

Vereinfachte Theorie der Deformation eines Reflektors bei ungleichmässiger Temperatur

Autor(en): **Dalcher, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mensuration, photogrammétrie, génie rural**

Band (Jahr): **73-F (1975)**

Heft 3-4: **Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag**

PDF erstellt am: **26.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-227541>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Stehachsrichtung, auch unmittelbar nach abgeschlossener Horizontierung.

Die anfänglich herrschenden Bedenken wegen der Feinfühligkeit der Horizontierung erwiesen sich als unbegründet, sie ist im Gegenteil besser als beim normalen DKM2-A. Die Anordnung der beiden Fusschrauben in einem rechten Winkel zueinander macht das Horizontieren bequemer. Dadurch kommt eine Fusschraube zwar neben die Auflagen am Stativkopf zu liegen, für das Auge und das Gefühl ein Nachteil, der jedoch durch die messtechnischen Vorteile mehr als aufgewogen wird.

Literatur

Tarczy-Hornoch, A.: Über die Entwicklung der geodätischen Zwangszentrierungen. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Baden bei Wien 1963, S. 133.

Riemann, W.: Beitrag zur Systematik geodätischer Zwangszentrierungen. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1967, S. 396.

Weiser, G.: Zentriergenauigkeit bei der Kombination zweier Zwangszentriersysteme. Allgemeine Vermessungsnachrichten, Karlsruhe 1970, S. 427.

Vencovsky, M.: Eine sehr genaue Zentriervorrichtung. Mitteilungen aus dem Markscheidewesen, Herne (Westfalen) 1971, S. 23.

Adresse des Verfassers

Dr. H. Aeschlimann, Kern & Co. AG, 5001 Aarau

Vereinfachte Theorie der Deformation eines Reflektors bei ungleichmässiger Temperatur

A. Dalcher, Aarau

Bei der elektro-optischen Distanzmessung werden «Trippelprismen»-Reflektoren verwendet. Diese reagieren auf Temperaturänderungen.

Die Berechnung erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird der Verlauf der Temperatur ermittelt, dann befassen wir uns mit den daraus resultierenden Spannungen und Deformationen.

Zur Vereinfachung der Rechnung reduzieren wir das räumliche Problem auf ein ebenes. Wir berechnen den Temperatursgleich in einem rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck und geben einen Ansatz für die Deformationen.

1. Die Berechnung des Temperatursgleiches

Bezeichnungen:

- L Länge einer Kathete
- a Wärmeleitfähigkeit
- s spezifische Wärme
- ρ Dichte
- λ Wärmeübergangszahl für den Rand des Dreiecks
- t Zeit
- T Temperatur
- N nach aussen gerichtete Normale in einem Randpunkt des Dreiecks

Im Innern des Dreiecks gilt die Wärmeleitungsgleichung

$$a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho s \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.1)$$

Am Anfang (zur Zeit $t = 0$) sei die Temperatur gleichmässig = 1

$$T(x, y, t = 0) = 1. \quad (1.2)$$

Dann werde die Umgebungstemperatur plötzlich auf 0 gebracht. Der Wärmeübergang am Rand genügt nun der Gleichung

$$a \frac{\partial T}{\partial N} = -\lambda T \quad (1.3)$$

In einigen einfachen Fällen lässt sich der Temperaturverlauf exakt angeben. Wenn die Wärmeübergangszahl λ unendlich ist, wird nach (1.3) auf dem Rand $T = 0$.

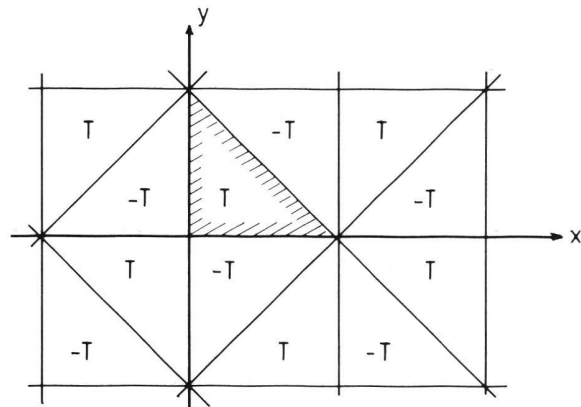


Abbildung 1 Die Fortsetzung der Temperatur durch Spiegelungen bei $\lambda = \infty$.

Man kann durch Spiegeln den Temperaturverlauf auf die ganze Ebene fortsetzen, wie dies in Abbildung 1 dargestellt ist. Die Temperatur hat in x und in y die Periode $2L$, kann also durch eine Fourierreihe dargestellt werden. Wegen $T(-x, y) = -T(x, y)$ und $T(x, -y) = -T(x, y)$ kommen nur sin-Glieder vor. Die Koeffizienten bezeichnen wir mit a_{nm} . Es ist

$$T(x, y, t) = \sum_{nm} a_{nm}(t) \sin n \pi x/L \sin m \pi y/L.$$

Aus $T(y, x) = T(x, y)$ folgt $a_{mn} = a_{nm}$ und aus $T(L-x, L-y) = -T(x, y)$ schliessen wir $a_{nm} = 0$, falls $n + m$ eine gerade Zahl ist.

Jedes Glied der Fourierreihe muss die Differentialgleichung (1.1) erfüllen. Dies führt auf

$$-a a_{nm}(t) (n^2 + m^2) \pi^2/L^2 = \rho s \frac{da_{nm}(t)}{dt}.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch den Ansatz

$$a_{nm}(t) = A_{nm} e^{-(n^2 + m^2) Q t} \quad (1.4)$$

mit $Q = \frac{\pi^2 a}{\rho s L^2}$

Die Konstanten A_{nm} erhält man aus der Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$. Es ist

$$A_{nm} = \frac{1}{L^2} \int_0^{2L} \int_0^{2L} T(x, y, 0) \sin n \pi x/L \sin m \pi y/L dx dy.$$

Man kann das Integrationsgebiet auf ein Dreieck reduzieren. Mit (1.2) wird

$$A_{nm} = \frac{8}{L^2} \int_0^L \int_0^{L-x} \sin n \pi x/L \sin m \pi y/L dy dx.$$

Die Integration ergibt für m gerade und n ungerade

$$A_{nm} = \frac{16 m}{\pi^2 n (m^2 - n^2)}$$

Die ersten Glieder der Entwicklung von T sind

$$T = \frac{32}{3 \pi^2} e^{-5 Q t} (\sin \pi x/L \sin 2 \pi y/L + \sin 2 \pi x/L \sin \pi y/L) - \frac{32}{15 \pi^2} e^{-13 Q t} (\sin 2 \pi x/L \sin 3 \pi y/L + \sin 3 \pi x/L \sin 2 \pi y/L) \dots$$

Praktisch am wichtigsten ist der erste Term, da er den grössten Koeffizienten hat und am langsamsten abklingt. Eine andere Randbedingung, die sich ähnlich lösen lässt, ist

$$\lambda = 0 \quad \text{auf den Katheten (isoliert),}$$

$$\lambda = \infty \quad \text{auf der Hypothenuse.}$$

Wir wählen nun die x -Achse nicht mehr längs einer Kathete, sondern in der Halbierenden des rechten Winkels, und die y -Achse parallel zur Hypothenuse. Mit H bezeichnen wir die Länge der Hypothenuse. Die Rechnung ist einfacher als im ersten Beispiel, da sich T als Produkt einer Funktion von x und einer von y schreiben lässt. Für das erste Glied erhält man

$$T = \frac{16}{\pi^2} e^{-Q t} \cos \pi x/H \cos \pi y/H. \quad (1.5)$$

Bei beliebig vorgegebenem λ lässt sich die Spiegelungsmethode nicht verwenden. Man braucht numerische Verfahren, auf die ich hier nicht eingehen will.

2. Die Deformation des Dreiecks

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

- σ_x, σ_y Zugspannungen
- τ Schubspannung
- E, G Elastizitäts- und Schubmodul
- ν Poissonsche Zahl

u, v Verschiebungen eines Punktes in x - und y -Richtung

A Ausdehnungskoeffizient

Zwischen E, G und ν besteht die Beziehung

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

(vergleiche zum Beispiel Meissner und Ziegler, Mechanik I, § 18).

Zwischen den Dehnungen und den Spannungen bestehen die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= A T + \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= A T + \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Die Schiebung beträgt

$$-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau. \quad (2.2)$$

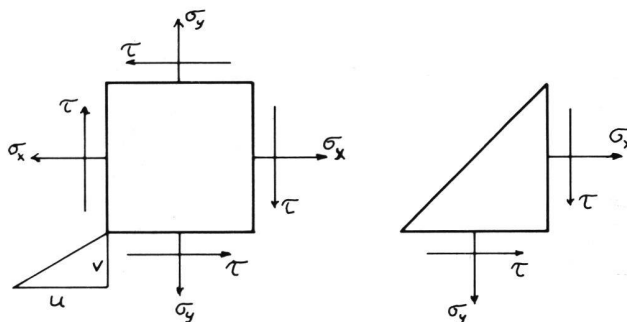


Abbildung 2 Infinitesimales Quadrat und infinitesimales Dreieck am Rand mit angreifenden Spannungen.

Die Gleichgewichtsbedingung für ein elementares Quadrat lautet gemäss Abbildung 2

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Da keine äusseren Kräfte einwirken, hat man die folgenden Randbedingungen:

auf der Hypothenuse

$$\sigma_x = 0, \quad \tau = 0, \quad (2.4)$$

auf den Katheten (vergleiche Figur 2)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y \\ \tau &= -\sigma_x \text{ auf } x = y, \\ \tau &= \sigma_x \text{ auf } x = -y. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Wir betrachten nun das Beispiel

$$T = \cos x \cos y. \quad (2.6)$$

Das Dreieck wird begrenzt durch

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq \pi/2, \\ |y| \leq x. \end{aligned} \right\}$$

Wir bilden den Ansatz

$$\sigma_x = r \cos x \cos y$$

r ist eine noch zu bestimmende Konstante. Aus (2.3) erhalten wir

$$\tau = -r \sin x \sin y$$

$$\sigma_y = r \cos x \cos y$$

(2.1) gibt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(A + \frac{r}{E} (1 - \nu) \right) \cos x \cos y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(A + \frac{r}{E} (1 - \nu) \right) \cos x \cos y,$$

$$u = \left(A + \frac{r}{E} (1 - \nu) \right) \sin x \cos y,$$

$$v = \left(A + \frac{r}{E} (1 - \nu) \right) \cos x \sin y.$$

Nun müssen wir noch (2.2) verifizieren. Es ist

$$-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \left(A + \frac{r}{E} (1 - \nu) \right) 2 \sin x \sin y$$

$$\frac{2(1 + \nu)}{E} \tau = -\frac{2(1 + \nu)}{E} r \sin x \sin y$$

Es muss gelten

$$-r(1 + \nu) = A E + r(1 - \nu),$$

$$r = -A E/2.$$

Somit wird

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -A E/2 \cos x \cos y, \\ \sigma_y &= -A E/2 \cos x \cos y, \\ \tau &= A E/2 \sin x \sin y, \\ u &= A (1 + \nu)/2 \sin x \cos y, \\ v &= A (1 + \nu)/2 \cos x \sin y. \end{aligned} \right\}$$

Mit dieser Lösung sind aber nicht alle Randbedingungen erfüllt. Wir suchen deshalb noch Funktionen, welche die homogene Differentialgleichung (2.1) mit $T = 0$, (2.2) und (2.3) erfüllen.

Wir führen zwei komplexe Konstanten f und g ein. Mit diesen bilden wir den Ansatz

$$\tau = e^{fx + gy}$$

(2.3) gibt

$$\sigma_x = g \tau / f$$

$$\sigma_y = f \tau / g$$

(2.1) wird mit $T = 0$

$$(2.7) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tau}{E} \left(\frac{g}{f} - \nu \frac{f}{g} \right), \quad u = \frac{\tau}{E} \left(\frac{g}{f^2} - \frac{\nu}{g} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\tau}{E} \left(\frac{f}{g} - \nu \frac{g}{f} \right), \quad v = \frac{\tau}{E} \left(\frac{f}{g^2} - \frac{\nu}{f} \right).$$

Die linke Seite von (2.2) ist

$$-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\tau}{E} \left(\frac{g^2}{f^2} - \nu + \frac{f^2}{g^2} - \nu \right).$$

Dies soll gleich $2(1 + \nu) \tau / E$ sein. Das führt auf die Beziehungen

$$-\frac{g^2}{f^2} - \frac{f^2}{g^2} = 2,$$

$$(f^2 + g^2)^2 = 0, \tag{2.9}$$

$$g = \pm i f.$$

So erhält man für beliebiges f die Lösung

$$\left. \begin{aligned} \tau &= e^{fx + ify}, \\ \sigma_x &= i \tau, \\ \sigma_y &= -i \tau, \\ u &= \frac{i}{f} \frac{\tau}{E} (1 + \nu), \\ v &= \frac{-1}{f} \frac{\tau}{E} (1 + \nu). \end{aligned} \right\} \tag{2.10}$$

Nun ist aber $g = \pm i f$ für jedes Vorzeichen eine Doppelwurzel von (2.9). Man bildet deshalb für τ den weiteren Ansatz $\tau = x e^{fx + ify}$. Durch Ableiten und Integrieren erhält man aus den Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \tau &= x e^{fx + ify}, \\ \sigma_x &= i(x - 1/f) e^{fx + ify}, \\ \sigma_y &= -i(x + 1/f) e^{fx + ify}, \\ u &= \frac{i}{E} \left(\frac{-2}{f^2} + (1 + \nu) \frac{x}{f} \right) e^{fx + ify}, \\ v &= \frac{-1}{E} \left(\frac{1 - \nu}{f^2} + (1 + \nu) \frac{x}{f} \right) e^{fx + ify}. \end{aligned} \right\} \tag{2.11}$$

Die zwei weiteren Lösungen ergeben sich, wenn man in (2.10) und (2.11) i durch $-i$ ersetzt.

Diese homogenen Lösungen müssen nun, mit geeignet gewählten komplexen f, so kombiniert werden, dass sie zusammen mit der inhomogenen Lösung (2.8) die Randbedingungen (2.5) erfüllen.

Adresse des Verfassers

Dr. Andreas Dalcher, Kern & Co. AG, 5001 Aarau