Über die Ergebnisse freier Netzausgleichungen und ihre Deutung

ful if we select the carrier points not too close to the given points. When the data for the carrier points have been computed, then the wanted predictions are computed with the use of the 'cross-variance' between the carrier points and the unknowns.
Note. By choosing carrier points closer to the reference sphere, we reduce the correlation and improve the condition number of the equation.

References

Barlik, M. (1970): Kwestia tozwiazania problemu Bjerhammara. Geodezja i Kartografia.

Bjerhammar, A. (1963): Gravimetric Geodesy free of density estimate through analysis of discrete gravity data. Research Inst. for geodetic Sciences. Alexandira Va., USA.

Bjerhammar, A. (1964): A new theory of geodetic gravity. Trans. Roy. Inst. of Technology, Stockholm.

Bjerhammar, A. (1968): A generalized matrix algebra. Trans. Roy. Inst. of Technology, Stockholm.

Bjerhammar, A. (1968): On gravity. Stockholm KTH, 1970.

Bjerhammar, A. (1969): On the boundary value of physical geodesy. Tellus 1969.

Bjerhammar, A. (1973): Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses Elsevier 1973.

Chowitz, B. (1972): Downward continuation of the potential from satellite altidudes.

Förstner, W. (1966): Studies on the problem of Bjerhammar. Trans. Roy. Inst. of Technology, Stockholm.

Golub, G., and *Reinsch, C.* (1970): Singular value decomposition and least squares solutions. Num. Math. 14, 403–420.

Groten, E. (1970): Some remarks on downward continuation of gravity. 'Advances in gravimetry.' Pittsburgh 1970.

Heitz, S., and *Tscherning, C. C.* (1971): Comparisions of two methods of astrogeodetic geoid determinations based on least squares prediction and collocation.

Hotine, M. (1969): Mathematical Geodesy. Essa Washington.

Krarup, T. (1969): A contribution to the mathematical foundation at physical geodesy. Geodetisk Institut, Copenhagen.

Lauritzen, S. L. (1973): The probabilistic background of some statistical methods in physical geodesy. Geodetisk Institut, Copenhagen.

Meschkowski, H. (1962): Hilbertsche Räume mit Kernfunktionen. Springer, Berlin.

Morrison, F. (1966): Validity of the expansion for potential near the surface of the earth.

Moritz, H., and *Schwarz, K. P.* (1972): On the computation of spherical harmonics from satellite observations. Fifth Symposium on Mathematical Geodesy, Florence.

Moritz, H. (1964): The boundary value problem of physical geodesy. Ohio State University, Report No 46.

Moritz, H. (1970): Least squares estimation in physical geodesy. Ohio State University, Report No 130.

Moritz, H. (1972): Advanced least squares methods. Ohio State University, Report No 175.

Pick, M. (1965): On the shape of the earth by using analytical continuation of function. Studia geoph. et geod. 9 (1965), 3.

Reit, B.-G. (1967): On the numerical solution of the gravimetrical integral equation of Bjerhammar. Roy. Inst. of Technology, Stockholm, Geodesy Division.

Deny, J. (1949): Systèmes totaux de fonctions harmoniques. Annales de l'institut Fourier, 1949.

Landkof, N. S. (1972): Foundations of modern potential theory. Springer, Berlin 1972.

Keldych, M., and *Lavrentieff, M.* (1937): Compte rendue. Ac. sc. Paris 1937. P. 1788.

Adresse des Verfassers
Professor Arne Bjerhammar, Kungl. Tekniska Högskolan
Institutionen för Geodesi, S-100 44 Stockholm 70

Über die Ergebnisse freier Netzausgleichungen und ihre Deutung

E. Gotthardt, München

Die übliche vermittelnde Ausgleichung freier Netze hat bekanntlich mit der Schwierigkeit zu kämpfen, dass die einfache Minimumbedingung [vv] = Min zu einer singulären Normalgleichungsmatrix führt, die keine eindeutige Lösung liefert. Nach Meissl [1] kann man diesem Übelstand dadurch abhelfen, dass man nach genäherter Orientierung die Zusatzforderung aufstellt, die Quadratsumme der mittleren Koordinatenfehler der Punkte oder, was damit gleichbedeutend ist, die Quadratsumme der Achsen ihrer Fehlerellipsen solle ein Minimum annehmen. Die Fachliteratur der letzten Jahre bringt zahlreiche Veröffentlichungen, in denen trigonometrische Netze auf diese Weise bearbeitet wurden.
Der entscheidende Kunstgriff besteht dabei darin, dass man die gegebene singuläre Normalgleichungsmatrix N mit der aus den Eigenvektoren gebildeten Matrix S und S^T rändert (Abb. 1), wobei gilt

$$S^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \dots & 0 & 1 \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 \dots & -y_n & x_n \end{pmatrix}.$$

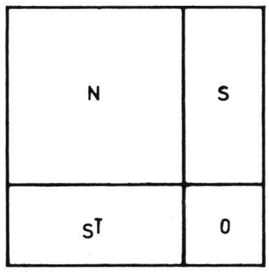

Abb. 1

Wie betont werden muss, ist es nicht erforderlich, alle Punkte des Netzes in die Matrizen S und S^T einzubeziehen. Man kann sich vielmehr auch auf einen Teil der Netzpunkte beschränken. Dies ist in gewissen Fällen sinnvoll und zweckmässig. Die Inversion der Matrix lässt sich mit dem gewohnten Gaussschen Algorithmus nicht ohne weiteres durchführen, bereitet jedoch nach geeignetem Umordnen keine Schwierigkeiten.
Bei der Deutung der Ergebnisse derartiger Minimalausgleichungen hat man zu beachten, dass die berechneten Fehlerellipsen nicht auf ein bequem angebbares System

bezogen sind, sondern auf die abstrakte Minimumbedingung. Diese fordert jedoch nur einen Kleinstwert für die Quadratsumme der Achsen der Fehlerellipsen. Weitergehende Schlüsse lassen sich dagegen hieraus nicht ziehen; insbesondere deutet eine besonders kleine Fehlerellipse nicht auf eine entsprechend gute Punktbestimmung hin.

Hinsichtlich der inneren Genauigkeit, die durch die Minimalausgleichung ja keineswegs verbessert wird, gelten vielmehr die üblichen Formeln. So lässt sich der mittlere Fehler einer unter dem Richtungswinkel α zwischen den Punkten P_1 und P_2 verlaufenden Strecke s nach wie vor berechnen nach

$$m_s^2 = m_0^2 \left((Q_{x_1x_1} - 2Q_{x_1x_2} + Q_{x_2x_2}) \cos^2\alpha + 2(Q_{x_1y_1} - Q_{x_1y_2} - Q_{x_2y_1} + Q_{x_2y_2}) \sin\alpha \cos\alpha + (Q_{y_1y_1} - 2Q_{y_1y_2} + Q_{y_2y_2}) \sin^2\alpha \right).$$

Dabei bezeichnet m_0 den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, während die $Q_{\mu\nu}$ die Elemente der reziproken Normalgleichungsmatrix bedeuten. Beachtet man, dass die Gleichungen gelten

$$m_0^2 \cdot Q_{x_\nu x_\nu} = m_{x_\nu}^2, \quad m_0^2 \cdot Q_{y_\nu y_\nu} = m_{y_\nu}^2$$

und dass ferner mit der Bezeichnung $r_{\mu\nu}$ für den Korrelationskoeffizienten zwischen den Unbekannten u_μ und u_ν mit

$$r_{\mu\nu} = \frac{Q_{u_\mu u_\nu}}{\sqrt{Q_{u_\mu u_\mu} \cdot Q_{u_\nu u_\nu}}}$$

die Beziehung besteht

$$m_0^2\, Q_{u_\mu u_\nu} = m_0^2 \cdot r_{\mu\nu} \cdot \sqrt{Q_{u_\mu u_\mu} \cdot Q_{u_\nu u_\nu}} = r_{\mu\nu} \cdot m_{u_\mu} \cdot m_{u_\nu},$$

so folgt unter Beachtung von $| r_{\mu\nu} | \leqq 1$

$$m_s \leqq (m_{x_1} + m_{x_2}) \,|\cos\alpha\,| + (m_{y_1} + m_{y_2}) \,|\sin\alpha\,|.$$

Diese Abschätzung ist zwar etwas roh, ohne Kenntnis der vollständigen reziproken Matrix, aber die einzig mögliche Aussage. Analog verhält es sich mit den Winkeln zwischen den Netzpunkten. Die bisher übliche Form der Berechnung, die auf ein explizit angegebenes System bezogen war, lieferte dagegen sofort die Unsicherheit aller Punkte relativ zu diesem System. Da man es im allgemeinen entsprechend dem überwiegenden Interesse an Genauigkeitsangaben wählte, sind die gegen die althergebrachte Form der Ausgleichung erhobenen Einwände nur zum Teil berechtigt.

Ein sehr bemerkenswertes und lehrreiches Beispiel für die Ausgleichung freier Netze aus der Ingenieurvermessung stammt von Heister und Welsch [2]. Die einfache und symmetrische Messanordnung umfasst ein äusseres Fünfeck, in dem alle Seiten und Winkel gemessen wurden und von dessen Punkten aus die Punkte eines inneren Fünfecks durch einfache Vorwärtsschnitte bestimmt sind. Zusätzlich ist weiter gefordert, dass sich die Punkte des inneren Fünfecks auf einem Kreis von unbekannter Grösse und Lage befinden sollen (Abb. 2).

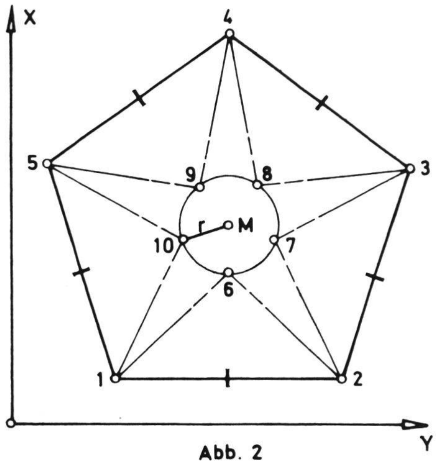

Abb. 2

In der Originalarbeit wird die Ausgleichung unter anderem in der Weise durchgeführt, dass man zunächst das äussere Fünfeck für sich ausgleicht, dann die Innenpunkte bestimmt und schliesslich die Kreisbedingung berücksichtigt. Der Umstand, dass die Ergebnisse der zweistufigen Ausgleichung nicht recht mit denen einer strengen einstufigen Ausgleichung zu vereinbaren waren, führte den Verfasser zu einer intensiveren Beschäftigung mit dem Problem der freien Netze. Dabei tauchte zunächst die Frage auf, ob man anstelle der zehn Koordinaten für die Punkte des inneren Fünfecks zuzüglich der fünf Bedingungsgleichungen zwischen ihnen und den drei Kreisdaten nicht auch eine direkte Lösung mit acht Unbekannten setzen könne, nämlich den drei Kreisdaten und fünf Richtungswinkeln zwischen dem Mittelpunkt und den Innenpunkten. In zwei Arbeiten [3, 4] wurde diese Frage bejahend gelöst.

Danach blieb im wesentlichen noch ein Problem übrig, nämlich die Aufklärung der grossen Unterschiede in der Genauigkeit der Punkte des äusseren Fünfecks, wenn man sie einerseits für sich, anderseits zusammen mit der Kreisbedingung und der Minimalforderung für alle Punkte betrachtete. Nun lassen sich zwar, wie bereits erwähnt, aus der Grösse der Fehlerellipsen in Netzen, die der Minimalforderung unterworfen wurden, nicht die gleichen Schlüsse über die Zuverlässigkeit der Punkte ziehen, die bei der Zugrundelegung einer bestimmten Basis möglich sind. Im letzteren Fall kann die zusätzliche Berücksichtigung von weiteren Messungen die Fehler stets nur verringern. Um dies einzusehen, nehmen wir ein zweistufiges System an, dessen Verbesserungsgleichungen in Matrizenschreibweise lauten mögen

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1\, x_1 && - l_1 \\ v_2 &= A_{21}\, x_1 + A_{22}\, x_2 && - l_2. \end{aligned}$$

Betrachten wir das erste System allein, so lautet seine Gewichtsgleichung

$$A_1^T A_1 \cdot \bar{Q}_{11} = E.$$

Bei Hinzunahme des zweiten Systems erhalten wir

$$\begin{pmatrix} A_1^T A_1 + A_{21}^T A_{21} & A_{21}^T A_{22} \\ A_{22}^T A_{21} & A_{22}^T A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Setzt man voraus, dass $A_{22}^T A_{22}$ nichtsingulär ist, so kann man die zweite Gleichung mit

$$-A_{21}^T A_{22} (A_{22}^T A_{22})^{-1}$$

multiplizieren und zur ersten addieren.
So ergibt sich

$$(A_1^T A_1 + A_{21}^T A_{21} -$$
$$- A_{21}^T A_{22} (A_{22}^T A_{22})^{-1} A_{22}^T A_{21}) \cdot Q_{11} = E$$

oder

$$(A_1^T A_1 + A_{21}^T (E - A_{22} (A_{22}^T A_{22})^{-1} A_{22}^T) A_{21}) \cdot Q_{11} = E.$$

Der zweite Klammerausdruck ist in dem trivialen Fall einer quadratischen Matrix A_{22} gleich Null, da dann bereits A_{22}^{-1} existiert und $(A_{22}^T A_{22})^{-1} = A_{22}^{-1} (A_{22}^T)^{-1}$ gilt.
Dann verschwindet also das Zusatzglied, und Q_{11} stimmt mit $\overline{Q_{11}}$ überein. Anderenfalls ist der Klammerausdruck unter der üblichen Voraussetzung, dass die Zahl der Beobachtungen die der Unbekannten übersteigt, stets positiv definit. Setzt man noch $A_1^T A_1 = N$, $A_{21}^T (E - A_{22} (A_{22}^T A_{22})^{-1} A_{22}^T) A_{21} = \Delta N$, so sind demnach gemäss der bekannten Formel

$$(N + \Delta N)^{-1} =$$
$$= N^{-1} - N^{-1} \Delta N \cdot N^{-1} + N^{-1} \Delta N \cdot N^{-1} \Delta N \cdot N^{-1} - \dots$$

die Diagonalglieder von Q_{11} kleiner als die von $\overline{Q_{11}}$, wie wir behauptet hatten. Zum gleichen Ergebnis kommt man auch, wenn $A_1^T A_1$ singulär wird und man diesen Fall durch Aufstellen der Minimumforderung auf den einer regulären Matrix zurückführt. Allerdings muss man dann zusätzlich voraussetzen, dass sich die Zusatzbedingung in beiden Fällen auf die gleichen Punkte bezieht. Man hat also auch bei der Gesamtausgleichung die Minimumforderung nur für die Punkte des äusseren Fünfecks einzusetzen.
Mit den von den Autoren von [2] angegebenen Daten $s = 23.512$ m, $m_s = \pm 3$ mm, $\beta = 48.4033$ gon, $m_\beta = \pm 1$ mgon wurde das Ausmass der Fehlerellipsen für eine Reihe verschiedener Fälle errechnet.

Es waren:

Fall 1 Beschränkung auf das äussere Fünfeck.

Fall 2 Ausgleichung des äusseren und des inneren Fünfecks, Minimallage nur für die äusseren fünf Punkte, ohne Berücksichtigung der Kreisbedingungen.

Fall 3 Wie Fall 2, jedoch unter Einbeziehung der Kreisbedingungen.

Fall 4 Wie Fall 3, jedoch mit Minimallage für alle zehn Punkte.

Fall 5 Wie Fall 4, jedoch mit Minimallage nur für die inneren fünf Punkte.

Wegen der Symmetrieeigenschaften des Netzes genügt die Angabe der Daten für je einen Punkt des äusseren und des inneren Fünfecks, und zwar wurden die Punkte 4 und 6 gewählt, bei denen die Koordinatenrichtungen mit denen der Achsen der Fehlerellipse zusammenfallen.

Als Werte in Millimetern ergeben sich:

Fall		1	2	3	4	5
Punkt 4	m_x	1.197	1.197	1.156	1.158	1.165
	m_y	1.314	1.314	0.224	0.246	0.720
Punkt 6	m_x		1.762	0.359	0.334	0.328
	m_y		0.593	0.321	0.279	0.210
Kreis-mittel-punkt	$m_x = m_y$			0.187	0.134	0.118
$(Q_{xx} + Q_{yy})_4$		3.1602	3.1602	1.3861	1.4006	1.8759
$(Q_{xx} + Q_{yy})_6$			3.4575	0.2316	0.1894	0.1521
Summe S			6.6177	1.6177	1.5900	2.0280

Überraschend an diesen Zahlen waren die Werte der Fälle 1 und 2, für die die Autoren der Originalarbeit nur Bruchteile der angegebenen Grössen erhalten hatten, während sie für Fall 4 innerhalb der von ihnen benutzten Rechengenauigkeit dieselben Werte ermittelten. Bei kritischer Betrachtung erscheinen die hier angegebenen Werte als wesentlich glaubhafter, da bei einem Streckenfehler einer Polygonseite von 3 mm Koordinatenfehler, die einen Millimeter etwas übersteigen, plausibler sind als solche, die den Millimeter erheblich unterschreiten.

Im übrigen sind als wichtige Ergebnisse der Neuberechnungen festzuhalten:

1. Wie nach den allgemeinen Überlegungen zu erwarten war, beeinflusst die Durchführung der einfachen Vorwärtsschnitte die Genauigkeit der äusseren Punkte nicht.
2. Ebenfalls in Übereinstimmung mit der Theorie vermindern sich die Grössen beider Fehlerellipsen bei Einbeziehung der Kreisbedingungen. Überraschend ist das Ausmass dieser Verkleinerung, das bei der grossen Achse der inneren Punkte fast 80 % beträgt. Auch bei Beachtung der beschränkten Aussagekraft der Fehlerellipsen freier Netze spricht es sehr für die Durchführung strenger Ausgleichungen.
3. Wie bei der hochgradigen Symmetrie des Netzes kaum anders vermutet werden konnte, wirkt sich die Einbeziehung aller zehn Punkte in die Minimumbedingung oder ihre Beschränkung auf die inneren fünf Punkte nur unwesentlich auf das Ergebnis aus.

Abschliessend ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Dr.-Ing. A. Grün für die mit der Durchführung der Rechenarbeiten verbundene Mühe zu danken.

Literaturverzeichnis

[1] *Meissl, P.:* Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehlertheorie eines Punkthaufens in K. Rinner, K. Kilian, P. Meissl: Beiträge zur Theorie der geodätischen Netze im

Raum. DGK-Veröffentlichung; Reihe A, Heft 61, München 1969.
[2] *Heister, H.*, und *Welsch, W.*: Kritische Betrachtung verschiedener Methoden zur Kreisausgleichung bei Ingenieurvermessungen. Allg. Verm. Nachr. 80 (1973), S. 264.
[3] *Gotthardt, E.*: Minimum von Funktionen vermittelnd ausgeglichener Unbekannter. ZfVerm. Wes. 99 (1974), S. 450.
[4] *Grün, A.*: Ein praktisches Beispiel zur Minimierung von Funktionen vermittelnd ausgeglichener Unbekannter. ZfVerm. Wes. 100 (1975), S. 77.

Adresse des Verfassers
o. Prof. Dr.-Ing. E. Gotthardt,
Institut für Photogrammetrie und Kartographie,
Technische Universität München, Arcisstrasse 21, 8 München

Zum Aufbau eines einheitlichen Systems astronomisch beobachteter Längen[1]

R. Sigl, München

Zusammenfassung

Der vorliegende Beitrag ist als Diskussionsgrundlage für die bei der Arbeitstagung der Permanenten IAG-Kommission für die Neuausgleichung der europäischen Hauptnetztriangulationen (RETrig) vom 1. bis 3. April 1974 in München angeregte «Überprüfung der astronomisch beobachteten Längen» gedacht. – Ausgehend von der in der Bundesrepublik Deutschland vorliegenden Situation werden Massnahmen für den Aufbau eines einheitlichen Längensystems und für die Aufbereitung vorhandener und künftiger Längenbeobachtungen empfohlen, die in modifizierter Form auch für den Bereich des RETrig anwendbar sein dürften.

Summary

This contribution has been prepared for the discussion about the revision of the astronomically determined longitudes, recommended by the Permanent IAG Commission for the new adjustment of the European Triangulation (RETrig) on its working session in Munich, 1st–3rd April 1974. – Starting with the situation in the Federal Republic of Germany some proposals are given for the establishment of a uniform system of longitudes and for the treatment of existing and new observations, which can be used after some modifications also for the area of RETrig.

1. Zum Längensystem in der Bundesrepublik Deutschland

Im Jahre 1904 besorgte *Th. Albrecht* [1] die Ausgleichung des Zentraleuropäischen Längennetzes, in das insgesamt 176 in den Jahren 1863 bis 1903 telegraphisch bestimmte Längendifferenzen zwischen 79 Stationen einbezogen waren. Mit diesem Längennetz, das sich in West-Ost-Richtung von Brest bis Moskau, in Nord-Süd-Richtung von Oslo bis Rom erstreckte, war für Europa erstmals ein einheitliches System von Stationslängen hoher Genauigkeit geschaffen worden, das über Jahrzehnte hinweg allen wissenschaftlichen und praktischen Fragestellungen gerecht wurde.

Obgleich nach Einführung der Radiozeitsignale Mitte der zwanziger Jahre und verstärkt auf Grund der Empfehlungen von 1954 der Internationalen Assoziation für Geodäsie (IAG) ab Mitte der fünfziger Jahre in einer Reihe von Ländern zahlreiche astronomische Längen auf Laplace- und Lotabweichungspunkten beobachtet wurden, kam es bis heute zu keiner Neubearbeitung eines einheitlichen Längensystems. Dies ist um so verwunderlicher, als auf die Notwendigkeit eines einheitlichen Systems von Längen, insbesondere für astro-geodätische Geoidbestimmungen und die Lagerung und Orientierung des Europäischen Triangulationsnetzes (RETrig) mehrfach hingewiesen wurde (vgl. z. B. [11]) und überdies theoretische Vorarbeiten vorliegen (vgl. z. B.[9]).

In diesem Zusammenhang ist auch die im Geophysikalischen Jahr 1957/58 ausgeführte Weltlängenbestimmung zu erwähnen, aus der seit 1960 für zahlreiche Zeitdienste astronomisch beobachtete Längen vorliegen. Diese Weltlängenbestimmung diente der Verbesserung der Zeitbestimmung, der Ableitung der Polbewegung, der Untersuchung der Ausbreitung von Radiozeitsignalen und anderes mehr. Als Resultate erbrachte sie unter anderem eine Liste sogenannter «konventioneller Längen» (vergleiche [17]), die durch einen Systemwechsel beim Bureau International de l'Heure (BIH) im Jahre 1968 Änderungen erfuhren (vergleiche [7]). – Dieses System «konventioneller Längen», das häufig – nicht ganz korrekt – als «Weltlängennetz» bezeichnet wird, ist für geodätische Aufgabenstellungen nicht unmittelbar geeignet.

Durch die Einführung transportabler Quarzuhren, den Empfang durch Zeitdienste kontrollierter Zeitsignale, die Verwendung auf Fundamentalkatalogen beruhender Sternörter und anderes mehr ist Ende der fünfziger Jahre bei astronomischen Längenbestimmungen auf Feldstationen eine spürbare Genauigkeitssteigerung eingetreten. – Bei den zur Elimination systematischer Fehler notwendigen «Eichmessungen» machte sich das Fehlen eines modernen übergeordneten und einheitlichen Längennetzes hoher Genauigkeit störend bemerkbar. – In der Bundesrepublik Deutschland wurde daher wie folgt verfahren: Von den insgesamt etwa fünfzig zum Beispiel auf Laplace-Punkten (vgl. z. B. [13], [14], [3]) beobachteten Längen wurde ein Teil über die Referenzstation München an Genf und so an das mit dem *Albrecht*schen Längennetz verbundene Längennetz der Schweiz angeschlossen[2] (vergleiche [4], [5], [12]). – Für die übrigen, überwiegend in Norddeutschland gelegenen

[1] Dieser Aufsatz wird eingereiht in: Lehrstuhl für Astronomische und Physikalische Geodäsie der TU München, Mitt. Nr. 125.

[2] Der damals geplante zusätzliche Anschluss an Potsdam konnte nicht verwirklicht werden.