 in der Umgebung von P gegeben, dessen Koordinaten in beiden Streifen bekannt seien ($x_{0.1}$, $y_{0.1}$ und $x_{0.2}$, $y_{0.2}$). Hiebei möge der Streifen 2 östlich an den Streifen 1 anschliessen.

In [1] wird nun die folgende, auf L. Krüger zurückgehende Lösung ausgeführt: Man berechne in der Bildebene des Streifens 1 mit x_1, y_1 und $x_{0.1}$, $y_{0.1}$ die ebene Strecke $P_{0.1}P = S_1$ und deren Richtungswinkel T_1 in $P_{0.1}$; die Anbringung der Strecken- und Richtungsreduktion führt auf die geodätische Strecke $P_0P = s$ und ihren auf das isotherme System 1 bezogenen geodätischen Richtungswinkel t_1 in P_0. Hinsichtlich ihrer Lage auf dem Ellipsoid und ihres Betrages ist die geodätische Strecke s eine Invariante des Vorganges; ihr auf den Punkt P_0 im zweiten Streifen bezogener geodätischer Richtungswinkel t_2 unterscheidet sich von t_1 um die Differenz der Meridiankonvergenzen $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, das heisst um die Differenzen der in P_0 in bezug auf die isothermen Systeme 1 und 2 bestehenden Meridiankonvergenzen. Mit den ellipsoidischen Werten s und t_2 und mit den im Streifen 2 gegebenen Koordinaten $x_{0.2}$, $y_{0.2}$ des Punktes P_0 lassen sich nun – als «ebene» Rechnung – zunächst vorläufige Koordinaten (x_2), (y_2) des Punktes P im Streifen 2 ermitteln, mit denen die Strecken- und Richtungsreduktion und damit die endgültigen Koordinaten x_2, y_2 des Punktes P im Streifen 2 berechnet werden können.

Soweit also der in [1]behandelte Rechengang; ergänzend dazu darf mitgeteilt werden, dass dieser sich in einer sehr schönen Weiterführung in den Vorlesungen des seinerzeitigen Vorstandes der Lehrkanzel für Landesvermessung und Katastertechnik der Technischen Hochschule Wien, Prof. Dr. Rohrer, findet.

Der Ausgangspunkt der erwähnten Lösung bildet die in der Bildebene des Streifens 1 berechnete «ebene» Strecke $P_{0.1}P_1$. Es ist, auch in diesem Zusammenhang gesehen, eigentlich bemerkenswert, wie wenig uns bis heute die Tatsache bewusst ist, das irgendwelchen konformen Koordinaten stets eine doppelte Bedeutung zukommt: Sie sind einerseits Werte eines thermischen Parameterpaares x, y des Ellipsoids und beschreiben auf diesem den Ort eines Punktes, anderseits sind sie – damit zahlenmässig identifiziert – cartesische, also ebenfalls thermische Parameter der Bildebene und definieren in dieser den Bildpunkt.

Im Sinne der Legendreschen Entwicklung ergibt sich die Lösung der Hauptaufgaben zwischen den Punkten P_1 und P_2 am Ellipsoid für die Parameter x, y allgemein aus

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + a_{10}\, s \cos t_1 + a_{20}\, s^2\cos^2 t_1 + a_{11}\, s^2 \cos t_1 \sin t_1 \\ &\quad + a_{02}\, s^2 \sin^2 t_1 + \ldots \\ y_2 &= y_1 + b_{01}\, s \sin t_1 + b_{20}\, s^2\cos^2 t_1 + b_{11}\, s^2 \cos t_1 \sin t_1 \\ &\quad + b_{02}\, s^2 \sin t_1 + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

und aus der Umkehrung hievon

$$\begin{aligned} s \cos t_1 &= \overline{a_{10}}\Delta x_{12} + \overline{a_{20}}\Delta x_{12}^2 + \overline{a_{11}}\Delta x_{12}\Delta y_{12} \\ &\quad + \overline{a_{02}}\Delta y_{12}^2 + \ldots \\ s \sin t_1 &= \overline{b_{01}}\Delta y_{12} + \overline{b_{20}}\Delta x_{12}^2 + \overline{b_{11}}\Delta x_{12}\Delta y_{12} \\ &\quad + \overline{b_{02}}\Delta y_{12}^2 + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Ohne überhaupt die Vorstellung von einer Bildebene zu benützen, ergeben sich Strecken- und Richtungsreduktion aus der Forderung: Man suche Grössen $S = s + ds$ und $T = t + dt$, die in der Form

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \Delta x_{12} = S \cos T_1, \\ y_2 - y_1 &= \Delta y_{12} = S \sin T_1 \end{aligned} \tag{3}$$

die Gleichungen (1) erfüllen. Die durch die Reduktionen ds und dt mögliche Lösung zum Beispiel der Gleichungen (1) in der Form (3), also die sogenannte ebene Rechnung, ist also nichts anderes als eine andere Form der ellipsoidischen Rechnung, eine Form, die der ebenen Rechnung zufolge des Ansatzes (3) und wegen der Identität der thermischen Parameterwerte x, y mit ebenen cartesischen Koordinaten entspricht. Man kann nun leicht zeigen, dass in den Formeln für die Strecken- und Richtungsreduktion die in (1) oder (2) stehenden Koeffizienten vorkommen, das heisst die sogenannte ebene Rechnung nach (3) ist nicht einmal einfacher als die am Ellipsoid – sie gestattet nur die trivale Vorstellung einer Rechenoperation in der Ebene.

Kehren wir nach diesen Überlegungen zur Transformation zwischen zwei Meridianstreifen auf dem Wege über eine geodätische Strecke zurück. Der Vorgang ist einfach: Ohne die Vorstellung von der ebenen Strecke zu benützen, wendet man im Streifen 1 die Formeln (2) an, aus denen man direkt s und t_1 erhält. Im Streifen 2 hat die geodätische Strecke s den Richtungswinkel t_2, der sich, wie schon erwähnt wurde, aus $t_2 = t_1 + \Delta\gamma = t_1 + \gamma_1 - \gamma_2$ ergibt; dieser Richtungswinkel und die Strecke s ist in (1) einzuführen, womit die Koordinaten von P im Streifen 2 erhalten werden. In der ersten Operation werden dabei die Koordinaten x, y als Werte der thermischen Parameter des Ellipsoids betrachtet, in die zweite Operation werden sie ebenfalls in dieser Bedeutung eingeführt, ihre Werte sind aber stets identisch mit denen der ebenen Koordinaten.

Der geschilderte Rechengang lässt sich, wie wir anschliessend zeigen wollen, in ein Formelpaar zusammenfassen. Für die Gauss-Krügerschen Koordinaten im 3°-System lauten die Formeln (3), hinreichend genau in einem Umkreis von 50 und mehr Kilometern um P_0, nach [2] beziehungsweise [3], [4]

$$s \cos t_1 = b_1 \Delta x + 2b_2 \Delta x \Delta y + 2b_3 \Delta x \Delta y^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} s \sin t_1 = {} & b_1 \Delta y - b^2 \Delta x^2 + b_2 \Delta y^2 - b_3 \Delta x^2 \Delta y \\ & + b_3 \Delta y^3 + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Hierin sind im Sinne unserer Aufgabenstellung die Koordinatendifferenzen aus $\Delta x = x_1 - x_{01}$, $\Delta y = y_1 - y_{01}$, das heisst für die Koordinaten von P_0 und P im Streifen 1 zu bilden; s ist die geodätische Strecke P_0P und t_1 deren geodätischer Richtungswinkel im Streifen 1 in P_0. Die Koeffizienten b_i sind aus

$$b_1 = \frac{1}{m}, \quad b_2 = -\frac{m_y}{2m^2}, \quad b_3 = -\frac{m_{yy}}{6m^2} \tag{5}$$

erklärt; hierin ist m eine Ortsfunktion, die man entweder als örtlichen Abbildungsmassstab oder als Masszahl der Dichte der Koordinatenlinien erklären kann. Nach [3] ist

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \dots; \tag{6}$$

daraus folgt

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2R^2} + \frac{5}{24}\frac{y^4}{R^4}, \quad \frac{1}{m^2} = 1 - \frac{y^2}{R^2} + \frac{2}{3}\frac{y^4}{R}. \tag{7}$$

In diesen Formeln ist y die Ordinate des Ausgangspunktes, also y_{01}, $R = \sqrt{MN}$ der Gausssche Krümmmungsradius, der für die Fusspunktsbreite von P_0 im Streifen 1 zu nehmen ist. Die Indices bei m in (5) zeigen partielle Ableitungen an; es ist

$$m_y = \frac{y}{R^2} + \frac{y^3}{6R^4} + \dots, \quad m_{yy} = \frac{1}{R^2} + \frac{y^2}{2R^4} + \dots \tag{8}$$

und, mit (5)

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2R^2} + \frac{5}{24}\frac{y^4}{R^4}, \\ b_2 &= -\frac{m_y}{2m^2} = -\frac{y}{2R^2} + \frac{5}{12}\frac{y^3}{R^4}, \\ b_3 &= -\frac{m_{yy}}{6m^2} = -\frac{1}{6R^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Die vorstehenden Koeffizienten sind, wie erklärt, für den Punkt P_0 (das heisst für seine Fusspunktsbreite) im Streifen 1, also für $x_{0,1}$ und $y_{0,1}$ zu nehmen; sie bleiben für alle Lagen von P gegenüber P_0 dieselben. Damit kann man sich nach (4) sowohl s als auch t_1 berechnet denken. Weiter denke man sich die Differenz der Meridiankonvergenzen $\Delta\gamma$ nach

$$\Delta\gamma = \gamma_{01} - \gamma_{02} \tag{10}$$

berechnet, damit ist

$$t_2 = t_1 + \Delta\gamma, \tag{11}$$

womit man gemeinsam mit der geodätischen Strecke s in die nunmehr auf den zweiten Streifen bezogene erste Hauptaufgabe einzugehen hat. Mit gleichem Geltungsbereich wie (4) lauten die Formeln hiefür – deren allgemeine Form haben wir in (1) angegeben –

$$\begin{aligned} x_2 - x_{02} = \Delta x_2 = {} & a_1 s \cos t_2 + 2a_2 s^2 \cos t_2 \sin t_2 \\ & + 2a_3 s^3 \cos t_2 \sin^2 t_2 + \dots \\ y_2 - y_{02} = \Delta y_2 = {} & a_1 s \sin t_2 - a_2 s^2 \cos^2 t_2 + a_2 s^2 \sin t_2 \\ & - a_3 s^3 \cos^2 t_2 \sin t_2 + a_3 s^3 \sin^3 t_2 + \dots \end{aligned} \tag{12}$$

mit

$$a_1 = m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}, \quad a_2 = \frac{y}{2R^2} + \frac{y^3}{3R^4},$$

$$a_3 = \frac{1}{6R^2}. \tag{13}$$

Die hierin auftretenden Koeffizienten sind nunmehr für P_0 im Streifen 2, das heisst für seine durch $x_{0,2}$ gegebene Fusspunktsbreite und für $y_{0,2}$ zu nehmen. Liegt P_0 am Symmetriemeridian der beiden Streifen, dann ist $y_{02} = -y_{01}$ und die Fusspunktsbreiten sind zufolge $x_{02} = x_{01}$ dieselben. Setzen wir in weiterer Folge $t_2 = t_1 + \Delta\gamma$ und tragen wir dies in (12) ein, so können wir mit

$$\Delta x_2 = x_2 - x_{02}, \quad \Delta y_2 = y_2 - y_{02}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= a_1 s \cos (t_1 + \Delta\gamma) + \dots \\ \Delta y_2 &= a_1 s \sin (t_1 + \Delta\gamma) + \dots \end{aligned}$$

aufstellen, die mit (4) und (13) schliesslich zu den Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \Delta x_2 = {} & [a_1 b_1 \cos\Delta\gamma]\, \Delta x_1 - [a_1 b_1 \sin\Delta\gamma]\, \Delta y_1 \\ & + [a_1 b_2 \sin\Delta\gamma + a_2 b_1^2 \sin 2\Delta\gamma]\, (\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) \\ & + [2a_1 b_2 \cos\Delta\gamma + 2a_2 b_1^2 \cos 2\Delta\gamma]\, \Delta x_1 \Delta y_1 \\ & + [-2a_2 b_1 b_2 \cos 2\Delta\gamma]\, (\Delta x_1^3 - 3\Delta x_1 \Delta y_1^2) \\ & + [a_3 b_1^3 \sin\Delta\gamma]\, (3\Delta x_1^2 \Delta y_1 - \Delta y_1^3) \end{aligned} \tag{14a}$$

$$\begin{aligned} \Delta y_2 = {} & [a_1 b_1 \sin\Delta\gamma]\, \Delta x_1 + [a_1 b_1 \cos\Delta\gamma]\, \Delta y_1 \\ & + [-a_1 b_2 \cos\Delta\gamma - a_2 b_1^2 \cos 2\Delta\gamma]\, (\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) \\ & + [2a_1 b_2 \sin\Delta\gamma + 2a_2 b_1^2 \sin 2\Delta\gamma]\, \Delta x_1 \Delta y_1 \\ & + [-a_3 b_1^3 \sin\Delta\gamma]\, (\Delta x_1^3 - 3\Delta x_1 \Delta y_1^2) \\ & + [-2a_2 b_1 b_2 \cos 2\Delta\gamma]\, (3\Delta x_1^2 \Delta y_1 - \Delta y_1^3) \end{aligned} \tag{14b}$$

führen. Hierin sind die Koeffizienten b für den Punkt P_0 im Streifen 1 ($P_{0,1}$ mit $x_{0,1}$, $y_{0,1}$), die Koeffizienten a für den Punkt P_0 im Streifen 2 ($P_{0,2}$ mit $x_{0,2}$, $y_{0,2}$) zu nehmen. Erteilen wir allen auf P_0 im Streifen 1 bezogenen Grössen den Index 1, im Streifen 2 den Index 2, so ergeben sich die Koeffizienten in (14) wie folgt:

$$a_1b_1 = \left(1 + \frac{y_{02}^2}{2R_2^2} + \frac{y_{02}^4}{24R_2^4}\right)\left(1 - \frac{y_{01}^2}{2R_1^2} + \frac{5}{24}\frac{y_{01}^4}{R_1^4}\right)$$

$$a_1b_2 = \frac{y_{01}}{2R_1^2} - \frac{y_{01}}{4R_1^2}\left(\frac{y_{02}^2}{R_2^2} - \frac{5}{3}\frac{y_{01}^2}{R_1^2}\right)$$

$$a_2b_1^2 = \frac{y_{02}}{2R_2^2} - \frac{y_{02}}{R_2^2}\left(\frac{y_{01}^2}{2R_1^2} - \frac{y_{02}^2}{3R_2^2}\right)$$

$$a_3b_1^3 = \frac{1}{6R_2^2} + \frac{y_{02}^2}{4R_2^4} - \frac{y_{01}^2}{4R_1^2R_2^2}$$

$$a_2b_1b_2 = -\frac{y_{01}\,y_{02}}{4R_1^2R_2^2}. \qquad (15)$$

Liegt der Punkt P_0 am Symmetriemeridian der beiden Streifen, so ist wegen $x_{0.2} = x_{0.1}$, also der gleichen Fusspunktsbreiten, $R_1 = R_2 = R$ und $y_{0.2} = -y_{0.1}$; führt man dies in (15) ein, so erhält man die auf diese Nullpunktslage bezogenen Koeffizienten mit

$$a_1b_1 = 1, \qquad a_1b_2 = -\frac{y_{01}}{2R^2} + \frac{y_{01}^3}{6R^4}, \qquad a_2b_1^2 = a_1b_2,$$

$$a_3b_1^3 = \frac{1}{6R^2}, \quad a_2b_1b_2 = \frac{y_{01}^2}{4R^4}. \qquad (16)$$

Das mit (14) bis (16) mitgeteilte Formelsystem entspricht formal den in der Literatur [3], [4] u. a. angegebenen Formeln; dies muss so sein, da die allgemeine Form der Transformationsgleichungen aus einer Reihenentwicklung der analytischen Funktion

$$\Delta x_2 + i\Delta y_2 = f(\Delta x_1 + i\Delta y_1)$$

hervorgeht. Der Aufbau ist aber mit den bekannten Formeln nicht identisch, und der damit gebotene Vorteil liegt einerseits darin, dass man den Ausgangspunkt P_0 an beliebiger Stelle annehmen kann und dass man anderseits zur Berechnung der Koeffizienten neben der Differenz der Meridiankonvergenzen lediglich zwei Hilfsgrössen (R_1 und R_2 in (15)), bei symmetrischer Lage des Ausgangspunktes nur sogar eine davon (R in (16)) zu berechnen hat.

Abschliessend teilen wir zwei Beispiele für die Anwendung der Formeln (14) mit, und zwar einmal mit den Koeffizienten (16), einmal mit den Koeffizienten (15). Im ersten Fall sei P_0 im Westsystem mit $x_{0.1} =$ 5 220 000,000, $y_{0.1} =$ 113 835,585, im Ostsystem mit $y_{0.2} = -$ 113 835,585 gegeben (Besselsches Ellipsoid). Es ist*

$$\begin{aligned}
\Delta x_2 = {} & 99\,926{,}411\,643\,\Delta x_1 \\
& - 3\,835{,}655\,890\,\Delta y_1 \\
& - 1{,}608\,617\,(\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) \\
& - 55{,}842\,570\,(\Delta x_1\Delta y_1) \\
& - 0{,}003\,902\,(\Delta x_1^3 - 3\Delta x_1\Delta y_1^2) \\
& - 0{,}157\,105\,(\Delta y_1^3 - 3\Delta x_1^2\Delta y_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta y_2 = {} & 3\,835{,}655\,890\,\Delta x_1 \\
& + 99\,926{,}411\,643\,\Delta y_1 \\
& + 27{,}921\,285\,(\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) \\
& - 3{,}217\,234\,(\Delta x_1\Delta y_1) \\
& - 0{,}157\,105\,(\Delta x_1^3 - 3\Delta x_1\Delta y_1^2) \\
& + 0{,}003\,902\,(\Delta y_1^3 - 3\Delta x_1^2\Delta y_1).
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall habe P_0 im Westsystem die Koordinaten $x_{0.1} =$ 5 220 000,000, $y_{0.1} =$ 90 000,000, im Ostsystem $x_{0.2} =$ 5 220 914,345, $y_{0.2} = -$ 137 655,216. Die Transformationsformeln lauten damit

$$\begin{aligned}
\Delta x_2 = {} & 99\,939{,}721\,30\,\Delta x_1 \\
& - 3\,836{,}449\,84\,\Delta y_1 \\
& - 1{,}721\,10\,(\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) \\
& - 55{,}836\,82\,(\Delta x_1\Delta y_1) \\
& - 0{,}003\,73\,(\Delta x_1^3 - 3\Delta x_1\Delta y_1^2) \\
& - 0{,}157\,18\,(\Delta y_1^3 - 3\Delta x_1^2\Delta y_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta y_2 = {} & 3\,836{,}449\,84\,\Delta x_1 \\
& + 99\,939{,}721\,30\,\Delta y_1 \\
& + 27{,}918\,41\,(\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) \\
& - 3{,}442\,20\,(\Delta x_1\Delta y_1) \\
& - 0{,}157\,18\,(\Delta x_1^3 - 3\Delta x_1\Delta y_1^2) \\
& + 0{,}003\,73\,(\Delta_1^3 - 3\Delta x_1^2\Delta y_1).
\end{aligned}$$

Zur Verprobung dieser Formeln wird im Westsystem ein Punkt P mit

$x_1 =$ 5 250 000,000 $\qquad y_1 =$ 143 866,876

angenommen; im Ostsystem hat dieser die Koordinaten (die Werte sind aus [4] berechnet)

$x_2 =$ 5 248 821,004 $\qquad y_2 = -$82 675,983.

Aus der Umformung mit dem ersten Formelsystem erhält man

$x_2 =$ 5 248 821,003 $\qquad y_2 = -$82 675,984,

aus dem zweiten Formelsystem

$x_2 =$ 5 248 821,006 $\qquad y_2 = -$82 675,983,

als eine hinreichend gute Übereinstimmung.

Literatur

[1] *Wolfrum, O.*: Koordinatentransformation durch Reduktion auf die geodätische Linie, Allgemeine Vermessungsnachrichten 1973, Seite 179.

[2] *Hristow, Wl. K.*: Berechnung der Koordinatendifferenzen und der Ordinatenkonvergenz aus der Länge und dem Richtungswinkel einer geodätischen Strecke für eine beliebige Fläche und ein beliebiges isothermes Koordinatensystem, Zeitschrift für Vermessungswesen 1937, Seite 171.

[3] *Hristow, Wl. K.*: Die Gauss-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid, Berlin 1943.

[4] *Hubeny, K.*: Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids, Sonderheft 13 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, 1953.

Adresse des Verfassers
o. Professor Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Hubeny,
Rechbauerstrasse 12, A-8010 Graz

* Δx_1 und Δy_1 ist in Einheiten von 10^5 Metern einzuführen.