

Die Vermeidung von Rechenunschärfen infolge von Gewichtsinhomogenitäten bei einem Netzausgleich

Autor(en): **Meissl, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mensuration, photogrammétrie, génie rural**

Band (Jahr): **73-F (1975)**

Heft 3-4: **Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-227546>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Vermeidung von Rechenunschärfen infolge von Gewichtsinhomogenitäten bei einem Netzausgleich

P. Meissl, Graz

Zusammenfassung

Starke Gewichtsinhomogenitäten können bei einem Ausgleichsproblem empfindliche Rechenunschärfen verursachen. Bei direkter Auflösung der Normalgleichungen kann es zu Ziffernauslöschung bei kritischen Koeffizienten kommen. Bekannte Gegenmassnahmen werden kurz erörtert. Ein neues Verfahren, welches bei Ausgleichsproblemen vom Typ des Netzausgleiches Vorteile zu bieten scheint, wird vorgeschlagen.

Summary

Strong differences in the observational weights may cause numerical difficulties when an adjustment problem is solved. If a direct elimination method is applied to the normal equations, certain critical coefficients may lose significant digits. Known measures appropriate to deal with this situation are briefly reviewed. A new method is proposed which seems to be advantageous if the adjustment problem is structured like that one of a geodetic network.

1. Problemstellung. Gewichtsinhomogenitäten können einen sehr schädlichen Einfluss auf die Rechengenauigkeit bei einem Ausgleichsproblem haben. Betrachten wir das absichtlich extrem ungünstig gewählte Beispiel eines Höhennetzes in Abbildung 1.

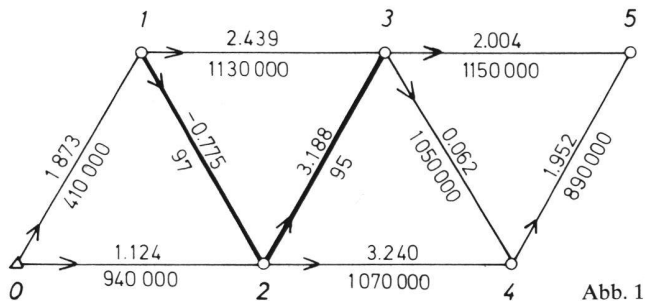


Abb. 1

In der Skizze sind gemessene Höhenunterschiede (in m mit 3 Dezimalen) sowie die Reziprokwerte der angenommenen Gewichte (ganze Zahlen) eingetragen. Punkt 0 hat die feste Höhe 0. Wie man sieht, erhalten die zwei Höhenunterschiede 1→2, 2→3 vergleichsweise sehr hohes Gewicht.

In dieser Arbeit sollen einige bekannte Massnahmen zur Verhinderung des schlechten Einflusses der Gewichtsunterschiede auf die Rechengenauigkeit bei direkter Auflösung der Normalgleichungen erörtert werden. Schliesslich soll ein Verfahren vorgeschlagen werden, welches insbesondere bei der Ausgleichung von Netzen Vorteile zu bieten scheint.

Viele Probleme sind ähnlich strukturiert wie das Netzausgleichsproblem. Erwähnt sei zunächst die statische Berechnung nach der Methode der finiten Elemente, wo grosse Unterschiede in der Steifigkeit der Elemente analoge numerische Schwierigkeiten verursachen. Vergleiche Rubinstein-Rosen (1970).

Weiters erwähnen wir elektrische Netze von Widerständen. Unser eingangs formuliertes Beispiel steht in enger Beziehung zu einem stationären Gleichstrom-Netzwerk. Die gesuchten Höhen sind Potentialwerte in den Knoten, die reziproken Gewichte sind Widerstände. Die an einem Knoten austretende Strommenge ist die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Beobachtungen, die an dem Knoten beteiligt sind, unter Berücksichtigung des Vorzeichens. Die Normalgleichungen unseres Ausgleichsproblems, die später in Abschnitt 6 formuliert werden, sind gleichbedeutend mit den Kirchhoffschen Regeln. (Vergleiche auch Borre-Meissl [1974], Appendix C.) Gewichtsinhomogenitäten bedeuten Inhomogenitäten der Widerstände.

2. Hohe Stellengenauigkeit. Ist sie verfügbar und ökonomisch vertretbar, so bringt sie die bequemste Abhilfe. Obiges Beispiel nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen mit Gauss-Jordan-Elimination auf einer WANG 2200 B mit 13 Dezimalstellen und Gleitkomma durchgerechnet, ergab folgendes Resultat für die ausgeglichenen Höhen

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.874821946182 & x_3 &= 4.307823040798 \\ x_2 &= 1.119822892176 & x_4 &= 4.363829369674 \\ & & x_5 &= 6.314081510503 \end{aligned}$$

Die relative Genauigkeit ist schätzungsweise bei 10^{-8} und ist sicher ausreichend.

Kritik: Hohe Stellengenauigkeit schafft nicht für alle Probleme Abhilfe. Theoretisch kann man so starke Gewichtsunterschiede wählen, dass selbst 13 Ziffern nicht ausreichen. Schlimmer ist der Speicher- und Zeitaufwand bei wirklich grossen Problemen.

3. A priori Transformationen der Unbekannten bei vermittelnden Beobachtungen. Führt man etwa an Stelle der Unbekannten x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die neuen Unbekannten $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1, y_3 = x_3 - x_2, y_4 = x_4, y_5 = x_5$ ein, so erhält man ein gut konditioniertes Normalgleichungssystem, welches sich problemlos nach einem direkten Eliminationsverfahren lösen lässt. Das neue Normalgleichungssystem weist zwar ähnlich wie das frühere grosse Unterschiede in der Grösse der Koeffizienten auf. Die Diagonalelemente und rechte Seiten zu y_2, y_3 sind sehr gross. Jedoch liegt keine starke Koppelung zwischen den Unbekannten vor, und es kommt zu keinen Ziffernauslöschungen. Die mittleren Fehler der ausgeglichenen Werte für y_2, y_3 werden so klein, dass man y_2, y_3 praktisch a priori als konstant einführen kann, wobei sich die Werte aus den beobachteten Höhenunterschieden 1→2, 2→3 ergeben.

Kritik: A priori Transformationen müssen bei jedem Problem oder jeder Problemklasse neu überlegt werden. Daher ist ein qualifizierter Sachbearbeiter notwendig. Ähnliches gilt für den folgenden Punkt 4.

4. Bedingter Ausgleich mit überlegter Auswahl der Bedingungsgleichungen. Wählt man die Bedingungsgleichungen etwa über die 4 Schleifen $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$, so resultiert ein gut konditioniertes Normalgleichungssystem.

5. Singular value decomposition. Dieses von Golub entwickelte Verfahren ist etwa in Golub-Reinsch (1970)

näher beschrieben. Es geht bei einem vermittelnden Ausgleichsproblem

$$Ax = 1 \quad (1)$$

mit diagonaler Gewichtsmatrix P, die Aufstellung der Normalgleichungen

$$A^T P A x = A^T P 1 \quad (2)$$

und arbeitet unmittelbar mit der Matrix $P^{1/2}A$, deren singulare Werte berechnet und für die Lösung benützt werden. ($P^{1/2}$ ist die Diagonalmatrix der Wurzeln aus den Gewichten.) Die Kondition von $P^{1/2}A$ ist besser als jene von $A^T P A$. Golub-Reinsch erläutern dies an dem Beispiel

$$P^{1/2}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (3)$$

wobei ε eine sehr kleine Zahl ist. Hier kann $A^T P A$ leicht singular werden, wenn nämlich die Maschinenarithmetik $1 + \varepsilon^2$ durch 1 ersetzt.

Kritik: Singular value decomposition bringt eine Verbesserung, behebt jedoch den Einfluss von Gewichtsinhomogenitäten nicht völlig. Ausserdem verliert man den Rechenvorteil bei Problemen vom Typ des Netzausgleiches. Die Normalgleichungsmatrix ist dort schwach besetzt, und die meisten Nullen bleiben beim Eliminationsvorgang erhalten. Die Singular value decomposition unterwirft die Matrix $P^{1/2}A$ gewissen Transformationen (Householder-transformationen), bei denen die schwache Besetzung verlorengeht.

6. Das Verfahren des korrigierten reduzierten Systems. Wir benützen die bekannten Formeln (vergleiche sinngemäss Bjerhammar [1973], S. 228 ff.) über die partielle Reduktion des Normalgleichungssystems, welches wir in der Form

$$\begin{pmatrix} A_1^T P A_1 & A_1^T P A_2 \\ A_2^T P A_1 & A_2^T P A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T P 1 \\ A_2^T P 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

oder kürzer

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (4a)$$

schreiben. Eliminiert man einen Teil der Unbekannten, etwa x_1 , so erfüllt x_2 die sogenannten reduzierten Normalgleichungen

$$\bar{N}_{22} x_2 = \bar{r}_2 \quad (5)$$

mit

$$\bar{N}_{22} = N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12}, \quad \bar{r}_2 = r_2 - N_{21} N_{11}^{-1} r_1 \quad (5a)$$

während x_1 aus

$$x_1 + \bar{N}_{12} x_2 = \bar{r}_1 \quad (6)$$

mit

$$\bar{N}_{12} = N_{11}^{-1} N_{12}, \quad \bar{r}_1 = N_{11}^{-1} r_1 \quad (6a)$$

folgt. Wichtig für das folgende sind nun zwei Feststellungen bekannter Tatsachen.

(a) Eliminiert man aus (4a) nach Gauss Jordan x_1 , so entsteht das reduzierte System

$$\begin{aligned} x_1 + \bar{N}_{12} x_2 &= \bar{r}_1 \\ \bar{N}_{22} x_2 &= \bar{r}_2 \end{aligned} \quad (7)$$

das heisst, es entstehen gerade (5) und (6).

(b) Zu den Gleichungen (5) gelangt man auch, wenn man in den Beobachtungsgleichungen

$$(A_1 \ A_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \quad (8)$$

für x_1 aus (6) substituiert. Man erhält die reduzierten Beobachtungsgleichungen

$$\bar{A}_2 x_2 = \bar{1} \quad (9)$$

mit

$$\bar{A}_2 = A_2 - A_1 \bar{N}_{12}, \quad \bar{1} = 1 - A_1 \bar{r}_1 \quad (10)$$

Bildet man dazu formal die Normalgleichungen, so ergibt sich (5):

$$\bar{A}_2^T \bar{P} \bar{A}_2 x_2 = \bar{A}_2^T \bar{P} \bar{1} \equiv \bar{N}_{22} x_2 = \bar{r}_2 \quad (11)$$

Das Verfahren sei nun an Hand des Beispiels demonstriert, welches wir konsequent in Gleitkomma mit 5-ziffriger Mantisse und korrektem Runden durchrechnen. Die Beobachtungsgleichungen (1) und die mit 10^6 multiplizierten Gewichte sind:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow 1: \quad x_1 &= 1.873, & 100/41 \\ 0 \rightarrow 2: \quad x_2 &= 1.124, & 100/94 \\ 1 \rightarrow 2: \quad x_2 - x_1 &= -0.755, & 10^6/97 \\ 1 \rightarrow 3: \quad x_3 - x_1 &= 2.439, & 100/113 \\ 2 \rightarrow 3: \quad x_3 - x_2 &= 3.188, & 10^6/95 \\ 2 \rightarrow 4: \quad x_4 - x_2 &= 3.240, & 100/107 \\ 3 \rightarrow 4: \quad x_4 - x_3 &= 0.062, & 100/105 \\ 3 \rightarrow 5: \quad x_5 - x_3 &= 2.004, & 100/115 \\ 4 \rightarrow 5: \quad x_5 - x_4 &= 1.952, & 100/89 \end{aligned}$$

Die Normalgleichungen (2) ergeben sich mit den modifizierten Gewichten zu:

	1	2	3	4	5	r
1	10312	-10309	-0.88496	0	0	7785.9
2		20837	-10526	-0.93458	0	-41343
3			10529	-0.95238	-0.86957	33558
5				3.0106	-1.1236	0.89370
4					1.9932	3.9359

	2	1	3	4	5	r
2	1	1	-0.99957	-8.8742E-5		-3.1866
1			-0.99933	-8.8713E-5		-2.4305
3			7	-1.8866	-0.86957	13
4				3.0106	-1.1236	-2.0844
5					1.9932	3.9359

	2	1	3	4	5	r
2	1		-0.99957	-8.8742E-5		-3.1866
1		1	-0.99933	-8.8713E-5		-2.4305
3			6.2569	-1.8866	-0.86957	13.230
4				3.0106	-1.1236	-2.0844
5					1.9932	3.9359

Es sei erwähnt, dass bei Auflösung nach Gauss Jordan mit Pivotwahl in der Reihenfolge 2, 1, 3, 4, 5 das völlig falsche Resultat

$$x_1 = 1.0666, \quad x_2 = 0.3115, \quad x_3 = 3.4991, \quad x_4 = 3.5551, \\ x_5 = 5.5052$$

erhalten wird.

Wir eliminieren nun mit Pivotwahl längs der Hauptdiagonalen so lange, bis ein Pivot an die Reihe käme, bei dem im bisherigen Verlauf der Rechnung eine empfindliche Auslöschung führender Ziffern eingetreten ist. Bei unserem Beispiel ist dies nach zwei Schritten der Fall. Es präsentiert sich dann das System in der Form (beachte die Permutation von 1 und 2!)

Dies entspricht (7). Die beiden ersten Zeilen ergeben

$$x_1 - 0.99933x_3 - 8.8713E-5x_4 = -2.4305 \\ x_2 - 0.99957x_3 - 8.8742E-5x_4 = -3.1866$$

Dies entspricht (6), und zwar mit guter Genauigkeit, wovon man sich durch Einsetzen der Werte aus Abschnitt 2 überzeugt. Die letzten 3 Zeilen entsprechen (5). Es sind Genauigkeitsverluste eingetreten. Allerdings, *und das ist bei Netzproblemen entscheidend*, nur dort, wo sich ein Netzzusammenhang mit den eliminierten Punkten ergab. Dies sind die Positionen (3, 3) und (3, r). Die Zahlen 7 und 13 sind nach Auslöschung führender Ziffern übriggeblieben.

Wir berechnen nun das reduzierte System neu gemäss (9), (10), (11) und können uns dabei auf die Positionen (3, 3) und (3, r) beschränken. Die reduzierten Beobachtungsgleichungen (9), von denen wir nur die relevanten Positionen, das heisst die Koeffizienten von x_3 und die rechten Seiten, wiedergeben, sind

$$(0 \rightarrow 1): \quad 0.99933x_3 + \dots = 4.3035, \quad 100/41 \\ (0 \rightarrow 2): \quad 0.99957x_3 + \dots = 4.3106, \quad 100/94 \\ (1 \rightarrow 2): \quad 0.00024x_3 + \dots = 0.00110, \quad 10^6/97 \\ (1 \rightarrow 3): \quad 0.00067x_3 + \dots = 0.0085, \quad 100/113$$

$$(2 \rightarrow 3): \quad 0.00043x_3 + \dots = 0.0014, \quad 10^6/95 \\ (2 \rightarrow 4): \quad -0.99957x_3 + \dots = 0.0534, \quad 100/107 \\ (3 \rightarrow 4): \quad -x_3 + \dots = 0.062, \quad 100/105 \\ (3 \rightarrow 5): \quad -x_3 + \dots = 2.004, \quad 100/115 \\ (4 \rightarrow 5): \quad 0 \quad + \dots \quad \dots \quad \dots$$

Daraus ergibt sich das Element in Position (3, 3) zu

$$\frac{100}{41} * 0.99933^2 + \frac{100}{94} * 0.99957^2 + \dots + \\ + \frac{100}{115} * (-1)^2 = 6.2569$$

und das Element in Position (3, r) zu

$$\frac{100}{41} * 0.99933 * 4.3035 + \dots + \\ + \frac{100}{115} * (-1) * 2.004 = 13.230$$

Das korrigierte reduzierte System unterscheidet sich nur in diesen zwei Positionen von dem früheren und stellt sich neu so dar

Bei diesem Beispiel treten keine weiteren ernstzunehmenden Ziffernauslöschungen in der Diagonale auf. Das Gauss-Jordan-Schema ergibt daher ohne weitere korrektive Massnahmen das Resultat:

$$x_1 = 1.8745 \quad x_2 = 1.1191 \quad x_3 = 4.3075 \quad x_4 = 4.3630 \\ x_5 = 6.3133$$

Die grösste Abweichung von den genaueren Resultaten des Abschnittes 2 ist etwa 0.0008 m. Die grösste relative Abweichung ist etwa $6 * 10^{-4}$, was man bei 5ziffriger Rechnung wohl akzeptieren muss.

Kritik: Das Verfahren lässt sich automatisieren, bedeutet jedoch einen Mehraufwand an Programmierung. Bei Problemen, die zu vollbesetzten Matrizen A und A^TPA

führen, bedeutet das Verfahren unter Umständen auch einen erheblichen rechnerischen Mehraufwand, da dann ein grosser Teil der Normalgleichungen neu aufgestellt werden muss. Für das in Abschnitt 5, Gleichung (3), erwähnte Beispiel funktioniert es gut und mit geringem Aufwand. Für grosse Netzwerke soll es demnächst im Computereinsatz erprobt werden.

7. *Dank.* Den Anstoss zu dieser Arbeit gab ein Briefwechsel mit Herrn T. Vincenty, Cheyenne, Wyoming. Herr Vincenty berichtete über echte Schwierigkeiten durch Gewichtsinhomogenitäten bei grösseren Netzen. (Bei dem kleinen Beispiel des Abschnittes 1 sind die Schwierigkeiten nur aus Demonstrationsgründen konstruiert.) Der Firma Wang sei gedankt, dass sie ihr Computersystem WANG 2200 B für die Berechnungen zur Verfügung stellte. Auf dieser ausserordentlich benutzerfreundlichen Maschine war die Durchrechnung des Zahlenbeispiels samt Simulation der Rundung ein Vergnügen.

Literaturverzeichnis

- Bjerhammar, A. (1973): Theory of errors and Generalized Inverses. Elsevier.
 Borre, K., Meissl, P. (1974): Strength Analysis of Leveling-Type Networks. Report No. 50 of the Danish Geodetic Institute.
 Golub, G. H., Reinsch, C. (1970): Singular value decomposition and least squares solutions. In Wilkinson-Reinsch, ed., Handbook for Automatic computation, p. 134–151. Springer.
 Rubinstein, M. F., Rosen, R. (1970): Error Analysis on structural computation. J. Franklin Inst. 290, 37–48.

Adresse des Verfassers

o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Peter Meissl,
 Institut für mathematische und numerische Geodäsie,
 Technische Hochschule Graz,
 A-8010 Graz, Technikerstrasse 4

La simulation en photogrammétrie

W. K. Bachmann, Lausanne

La simulation est une méthode de calcul qui s'est révélée fort utile dans de nombreux domaines. On y a généralement recours lorsqu'on n'est pas à même de traiter un problème par les méthodes mathématiques classiques. En simulant un processus de mesures ou une expérience aléatoire, nous le remplaçons par un autre processus qui lui est similaire. Le plus souvent, la simulation est utilisée en relation avec des expériences où le hasard joue un rôle prépondérant. Prenons un exemple simple en considérant un angle X dont la valeur est inconnue. En la mesurant n fois avec un théodolite, nous obtenons une séquence

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

dont les valeurs diffèrent légèrement les unes des autres. Si les mesures ont été effectuées correctement, elles doivent être groupées autour d'une certaine «valeur centrale» et leur histogramme ne comportera qu'un seul maximum. L'expérience montre que si le nombre n des mesures augmente, à partir d'un certain moment l'allure de l'histogramme ne change pratiquement plus et nous pouvons dès lors considérer la séquence (1) comme échantillon de taille n extrait d'une population X ayant une fonction de fréquence $f(x)$ bien définie. En règle générale, il s'agit d'une population normale $X \sim N(m; \sigma^2)$ dont la probabilité élémentaire est

$$dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx \quad (2)$$

L'histogramme consiste dans ce cas en la fameuse courbe de Gauss en forme de cloche. L'équation (2) nous montre que cette distribution est complètement déterminée par les deux paramètres m et σ^2 qui ne sont

rien d'autre que la moyenne et la variance de la population. Nous pouvons estimer leurs valeurs à partir de la séquence (1) moyennant les expressions bien connues

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3)$$

et le calcul des probabilités nous permet d'affirmer que ces estimateurs sont sans biais.

Pour étudier le *comportement stochastique* d'une séquence de mesures telle que (1), nous avons deux possibilités, à savoir:

- a) répéter la séquence des mesures un grand nombre de fois, ou
- b) générer la séquence moyennant un processus mathématique approprié, appelé *simulation*.

Il est évident que la deuxième de ces méthodes est plus économique que la première lorsqu'on dispose d'une méthode de simulation efficace suffisamment simple. Mais la simulation d'une population normale $X \sim N(m; \sigma^2)$, à paramètres connus, présente quelques difficultés; pour cette raison, on simplifie généralement le problème en cherchant tout d'abord à simuler une *distribution uniforme* dans un intervalle $(-b; b)$, où b désigne une valeur numérique donnée ($0 < b < \infty$). Une fois qu'on a obtenu une telle distribution uniforme, il est alors facile d'en déduire une population normale en appliquant le théorème bien connu de la limite centrale. Pour la génération d'une distribution uniforme, on a différentes possibilités, dont les plus connues sont:

- a) le jeu de «pile ou face»
- b) l'utilisation d'un dé
- c) la roulette
- d) l'utilisation d'une urne avec des boules de différentes couleurs.

Ces méthodes, que nous pouvons appeler «primitives», ont l'inconvénient d'être lentes et de comporter parfois un biais non négligeable, raison pour laquelle elles n'ont