

# Transformationen mit ebenen konformen Koordinaten

Autor(en): **Schnädelbach, K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mensuration, photogrammétrie, génie rural**

Band (Jahr): **73-F (1975)**

Heft 3-4: **Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag**

PDF erstellt am: **26.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-227524>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Transformationen mit ebenen konformen Koordinaten

K. Schnädelbach, München

## 1. Vorbemerkung

Für Transformationsrechnungen zwischen ebenen konformen Koordinaten  $(x, y)$  und geographischen Koordinaten  $(B, l)$  auf dem Ellipsoid, wobei  $y$  und  $l$  auf einen Hauptmeridian bezogen sind, werden in der Regel Reihenentwicklungen der analytischen Funktion

$$x + iy = F(q(B) + il)$$

benutzt. Für die konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene lassen sich dagegen geschlossene Ausdrücke angeben, die, sonst vergleichbar mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie, die Ordinate  $y$  stets in Verbindung mit hyperbolischen Funktionen enthalten. Krüger formte die Reihenentwicklungen für die Abbildung Ellipsoid-Ebene so um, dass zu dem geschlossenen «sphärischen» Anteil Kugel-Ebene noch sphäroidische Zusatzglieder treten [5]. Dabei lässt sich für einige Beziehungen erreichen, dass die Zuschlagsglieder klein von der Ordnung  $e'^6$  werden ( $e' = 2$ . numerische Exzentrizität), wenn, was in unserem Falle zutrifft, für diese Abschätzung

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 \quad \text{beziehungsweise} \quad \left(\frac{y}{c}\right)^2$$

als klein von der Ordnung  $e'^2$  vorausgesetzt werden. Der Gebrauch dieser Formeln wurde allerdings erst durch das Erscheinen elektronischer Tischrechner ermöglicht und nützlich. Hirvonen veröffentlichte Algorithmen und Programme für die oben genannten Koordinatenübergänge unter anderem in [3] und beurteilte deren Genauigkeit für Ordinaten kleiner 200 km als ausreichend für alle praktischen Bedürfnisse.

Ziel dieser Untersuchung soll es daher sein, die Eignung dieses Formelapparats für die Rechnung in  $3^\circ$ - beziehungsweise  $6^\circ$ -Meridianstreifen eingehender numerisch zu untersuchen. Dabei werden einzelne Beziehungen bezüglich der Grösse der Korrekturglieder in eine noch günstigere Form gebracht werden. Schliesslich wird auch ein Verfahren für die Umformung zwischen benachbarten Meridianstreifen angesprochen, zu dem sich bei Hirvonen in [2] ebenfalls erste Hinweise finden.

## 2. Beziehungen zwischen geographischer Breite $B$ und Fusspunktbreite $B_f$

Wir gehen aus von der Transformationsformel (zum Beispiel [5])

$$B = B_f - \frac{1}{2} \rho t_f V_f^2 \bar{y}^2 \left[ 1 - \frac{V_f^2}{12} (V_f^2 [5 - 4\eta_f^2] + 3t_f^2 [1 - 3\eta_f^2]) \bar{y}^2 \right], \quad (1)$$

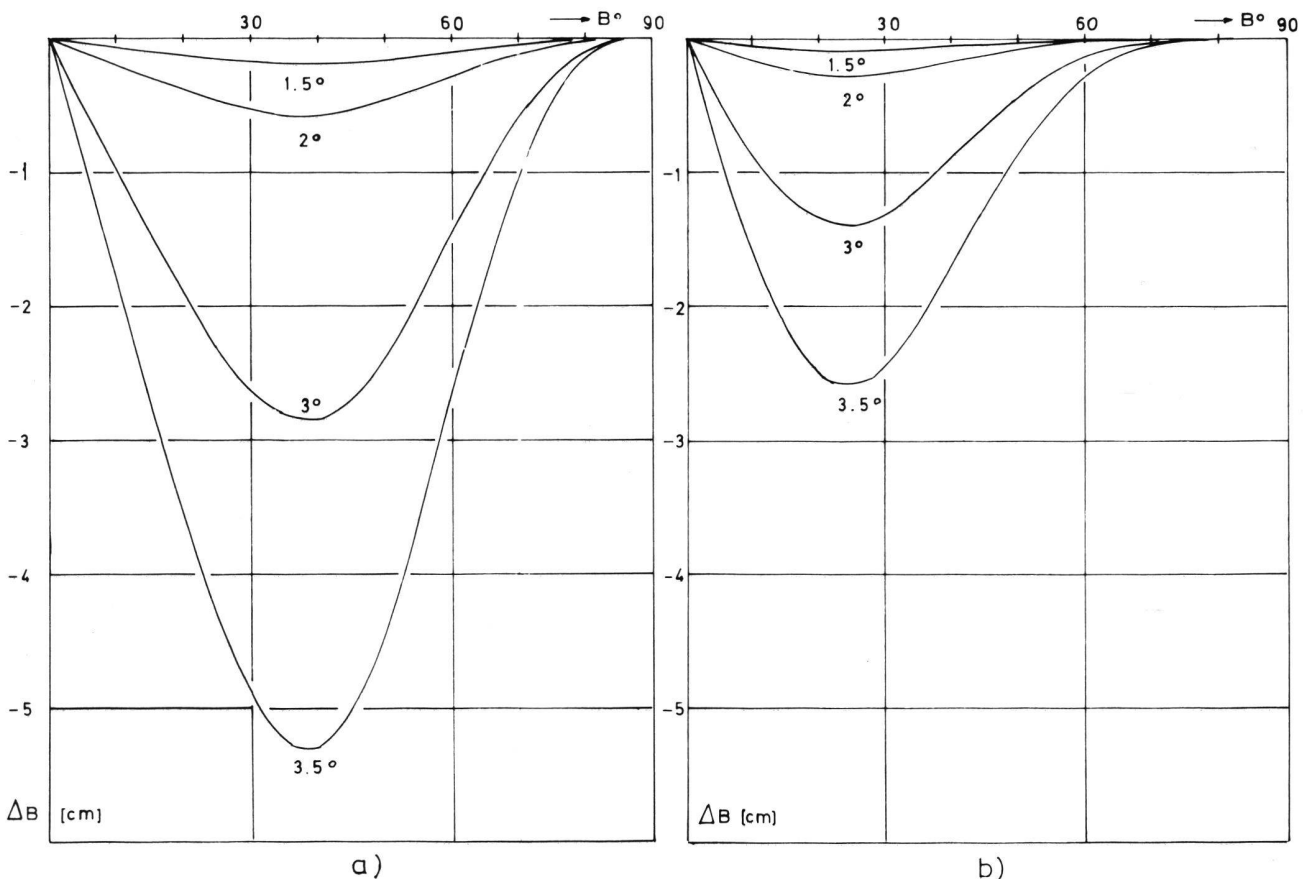


Abbildung 1: Korrekturglied  $\Delta B$  der Formeln (2) beziehungsweise (3) für Linien konstanten Längenunterschiedes  $l$

in der bedeuten:

$$V^2 = 1 + e^2 \cos^2 B = 1 + \eta^2, \\ t = \operatorname{tg} B,$$

$$\bar{y} = \frac{y}{c} \text{ mit } c = \text{Polkrümmungshalbmesser.}$$

Der Index f deute darauf hin, dass der indizierte Wert an der Stelle  $B_f$  zu rechnen ist. Aus (1) leitet Krüger [5] ab

$$\sin B = \frac{\sin B_f}{\cosh(\bar{y} V_f^2)} \left[ 1 - \frac{1}{6} \eta_f^2 \left( 1 + 3 \frac{t_f^2}{V_f^2} \right) (\bar{y} V_f^2)^4 \right] + G_{l_e} \quad (2)$$

Die Grösse des Korrekturgliedes in Abhängigkeit von B und l lässt sich der Abbildung 1a entnehmen. Es erreicht für  $l \leq 2^\circ$  (3°-Streifen) Maximalwerte von 6 mm, für  $l \leq 3,5^\circ$  (6°-Streifen) Maximalwerte von 53 mm.

Eine noch bessere Annäherung des «sphärischen» Terms in (2) an (1) wird erreicht, wenn V in der Funktion  $\cosh(\bar{y} V_f^2)$  an der Mittelbreite  $\frac{1}{2}(B + B_f)$  berechnet wird. Dieser Wert werde mit  $\bar{V}$  bezeichnet. Aus (2) folgt dann nach einigen Zwischenrechnungen

$$\sin B = \frac{\sin B_f}{\cosh(\bar{y} \bar{V}^2)} \left[ 1 - \frac{1}{6} \eta_f^2 (\bar{y} \bar{V}^2)^4 \right] + G_{l_e} \quad (3)$$

Damit fällt gegenüber (2) im Korrekturglied der Term mit  $t^2$  weg, und die Maximalwerte verringern sich auf 3 mm für 3°-Streifen und 26 mm für 6°-Streifen

(siehe Abb. 1b), wobei im 3°-Streifen für  $B > 50^\circ$  mit dem «sphärischen» Anteil eine Transformationsgenauigkeit von  $< 1$  mm erreicht wird. Bei der Auswertung von (3) wird allerdings ein iteratives Vorgehen notwendig, da für die Bildung von  $\bar{V}$  ein Näherungswert der Breite B benötigt wird. Dabei kann im ersten Schritt genügend  $\bar{V} = 1$  gesetzt werden.

Aus der Umkehrung von (1)

$$x - G_B = \frac{1}{2} \frac{c}{\bar{V}} \left( \frac{1}{\rho} \right)^2 t \cos^2 B \left[ 1 + \frac{1}{12} (V^2 [5 + 4\eta^2] - t^2) \left( \frac{1}{\rho} \right)^2 \cos^2 B \right] + G_{l_0},$$

worin  $G_B$  der Meridianbogen bis zur Breite B ist, wird von Krüger zur Berechnung der Fusspunktbreite abgeleitet

$$\operatorname{tg} B_f = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos(Vl)} \left[ 1 + \frac{1}{6} e^2 V^2 (V^2 - 2t^2) \left( \frac{1}{\rho} \right)^4 \cos^4 B \right] + G_{l_e} \quad (4)$$

Darin sind die nicht indizierten Werte t und V für die Breite B zu berechnen. Die Grösse des Korrekturgliedes lässt sich der Abbildung 2a entnehmen. Es erreicht maximale Beträge von 3 mm bei 3°-Streifen und 19 mm bei 6°-Streifen.

Durch die Einführung von  $\bar{V}$  in  $\cos(Vl)$  im Nenner vor der Klammer kann auch hier, besonders für Breiten zwischen  $45^\circ$  bis  $70^\circ$ , die Grösse des Korrekturgliedes

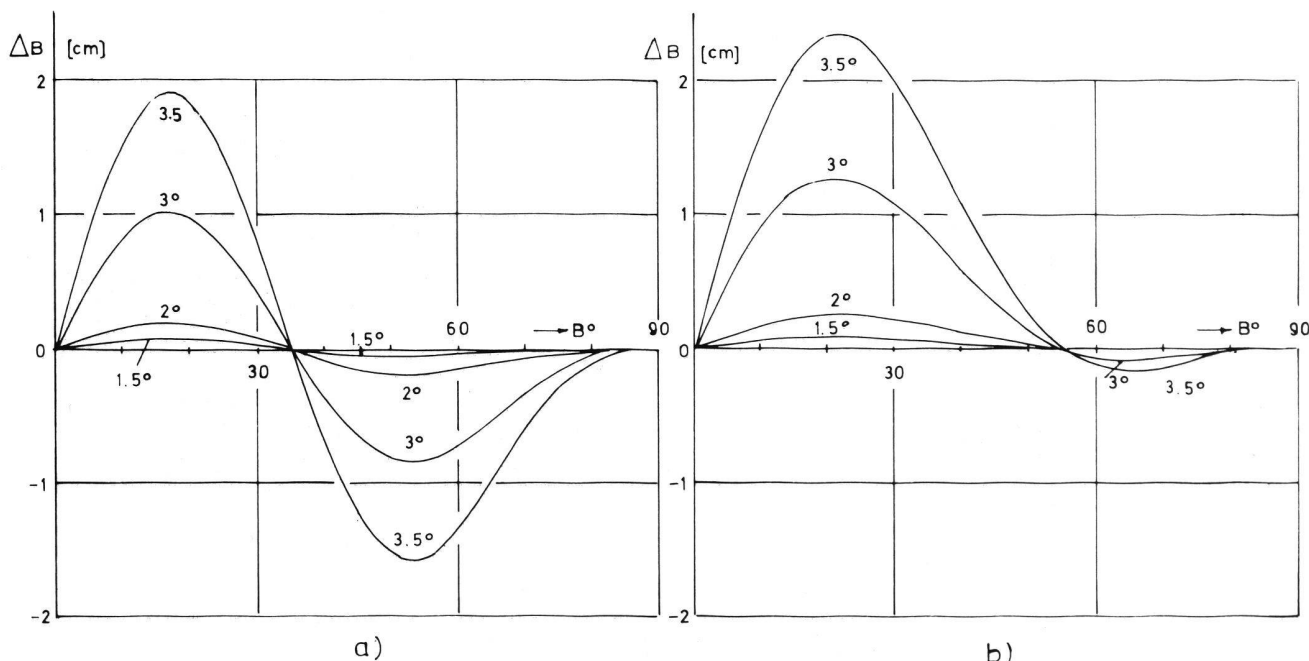


Abbildung 2: Korrekturglied  $\Delta B$  der Formeln (4) beziehungsweise (5) für Linien konstanten Längenunterschiedes l

wirksam verkleinert werden (s. Abb. 2b). Aus (4) folgt dabei nach einigen Umformungen

$$\operatorname{tg} B_f = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos(\bar{V}l)} \left[ 1 + \frac{1}{12} e^2 V^2 (2V^2 - t^2) \left( \frac{1}{\rho} \right)^4 \cos^4 B \right] + Gl_e. \quad (5)$$

Es zeigt sich, dass, bei sonst etwa gleichen Maximalwerten wie (4), für  $B > 47^\circ$  das Korrekturglied für  $3^\circ$ -Streifen  $< 1$  mm, für  $6^\circ$ -Streifen  $< 5$  mm wird. Da  $\cos(IV) \cong 1$ , können die Formeln (4) und (5) auch einer gleichgenauen Berechnung von  $B$  aus  $B_f$  zugrunde gelegt werden. Aus (4) beziehungsweise (5) ergibt sich dazu

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} B_f \cos(Vl) \left[ 1 - \frac{1}{6} e^2 V^2 (V^2 - 2t^2) \left( \frac{1}{\rho} \right)^4 \cos^4 B \right] \quad (6)$$

bzw.

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} B_f \cos(\bar{V}l) \left[ 1 - \frac{1}{12} e^2 V^2 (2V^2 - t^2) \left( \frac{1}{\rho} \right)^4 \cos^4 B \right]. \quad (7)$$

Die Auswertung von (5) bis (7) erfordert einen iterativen Rechengang, da in (5) zur Berechnung von  $\bar{V}$  die Breite  $B_f$  und in (6) beziehungsweise (7) zur Berechnung von  $V$  beziehungsweise  $\bar{V}$  die Breite  $B$  bekannt sein muss. Dabei kann jedoch, wie oben, im ersten Rechenschritt genügend  $\bar{V} = V = 1$  gesetzt werden.

### 3. Beziehungen zwischen geographischer Länge $l$ und der Ordinate $y$

Zur Berechnung des geographischen Längenunterschieds  $l$  zum Hauptmeridian bei gegebener Ordinate  $y$  gilt bekanntlich [4], [5]

$$\frac{l}{\rho} = \frac{V_f}{\cos B_f} \cdot \frac{y}{c} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{6} (V_f^2 + 2t_f^2) \left( \frac{y}{c} V_f \right)^2 + \frac{1}{120} (5 + 28t_f^2 + 24t_f^4) \left( \frac{y}{c} V_f \right)^4 \pm \dots \right]. \quad (8)$$

Aus (8) findet Krüger zunächst

$$\operatorname{tg} l \cos B_f = \frac{y}{c} V_f + \frac{1}{6} (1 - \eta_f^2) \left( \frac{y}{c} V_f \right)^3 + \frac{1}{120} (1 - 14\eta_f^2 - 12\eta_f^2 t_f^2) \left( \frac{y}{c} V_f \right)^5 + \dots$$

Wird auf der rechten Seite  $V_f$  ausgeklammert und zugleich auf  $\bar{y}$  übergegangen, so folgt

$$\frac{1}{V_f} \operatorname{tg} l \cos B_f = \bar{y} + \frac{1}{6} (1 - \eta_f^2) \bar{y}^3 + \frac{1}{120} (1 - 12\eta_f^2 - 12\eta_f^2 t_f^2) \bar{y}^5 \pm \dots$$

und daraus schliesslich, wenn

$$\sinh \bar{y} = \bar{y} + \frac{1}{6} \bar{y}^3 + \frac{1}{120} \bar{y}^5$$

beachtet wird,

$$\operatorname{tg} l = \frac{V_f}{\cos B_f} \sinh \bar{y} \left[ 1 - \frac{\eta_f^4}{6} \bar{y}^2 - \frac{e^2}{10} \bar{y}^4 \right] + Gl_e. \quad (9)$$

Diese Formel, jedoch ohne das zweite Korrekturglied, findet sich auch bei Hirvonen [3]. Im Gegensatz zu Krüger [5] sind hier bereits die ersten Korrekturglieder klein von der Ordnung  $e^6$ . Ihre Grösse ist aus Abbildung 3 zu ersehen. Im Äquator werden maximale Werte erreicht, 3 mm bei  $3^\circ$ -Streifen, 15 mm bei  $6^\circ$ -Streifen. Ohne das Korrekturglied ist die Transformationsgenauigkeit für  $l \leq 2^\circ$  und  $B > 40^\circ$  besser als 1 mm, für  $l \leq 3,5^\circ$  und  $B > 33^\circ$  besser als 1 cm.

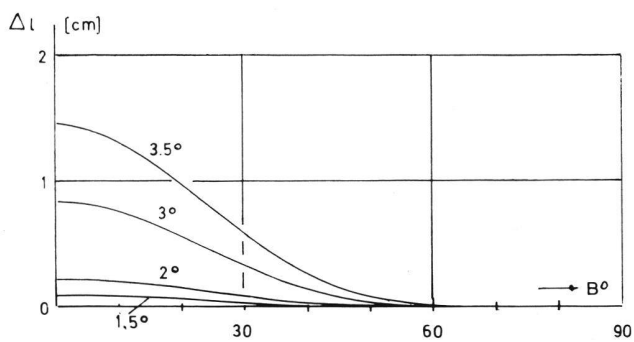


Abbildung 3: Korrekturglied  $\Delta l$  der Formel (9) für Linien konstanten Längenunterschiedes  $l$

Für die Umkehrung  $y = f(l)$  lassen sich ebenso günstige Formeln nicht finden. Zweckmässig wird daher von (9) ausgegangen und durch Umkehrung erhalten

$$\sinh \bar{y} = \frac{1}{V_f} \operatorname{tg} l \cos B_f \left[ 1 + \frac{\eta_f^4}{6} \bar{y}^2 + \frac{e^2}{10} \bar{y}^4 \right] + Gl_e. \quad (10)$$

Bei der Auswertung von (10) muss vorweg aus (4) beziehungsweise (5) die Breite  $B_f$  des Fusspunktes berechnet worden sein. Nachdem  $\bar{y} \cong l \cos B_f$  und  $V_f \cong 1$ , ist die Genauigkeit der Formel (10) derjenigen von (9) adäquat.

### 4. Meridiankonvergenz

Zur Berechnung der ebenen Meridiankonvergenz  $\bar{c}$  gilt [5]

$$\operatorname{tg} \bar{c} = t_f \left[ \frac{y}{c} V_f + \frac{1}{3} (-1 + \eta_f^2 + 2\eta_f^4) \left( \frac{y}{c} \right)^3 V_f^3 + \frac{1}{15} (2 + 2\eta_f^2 + 6t_f^2 \eta_f^2) \left( \frac{y}{c} \right)^5 V_f^5 \right] + Gl_e.$$

Wird hierin – wie im Abschnitt 3 –  $V_f$  ausgeklammert und auf  $\bar{y}$  übergegangen, so folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{c} = V_f t_f^2 \left[ \bar{y} - \frac{1}{3} (1 - 3\eta_f^4 - 2\eta_f^6) \bar{y}^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{15} (2 + 6\eta_f^2 + 6\eta_f^2 t_f^2) \bar{y}^5 \right] + Gl_e, \end{aligned}$$

und, analog dem Vorgehen von Krüger, nach dem Herausziehen von

$$\tanh \bar{y} = \bar{y} - \frac{1}{3} \bar{y}^3 + \frac{2}{15} \bar{y}^5$$

schliesslich

$$\operatorname{tg} \bar{c} = V_f \operatorname{tg} B_f \tanh \bar{y} \left[ 1 + \eta_f^4 \bar{y}^2 + \frac{2}{5} e^{\prime 2} \bar{y}^4 \right] + Gl_e. \quad (11)$$

Damit ist das Korrekturglied ebenfalls nur von der Ordnung  $e^6$ . Es ist für  $l \leq 2^\circ$  kleiner als  $0,0001''$ , für  $l \leq 3,5^\circ$  kleiner als  $0,0007''$  und dürfte daher nur sehr selten zu berücksichtigen sein.

## 5. Meridianbogen

Bei allen Übergängen zwischen ebenen konformen und geographischen Koordinaten wird eine Meridianbogenberechnung notwendig. Nach dem Vorschlag von Helmert [1] wird dabei, wegen der besten Konvergenz in den Reihen für die Koeffizienten, am günstigsten von einer Reihenentwicklung in Abhängigkeit von  $n = \frac{a-b}{a+b}$

Gebrauch gemacht, worin  $a$  beziehungsweise  $b$  die grosse beziehungsweise kleine Halbachse der Meridianellipse bedeuten. Nach Helmert gilt dann für den Meridianbogen  $G$

$$\begin{aligned} G = \frac{a}{1+n} \left[ \left( 1 + \frac{1}{8} n^2 \right)^2 \frac{B}{\rho} - \frac{3}{2} n \left( 1 - \frac{1}{8} n^2 \right) \sin 2B + \right. \\ \left. + \frac{15}{16} n^2 \left( 1 - \frac{1}{4} n^2 \right) \sin 4B - \frac{35}{48} n^3 \sin 6B \right], \end{aligned} \quad (12)$$

während sich für die Umkehrung mit

$$B' = \frac{\rho (1+n)}{a \left( 1 + \frac{1}{8} n^2 \right)^2} \cdot G \quad (13)$$

ergibt

$$\begin{aligned} \frac{B}{\rho} = \frac{B'}{\rho} + \frac{3}{2} n \left( 1 - \frac{9}{16} n^2 \right) \sin 2B' + \frac{n^2}{16} \left( 21 - \frac{55}{2} n^2 \right) \sin 4B' + \\ + \frac{151}{96} n^3 \sin 6B'. \end{aligned} \quad (14)$$

Wie leicht abzuschätzen ist, repräsentieren die Formeln (12) und (14) auch ohne Glieder  $\sin 8B$  eine Transformationsgenauigkeit von besser als 1 mm für beliebige Breiten. Die Glieder mit  $\sin 8B$  beziehungsweise  $\sin 8B'$  erreichen maximale Werte von 0,03 mm beziehungsweise 0,1 mm.

Von Vincenty [6] wurde die Umformung dieser Reihen in Abhängigkeit von  $\cos^n B$  beziehungsweise  $\cos^n B'$  vorgeschlagen mit dem Ziel einer rationelleren Berechnung nach dem Horner Schema. Aus (12) und (14) folgt dabei – hier mit einer anderen Zusammenfassung der Koeffizienten – nach einigen Rechnungen

$$\begin{aligned} G = \frac{a}{1+n} \left[ \left( 1 + \frac{1}{8} n^2 \right)^2 \frac{B}{\rho} - \sin B \cos B \left[ -n \left( 3 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{15}{4} n + 4n^2 + \frac{255}{64} n^3 \right) + \cos^2 B \left[ n^2 \left( \frac{15}{2} + \frac{70}{3} n + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1515}{32} n^2 \right) + \cos^2 B \left[ -n^3 \left( \frac{70}{3} + \frac{945}{8} n \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{315}{4} n^4 \cos^2 B \right] \right] \right] \quad (15) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} B = B' + \rho \sin B' \cos B' \left[ \left( 3 - \frac{21}{4} n + \frac{31}{4} n^2 - \frac{657}{64} n^3 \right) n + \right. \\ \left. + \cos^2 B' \left[ \left( \frac{21}{2} - \frac{151}{3} n + \frac{5445}{32} n^2 \right) n^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos^2 B' \left[ \left( \frac{151}{3} - \frac{3291}{8} n \right) n^3 + \frac{1097}{4} n^4 \cos^2 B' \right] \right] \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Insgesamt gesehen, konvergieren jedoch die Reihen (15) und (16) schlechter. Bei gleicher Anzahl der Reihenglieder, das heisst in (15) und (16) ohne  $\cos^2 B$  beziehungsweise  $\cos^2 B'$ , können für Breiten um  $20^\circ$  Fehler bis 1 mm beziehungsweise 3 mm auftreten. Für Breiten  $B > 50^\circ$  sind allerdings die Systeme (12) bis (14) beziehungsweise (15) und (16) gleich gut für eine millimetergenaue Rechnung geeignet.

## 6. Umformungen zwischen geographischen und ebenen konformen Koordinaten

Mit den angegebenen Formeln lassen sich nun folgende Algorithmen zusammenstellen:

6.1 Geographische Koordinaten  $(B, l)$  in ebene konforme Koordinaten  $(x, y)$

$$\operatorname{tg} B_f = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos(VI)} \quad (17)$$

$$x = G(B_f) \quad \text{mit (12) bzw. (15)}$$

$$y = c \operatorname{arsinh} \left( \frac{1}{V_f} \operatorname{tg} l \cos B_f \right) \quad (18)$$

$$\bar{c} = \operatorname{arctg} \left( V_f \operatorname{tg} B_f \tanh \frac{y}{c} \right).$$

Dieser Formelsatz gewährleistet über alle Breiten  $B$  eine Transformationsgenauigkeit für  $l \leq 2^\circ$  von besser als 3 mm; für  $2^\circ < l \leq 3,5^\circ$  können Abweichungen bis zu 2 cm auftreten. Allerdings kann durch die Verwendung von

$$\operatorname{tg} B_f = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos(\bar{V}_1)} \quad (17a)$$

anstelle von (17) die Genauigkeit bei Breiten  $B > 47^\circ$  auf 1 mm für  $1 \leq 2^\circ$  und 5 mm für  $2^\circ < 1 \leq 3,5^\circ$  gesteigert werden. Bei der iterativen Auswertung von (17a) wird dabei zweckmässig im ersten Schritt  $\bar{V} = 1$  gesetzt.

6.2 Ebene konforme Koordinaten  $(x, y)$  in geographische Koordinaten  $(B, l)$

$$B_f = G^{-1}(x) \quad \text{mit (13) und (14) bzw. (16)}$$

$$l = \operatorname{arctg} \left( \frac{V_f}{\cos B_f} \sinh \frac{y}{c} \right) \quad (19)$$

$$B = \operatorname{arctg} [\operatorname{tg} B_f \cos(\bar{V}_1)] \quad (20)$$

$$\bar{c} = \operatorname{arctg} \left( V_f \operatorname{tg} B_f \tanh \frac{y}{c} \right).$$

Zur Berechnung von (20) ist ein iterativer Schritt notwendig, da  $B$  vorweg für  $\bar{V}$  nicht bekannt ist. Dies würde auch für die einfachere Formel mit  $V$  zutreffen. Damit lohnt sich eine differenziertere Verfahrensweise analog der Verwendung von (17) und (17a) nicht. Nachdem also  $B$  zunächst aus (20) mit  $\bar{V} = 1$  genügend berechnet wurde, kann im weiteren Verlauf auch  $\bar{V}$  ohne grossen Mehraufwand bestimmt werden. Für die Transformationsgenauigkeit gilt dann analog die obige Bemerkung bezüglich der Verwendung von (17a).

## 7. Transformationen zwischen benachbarten Meridianstreifen

Nach einem von Hirvonen skizzierten Vorschlag [2] können die eben betrachteten Formeln auch einer Koordinatentransformation zwischen Nachbarstreifen unterlegt werden, also einem Rechengang über die geographischen Koordinaten. Sind  $(x_1, y_1)$  die ebenen konformen Koordinaten eines Punktes  $P$  im System 1 und  $(x_2, y_2)$  im Nachbarstreifen 2, so ergibt sich dazu:

$$B_{f_1} = G^{-1}(x_1), \quad (21)$$

wobei  $B_{f_1}$  = Fusspunktbreite im Streifen 1 mit (13), (14) beziehungsweise (16) berechnet wird,

$$l_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{V_{f_1}}{\cos B_{f_1}} \sinh \frac{y_1}{c} \right) \quad (22)$$

$$l_2 = l_1 \pm 3^\circ \text{ bzw. } 6^\circ.$$

Über (20), angewandt in beiden Streifen, folgt

$$\operatorname{tg} B_{f_2} = \operatorname{tg} B_{f_1} \frac{\cos(\bar{V}_1 l_1)}{\cos(\bar{V}_2 l_2)} = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos(\bar{V}_2 l_2)} \quad (23)$$

worin  $\bar{V}_1$  an der Stelle  $1/2 (B + B_{f_1})$  und  $\bar{V}_2$  an der Stelle  $1/2 (B + B_{f_2})$  zu berechnen sind. Genügend genaue Werte für  $B$  und  $B_{f_2}$  können dazu aus (23) gewonnen werden, indem, wie oben, in einem ersten Schritt  $\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = 1$  gesetzt wird. Weiter ist, analog (18)

$$y_2 = c \operatorname{arsinh} \left( \frac{\cos B_{f_2}}{V_{f_2}} \operatorname{tg} l_2 \right) \quad (24)$$

sowie mit einer genäherten Meridianbogenberechnung zwischen den nahe beieinander liegenden Breiten  $B_{f_1}$  und  $B_{f_2}$

$$x_2 = x_1 + \frac{M}{\rho} (B_{f_2} - B_{f_1}), \quad (25)$$

worin  $M$  mit

$$M = \frac{8c}{(V_{f_1} + V_{f_2})^3}$$

genügend an der Stelle  $1/2 (B_{f_1} + B_{f_2})$  erhalten wird. Zur Beurteilung der Transformationsgenauigkeit sind besonders die Formeln (23) und (22) mit (24) zu betrachten. Wird  $B_{f_2}$  anstatt über (23) mit den erweiterten Ausdrücken (5) und (7) berechnet, so kommt

$$\operatorname{tg} B_{f_2} = \operatorname{tg} B_{f_1} \frac{\cos(\bar{V}_1 l_1)}{\cos(\bar{V}_2 l_2)} \left[ 1 + \frac{1}{12} \frac{e^2}{\rho^4} V^2 (2V^2 - t^2) \cos^4 B (l_2^4 - l_1^4) \right],$$

woraus folgt, dass nur die Differenz der jeweiligen Korrekturglieder von (5) und (7) auf  $B_{f_2} \triangleq x_2$  wirksam wird. Dabei kann der Einfluss eines Fehlers  $dl_1$  aus (22) vernachlässigt werden.

Zur Beurteilung der Genauigkeit der Ordinate  $y_2$  ist zunächst von diesem Fehler  $dl_1$  auszugehen, für den sich über (9) und (22) errechnet

$$dl_1 = dl_2 = \frac{1}{2} \sin(2l_1) \bar{y}_1^2 \left( \frac{\eta_{f_1}^4}{6} + \frac{e^2}{10} \bar{y}_1^2 \right).$$

Weiter folgt, wenn wieder (10) statt (24) betrachtet und zugleich der Einfluss von  $dl_2$  berücksichtigt wird, genügend

$$d\bar{y}_2 = \left( \frac{\eta_{f_2}^4}{6} + \frac{e^2}{10} \bar{y}_2^2 \right) \bar{y}_2^3 - \left( \frac{\eta_{f_1}^4}{6} + \frac{e^2}{10} \bar{y}_1^2 \right) \bar{y}_1^3.$$

Da nun  $y_1$  und  $y_2$  in den praktischen Umformungsfällen ungleiches Vorzeichen haben, addieren sich die jeweiligen Korrekturglieder.

Auf Grund der obigen Abschätzungen für die Grösse der Korrektionsglieder wird damit die folgende Genauigkeitsaussage für die Transformationen mit dem Algorithmus (21) bis (25) im doppelten Koordinatenbereich möglich ( $1^\circ \leq l \leq 2^\circ$  bei  $3^\circ$ -Streifen,  $2,5^\circ \leq l \leq 3,5^\circ$  bei  $6^\circ$ -Streifen):

$3^\circ$ -Streifen:  $\pm 1$  mm für Breiten  $B > 45^\circ$

$6^\circ$ -Streifen:  $\pm 5$  mm für Breiten  $B > 48^\circ$ .

Der Maximalfehler — bei Breiten  $B$  um  $20^\circ$  — wird jedoch immer kleiner  $\pm 2$  cm bleiben.

### Literatur

- [1] *Helmert, F.R.*: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. 1. Teil, Leipzig 1880.

[2] *Hirvonen, R. A.*: Die programmgesteuerte elektronische Rechenmaschine, *Maanmittaus* 44 (1969), S. 85–87 (finn.).  
 [3] *Hirvonen, R. A.*: The Use of Subroutines in Geodetic Computations, *Maanmittaus* 45 (1970), S. 45–61.  
 [4] *Jordan/Eggert/Kneissl*: *Handbuch der Vermessungskunde*, Band IV, Stuttgart 1959.  
 [5] *Krüger, L.*: *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene*. Veröff. d. Königl. Preuss. Geod. Inst., NF, Nr. 52, Potsdam 1912.

[6] *Vincenty, T.*: The Meridional Distance Problem for Desk Computers. *Surv. Rev.* 1971, S. 136–140.

Adresse des Verfassers  
 Prof. Dr. Ing. Klaus Schnädelbach, Technische Universität,  
 Lehrstuhl für Geodäsie, Arcisstrasse 21, D-8 München

## Das Geoid in der Schweiz

A. Elmiger, Zürich

### 1. Einleitung

Die Bestimmung des Geoides – der Niveaufläche des Erdschwerefeldes in der mittleren Höhe der Weltmeere – gilt seit jeher als eine der Hauptaufgaben der Geodäsie. Auch im Zeitalter der Satellitengeodäsie und der dreidimensionalen Berechnungsmethoden hat sie ihre Bedeutung nicht verloren. Dies hängt damit zusammen – das geophysikalische Interesse am Geoid an sich sei hier nicht diskutiert –, dass aus praktischen Gründen das Geoid immer Bezugsfläche für die Meereshöhen bleiben wird, während für Lageberechnungen grösseren Ausmasses nach wie vor mit Vorteil ein günstig gelagertes Referenzellipsoid verwendet wird.

Zur Reduktion der Messungen von der Erdoberfläche auf das Ellipsoid braucht man Höhen über dem Ellipsoid, die sich zusammensetzen aus Meereshöhen (über dem Geoid) und Höhen des Geoides über dem Ellipsoid. Dies zeigt sich besonders bei der Reduktion von Distanzen: Während die Höhenlage der gemessenen Distanz über dem Ellipsoid zwar nicht kritisch ist (ein Höhenfehler von 6 m bewirkt einen Fehler an der reduzierten Distanz von  $10^{-6}$ ), können für die Reduktion stark geneigter Distanzen, wie sie in der praktischen Vermessung oft auftreten, ellipsoidische Höhendifferenzen und damit Geoidhöhendifferenzen mit cm-Genauigkeit – für Mekometermessungen gar mit mm-Genauigkeit – nötig sein.

Auch beim Übergang von einem geodätischen Bezugssystem in ein anderes lokales oder geozentrisches System ist die Kenntnis der Höhen des Geoides über dem Ellipsoid unumgänglich.

### 2. Kurzer Rückblick

Bevor auf neuere Arbeiten zur Geoidbestimmung in der Schweiz eingetreten wird, sei kurz an zwei früher ausgeführte, wesentliche Arbeiten in der Schweiz erinnert:

#### a) Bestimmung von Geoidprofilen durch astronomisches Nivellement

Vor 60 Jahren wurde mit der Bestimmung des Geoides in Nord-Süd- und Ost-West-Profilen begonnen: Meridian des St. Gotthard und Parallel von Zürich, die sich im Punkt Schwerzenbach, 10 km östlich von Zürich,

schneiden. Um das Gotthardprofil im Tessin bis an den Süzipfel der Schweiz führen zu können, musste noch ein kleines Parallelprofil bei Locarno und ein Meridianprofil durch Lugano gemessen werden. Gesamthaft wurde auf 102 Punkten je eine Lotabweichungskomponente durch astronomische Längen- oder Breitenbeobachtungen bestimmt, und eine grössere Zahl von Lotabweichungen interpoliert, so dass sich schliesslich ein durchschnittlicher Punktabstand von 3 bis 5 km ergab. Der Einfluss der Lotkrümmungen wurde aus Schweremessungen berechnet. Die Genauigkeit der so bestimmten Geoidhöhen beträgt etwa  $\pm 2$  bis 3 cm relativ zum Ausgangspunkt Schwerzenbach. Siehe [1] und Bände 19, 20, 22, 24 der *Astronomisch-geodätischen Arbeiten in der Schweiz*.

#### b) Flächenhafte Geoidbestimmung aus Höhenwinkelnetzen im Berner Oberland

In den Jahren 1953–1967 wurde auf Vorschlag von Prof. Kobold im Berner Oberland ein grösserer Versuch zur flächenhaften Geoidbestimmung und Lotabweichungsinterpolation aus Höhenwinkelmessungen mit astronomischen Stützpunkten durchgeführt. Es zeigte sich, dass die Methode wegen Refraktionsunsicherheiten nur im Hochgebirge zu befriedigenden Resultaten führt. Es ergaben sich Geoidhöhen mit mittleren Fehlern von max.  $\pm 10$  cm und interpolierte Lotabweichungen mit einer Genauigkeit von etwa  $\pm 2'' = \pm 6^{\text{cc}}$ . Näheres siehe Wunderlin [3].

### 3. Methoden der Geoidbestimmung

Im folgenden sollen zwei Methoden skizziert werden, die vom Verfasser am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Z zur flächenhaften Bestimmung des Geoides in der Schweiz benutzt worden sind.

#### a) Approximation mit Polynomen

Diese Methode hat schon Helmert vorgeschlagen. Eine praktische Realisierung des Vorschlages in grösserem Ausmass war vernünftigerweise aber erst möglich, seit Computer für die Durchführung der Berechnungen zur Verfügung stehen.

Die Höhen des Geoides über dem Referenzellipsoid werden hier durch zweidimensionale Polynome der Form

$$N = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n c_{ik} x^i y^k, \text{ wobei } i + k \leq n$$

approximiert. Man erhält dann Lotabweichungen (Komponenten der Flächennormalen) für diese Ersatz-