Zeitschrift: Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF))

Band: 73-F (1975)

Heft: 3-4: Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag

Artikel: La compensation de points triangulés par calcul de moyennes pondérées

Autor: Howald, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-227548

La compensation de points triangulés par calcul de moyennes pondérées

P. Howald, Lausanne

Résumé

Le calcul des coordonnées compensées d'un point déterminé par visées extérieures ou par visées intérieures peut se faire en calculant la moyenne pondérée de toutes les intersections ou de tous les relèvements que fournissent ces visées. Les poids dépendent des angles que ces dernières font entre elles et de leurs longueurs. Les erreurs moyennes sur les coordonnées compensées se calculent comme erreurs moyennes sur ces moyennes pondérées.

1. Introduction

La méthode classique de compensation d'observations médiates oblige à poser, après avoir déterminé des valeurs approchées pour les inconnues, les équations aux erreurs, puis les équations normales dont on résoud le système. Une autre voie permet de parvenir aux valeurs compensées des inconnues, mais qui, quoique générale en théorie, ne peut s'appliquer en pratique qu'à certains problèmes particuliers et comportant peu d'inconnues. Lorsqu'on a n observations pour la détermination de q inconnues ($n > q$), on considère toutes les combinaisons possibles de ces n observations en en prenant q à la fois. Une telle combinaison de q observations doit fournir une valeur pour chacune des inconnues et l'on a alors autant d'ensembles de solutions pour toutes les inconnues qu'il y a de combinaisons. Il suffit ensuite de calculer une moyenne pondérée de ces solutions intermédiaires en leur attribuant un poids approprié pour obtenir les valeurs compensées.

Cette méthode trouve une application intéressante dans la compensation de points déterminés par intersection ou par relèvement. Dans le premier cas, on calcule les coordonnées de toutes les intersections possibles par combinaison des visées deux à deux. En attribuant à chaque intersection un poids fonction de l'angle d'intersection et de la longueur des visées, on calcule la moyenne pondérée pour chacune des coordonnées et l'on obtient la valeur compensée. De même, lors d'une détermination par visées intérieures, on calcule tous les relèvements possibles en prenant trois de ces visées à la fois. Un poids fonction des angles d'ouverture et des longueurs des visées permet alors de calculer les moyennes pondérées des coordonnées et qui sont les valeurs compensées.

Cette manière de compenser par les moyennes pondérées n'est pas nouvelle et l'on en trouve les développements théoriques pour le cas de deux inconnues dans [1]. Nous pensons toutefois que ce procédé est peu connu et il nous a paru utile de le présenter ici, en donnant la formulation utile pour son application pratique aux cas de l'intersection et du relèvement. De plus, les erreurs moyennes sur les coordonnées compensées s'obtiennent par le calcul habituel de l'erreur moyenne sur la moyenne pondérée, en faisant logiquement intervenir le nombre d'observations surabondantes du problème traité.

Aujourd'hui, où le calcul d'intersections ou de relèvements s'exécute facilement avec les mini-calculatrices de plus en plus répandues, nous pensons que cette solution au problème de la compensation d'un point triangulé est intéressante à connaître.

2. Problème à deux inconnues

2.1 Calcul des valeurs compensées

Si on dispose de n observations pour la détermination de deux inconnues ($n > 2$), leur compensation par la méthode des observations médiates fait intervenir les relations suivantes:

Equations aux erreurs:

$$p_i \, v_i = a_i \cdot x + b_i \cdot y + l_i \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{2.1}$$

x, y valeurs compensées des deux inconnues
a_i, b_i coefficients relatifs à l'observation i ($a_i \neq 0$; $b_i \neq 0$)
p_i poids de l'observation i
l_i mesure de l'observation i

Equations normales:

$$\begin{aligned} [paa] \cdot x + [pab] \cdot y + [pal] &= 0 \\ [pab] \cdot x + [pbb] \cdot y + [pbl] &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

La résolution de ce système conduit aux deux formules:

$$x = \frac{[pab] \cdot [pbl] - [pbb] \cdot [pal]}{[paa] \cdot [pbb] - [pab] \cdot [pab]} \tag{2.3}$$

$$y = \frac{[pab] \cdot [pal] - [paa] \cdot [pbl]}{[paa] \cdot [pbb] - [pab] \cdot [pab]} \tag{2.4}$$

Il y a symétrie entre ces relations et la permutation de a et b a pour corollaire celle de x et y.

En développant (2.3), avec simplifications et arrangements des termes, on obtient:

$$x = \frac{p_1 p_2 (b_1 a_2 - b_2 a_1)(b_2 l_1 - b_1 l_2) + \ldots}{p_1 p_2 (b_1 a_2 - b_2 a_1)(b_1 a_2 - b_2 a_1) + \ldots} \; \frac{+ p_i p_j (b_i a_j - b_j a_i)(b_j l_i - b_i l_j) + \ldots}{+ p_i p_j (b_i a_j - b_j a_i)(b_i a_j - b_j a_i) + \ldots} \tag{2.5}$$

Posons:

$$p_{ij} = p_{ji} = p_i p_j (a_i b_j - a_j b_i)^2 \tag{2.6}$$

et substituons dans (2.5) pour obtenir (2.7), puis (2.8) par permutation de a et b:

$$x = \frac{p_{12} \cdot \dfrac{b_2 l_1 - b_1 l_2}{b_1 a_2 - b_2 a_1} + \ldots + p_{ij} \cdot \dfrac{b_j l_i - b_i l_j}{b_i a_j - b_j a_i} + \ldots}{p_{12} + \ldots + p_{ij} + \ldots} \qquad (2.7)$$

$$y = \frac{p_{12} \cdot \dfrac{a_2 l_1 - a_1 l_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + \ldots + p_{ij} \cdot \dfrac{a_j l_i - a_i l_j}{a_i b_j - a_j b_i} + \ldots}{p_{12} + \ldots + p_{ij} + \ldots} \qquad (2.8)$$

Revenons aux n observations qui servent à déterminer les deux inconnues x et y. Chaque combinaison de deux observations fournit une solution pour x et y et les n observations combinées deux à deux fournissent

$\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples de valeurs x, y

Ce sont les solutions des systèmes obtenus en combinant les équations aux erreurs deux à deux et dans lesquelles on pose $v = 0$.
Couple d'observations i et j:

$$\begin{matrix} a_i \cdot x_{ij} + b_i \cdot y_{ij} + l_i = 0 \\ a_j \cdot x_{ij} + b_j \cdot y_{ij} + l_j = 0 \end{matrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_{ij} = \dfrac{b_j l_i - b_i l_j}{b_i a_j - b_j a_i} \\ y_{ij} \quad \dfrac{a_j l_i - a_i l_j}{a_i b_j - a_j b_i} \end{matrix} \right. \qquad (2.9)$$

En introduisant ces solutions (2.9) dans (2.7) et (2.8), on obtient:

$$x = \frac{p_{12} \cdot x_{12} + p_{13} \cdot x_{13} + \ldots + p_{ij} \cdot x_{ij} + \ldots}{p_{12} + p_{13} + \ldots + p_{ij} + \ldots} \qquad (2.10)$$

$$y = \frac{p_{12} \cdot y_{12} + p_{13} \cdot y_{13} + \ldots + p_{ij} \cdot x_{ij} + \ldots}{p_{12} + p_{13} + \ldots + p_{ij} + \ldots} \qquad (2.11)$$

Ainsi, les valeurs compensées x et y des deux inconnues déterminées par n (> 2) observations sont-elles une moyenne pondérée de toutes les solutions obtenues par la combinaison deux à deux des observations. Les poids correspondants sont donnés par la relation (2.6).
Exemple: Dans le cas de la détermination des coordonnées d'un point par n visées extérieures, il y a $^1/_2 \cdot n \cdot (n - 1)$ intersections de ces visées. Les coordonnées compensées du point sont les moyennes pondérées des coordonnées de chacune de ces intersections.

2.2 Erreurs moyennes à craindre

Dans le cas où l'on a deux inconnues, l'erreur moyenne à craindre sur l'unité de poids est donnée par

$$\ast \; m_o = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}} \qquad (2.12)$$

et le carré de celles sur les valeurs compensées des inconnues par:

(2.13)

$$m_x^2 = Q_{xx} \cdot m_o^2 \quad \text{et} \quad m_y^2 = Q_{yy} \cdot m_o^2$$

avec

$$Q_{xx} = \frac{[pbb]}{[paa][pbb] - [pab][pab]} \quad \text{et}$$

$$Q_{yy} = \frac{[paa]}{[paa][pbb] - [pab][pab]} \qquad (2.14)$$

Il en résulte que m_x^2 et m_y^2 sont donnés par les relations:

$$m_x^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{[pbb][pvv]}{[paa][pbb] - [pab][pab]} \qquad (2.15)$$

$$m_y^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{[paa][pvv]}{[paa][pbb] - [pab][pab]} \qquad (2.16)$$

Revenons aux solutions x_{ij}, y_{ij} selon (2.9) et soient vx_{ij} et vy_{ij} leurs erreurs résiduelles par rapport à leurs moyennes pondérées x, y:

$$\begin{aligned} vx_{ij} &= x - x_{ij} \\ vy_{ij} &= y - y_{ij} \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Remplaçons dans le couple d'équations (2.9) x_{ij} et y_{ij} par leurs expressions tirées de (2.17):

$$\begin{aligned} a_i(x - vx_{ij}) + b_i(y - vy_{ij}) + l_i &= 0 \\ a_j(x - vx_{ij}) + b_j(y - vy_{ij}) + l_j &= 0 \end{aligned} \qquad (2.18)$$

ce qui, en tenant compte de (2.1) se transforme comme suit:

$$\begin{aligned} v_i &= a \cdot vx_{ij} + b_i \cdot vy_{ij} \\ v_j &= a_j \cdot vx_{ij} + b_j \cdot vy_{ij} \end{aligned} \qquad (2.19)$$

et donne finalement:

$$vx_{ij} = \frac{b_i v_j - b_j v_i}{a_j b_i - a_i b_j} \qquad (2.20)$$

$$vy_{ij} = \frac{a_i v_j - a_j v_i}{a_i b_j - a_j b_i} \qquad (2.21)$$

D'après (2.6) et (2.20), on a:

$$p_{ij} vx_{ij} vx_{ij} = p_i p_j (a_i\, b_j - a_j b_i)^2 \cdot \frac{(b_i v_j - b_j v_i)^2}{(a_j b_i - a_i b_j)^2}$$

$$p_{ij} vx_{ij} vx_{ij} = p_i p_j (b_i v_j - (b_j v_i)^2 \qquad (2.22)$$

En calculant maintenant la somme des $^1/_2 \cdot n \cdot (n - 1)$ expressions (2.22), on obtient, après simplifications et arrangements:

$$[p_{ij} vx_{ij} vx_{ij}] = [pbb] \cdot [pvv] \qquad (2.23)$$

et, par permutation:

$$[p_{ij} vy_{ij} vy_{ij}] = [paa] \cdot [pvv] \qquad (2.24)$$

D'autre part, en calculant la somme des $^1/_2 \cdot n \cdot (n-1)$ expressions (2.6), on obtient:

$$[p_{ij}] = [paa][pbb] - [pab][pab] \qquad (2.25)$$

La comparaison des expressions (2.23), (2.24) et (2.25) avec (2.15) et (2.16) montre que l'on a:

$$m_x^2 = \frac{[p_{ij} vx_{ij} vx_{ij}]}{(n-2) \cdot [p_{ij}]} \qquad (2.26)$$

$$m_y^2 = \frac{[p_{ij} vy_{ij} vy_{ij}]}{(n-2) \cdot [p_{ij}]} \qquad (2.27)$$

Ainsi, les erreurs moyennes sur les valeurs compensées des inconnues peuvent-elles se calculer à l'aide des erreurs résiduelles, par rapport à leurs moyennes pondérées, des solutions obtenues par la combinaison des observations. La formule habituelle de l'erreur moyenne sur une moyenne pondérée est donc applicable, avec ici au dénominateur le terme (n-2) puisque le problème comporte deux inconnues.

3. Problème à trois inconnues

Dans le cas où l'on a n observations pour la détermination de trois inconnues ($n > 3$), les équations aux erreurs sont:

$$p_i v_i = a_i \cdot x + b_i \cdot y + c_i \cdot z + l_i \qquad (i = 1 \dots n) \qquad (3.1)$$

Des développements analogues à ceux faits au § 2, et qui sont trop longs à reproduire ici, conduisent à la relation suivante pour la valeur compensée x:

$$x = \frac{p_{123} \cdot x_{123} + p_{124} \cdot x_{124} + \dots + p_{ijk} \cdot x_{ijk} + \dots}{p_{123} + p_{124} + \dots + p_{ijk} + \dots} \qquad (3.2)$$

et aux relations correspondantes en y et z.

x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk} sont l'ensemble des 3 valeurs obtenues pour les inconnues en résolvant la combinaison des trois observations **i, j et k.**

Les poids à attribuer aux 3 valeurs de la combinaison i, j, k sont donnés par la formule:

$$p_{ijk} = p_i p_j p_k (a_i b_j c_k + a_j b_k c_i + a_k b_i c_j - a_i b_k c_j - a_j b_i c_k - a_k b_j c_i)^2 \qquad (3.3)$$

Exemple: Dans le cas de la détermination des coordonnées d'un point par n visées intérieures, il y a $^1/_6 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ combinaisons de 3 visées. Les coordonnées compensées du point sont les moyennes pondérées des coordonnées obtenues pour chacun de ces relèvements.

Remarque: La généralisation à un problème de q inconnues serait facile. Cela n'offre, à première vue, aucun intérêt pratique car l'application nécessite des calculs beaucoup plus longs qu'une compensation habituelle par la méthode des observations médiates ou celles conditionnelles.

4. Détermination des coordonnées d'un point par visées extérieures (intersection)

L'application de la théorie développée au § 2 se prête particulièrement bien au problème de l'intersection. Si l'on a n visées extérieures, elles se coupent deux à deux en $^1/_2 \cdot n \cdot (n-1)$ points d'intersection. Le calcul des coordonnées de ces points étant aisé, on obtient donc assez rapidement l'ensemble des couples de valeurs x_{ij}, y_{ij}, dont il suffit ensuite de calculer une moyenne pondérée. Si par ailleurs les poids sont faciles à déterminer, et c'est le cas comme on va l'établir, l'obtention des coordonnées compensées d'un tel point trouve là une solution élégante.

Notre système de coordonnées géodésiques ayant l'axe X dirigé positivement vers le nord et l'axe Y positivement vers l'est, on donne ces coordonnées habituellement dans l'ordre Y, X et les équations aux erreurs relatives à des directions extérieures sont:

$$p_i v_i = a_i \cdot dY + b_i \cdot dX + l_i \qquad (i = 1 \dots n) \qquad (4.1)$$

avec les coefficients de direction:

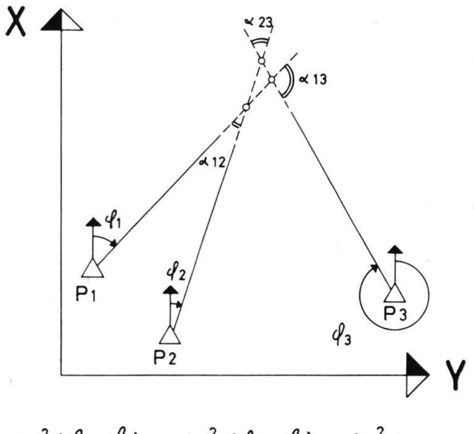
$$a_i = \frac{\cos\varphi_i}{s_i} \quad \text{et} \quad b_i = -\frac{\sin\varphi_i}{s_i} \qquad (4.2)$$

dY, dX	accroissements des valeurs approchées
l_i	valeur approchée – valeur observée du gisement
φ_i	gisement } station extérieure i → point visé
s_i	distance } station extérieure i → point visé

La résolution des équations aux erreurs (4.1) combinées deux à deux et en y posant $v = 0$, fournit les solutions dY_{ij}, dX_{ij} auxquelles s'attribuent des poids selon (2.6):

$$p_{ij} = p_i p_j \cdot (a_i b_j - a_j b_i)^2 = p_i p_j \left\{ \frac{\cos\varphi_i \cdot \sin\varphi_j}{s_i \cdot s_j} - \frac{\sin\varphi_i \cdot \cos\varphi_j}{s_i \cdot s_j} \right\}^2 \qquad (4.3)$$

$$p_{ij} = p_i p_j \cdot \frac{\sin^2(\varphi_j - \varphi_i)}{s_i^2 \cdot s_j^2} \qquad (4.4)$$



$$\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2\alpha_{12}$$
$$\sin^2(\varphi_3 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3) = \sin^2\alpha_{13}$$
$$\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) = \sin^2\alpha_{23}$$

L'expression $(\varphi_j - \varphi_i)$ est un des angles compris entre les deux directions de gisements φ_i et φ_j. Comme c'est le $\sin^2$ de cet angle qui intervient, il est facile de se rendre compte que, quel que soit en fait l'angle d'intersection considéré, ce $\sin^2$ est toujours le même.

Par conséquent, le poids d'une solution dY_{ij}, dX_{ij} est:

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j \cdot \frac{\sin^2 \alpha_{ij}}{s_i^2 \cdot s_j^2} \qquad (4.5)$$

α_{ij}: angle d'intersection des visées i et j
L'ensemble des solutions dY_{ij}, dX_{ij} sont les coordonnées des points d'intersection dans le système dont l'origine est le point approché (Y_0, X_0), et leurs moyennes pondérées sont les coordonnées dY, dX du point compensé par rapport à ce même point approché.
Il est dès lors évident que les moyennes pondérées, calculées avec les mêmes poids, des coordonnées Y_{ij}, X_{ij} des intersections des directions i et j sont les coordonnées compensées Y, X du point.
Ainsi, les coordonnées compensées d'un point déterminé par n (> 2) visées extérieures sont-elles les moyennes pondérées des coordonnées de toutes les intersections de ces directions. Le poids attribué à une intersection est proportionnel à sin² de l'angle compris entre les deux directions et inversément proportionnel au carré des longueurs de visée.
Jusqu'ici, rien n'a été dit au sujet des poids p_i (i = 1 . . . n) des directions et qui interviennent dans la détermination des poids p_{ij}. L'application de la formule (4.5) permet toutes les possibilités, mais envisageons cependant deux cas particuliers:

1. *Toutes les visées ont même poids, soit 1:*
Ce cas est simple et le poids d'une intersection est:

$$p_{ij} = \frac{\sin^2 \alpha_{ij}}{s_i^2 \cdot s_j^2} \qquad (4.6)$$

Pour des visées de quelques centaines de mètres à quelques km, on exprimera s en km.

2. *Les visées ont un poids proportionnel au carré de la distance:*
Ceci revient à admettre que les écarts transversaux des directions aux points visés sont de même précision. En désignant par v_q un tel écart transversal, on a:

$$v_{q_i} = s_i \cdot \frac{v_i}{\rho} \qquad (4.7)$$

v_i erreur angulaire de la direction i
ϱ 1 radian (= 636 620^{cc})
Si les écarts transversaux sont de même précision, le principe des moindres carrés s'exprime par

$$[v_q v_q] = \left[\frac{s^2}{\rho^2} \cdot vv \right] = \text{minimum} \qquad (4.8)$$

Cela revient donc à attribuer aux directions le poids

$$p_i = \frac{s_i^2}{\rho^2} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{p_i = s_i^2} \qquad (4.9)$$

car les poids ne sont définis qu'à un facteur constant près.
Ainsi, l'application de la formule (4.5) donne-t-elle

$$p_{ij} = \sin^2 \alpha_{ij} \qquad (4.10)$$

Quant aux *erreurs moyennes sur les coordonnées compensées,* elles se calculent en applicant les formules (2.26) et (2.27), c'est-à-dire comme lorsqu'on calcule habituellement l'erreur moyenne sur une moyenne pondérée, le nombre d'observations surabondantes étant cependant ici égal au nombre total de directions extérieures moins deux:

$$m_y = \pm \sqrt{\frac{[pv_y v_y]}{(n-2) \cdot [p]}} \quad \text{et}$$

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[pv_x v_x]}{(n-2) \cdot [p]}} \qquad (4.11)$$

5. Détermination des coordonnées d'un point par visées intérieures (relèvement)

La détermination des coordonnées d'un point par relèvement est un problème à trois inconnues; en plus des deux coordonnées, il y a l'inconnue d'orientation à la station. Lorsqu'on a $n > 3$ directions intérieures, elles peuvent être combinées trois à trois pour fournir autant de solutions au problème. Les méthodes de calcul d'un relèvement sont classiques et connues.

En application de la théorie développée au § 3, on calcule des valeurs pour les coordonnées du point, en utilisant toutes les combinaisons possibles des n directions prises trois à trois. Rappelons que le nombre de ces combinaisons est $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$. Il faut attribuer à ces solutions un poids tel qu'il est défini par (3.3). Pour cela, on va déterminer l'expression en se basant sur les équations aux erreurs relatives aux visées intérieures:

$$p_i v_i = a_i \cdot dY + b_i \cdot dX - dZ + l_i \qquad (i = 1 \dots n) \qquad (5.1)$$

a_i, b_i coefficients de direction selon (4.2)
dY, dX accroissements des valeurs approchées Y_0, X_0
dZ inconnue d'orientation
l_i valeur approchée du gisement – direction observée orientée

On constate et l'on sait que le coefficient de la 3e inconnue est toujours — 1. Par conséquent, pour l'application de (3.3), on peut poser:

$$c_i = c_j = c_k = -1 \qquad (5.2)$$

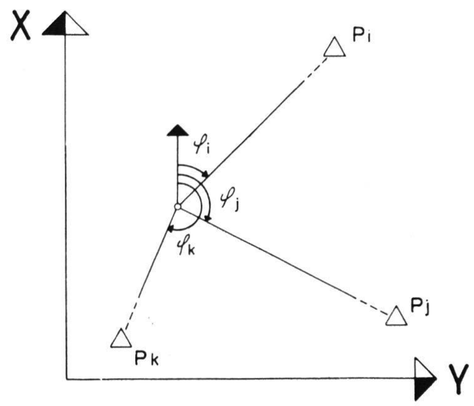
et l'expression pour le poids cherché devient:

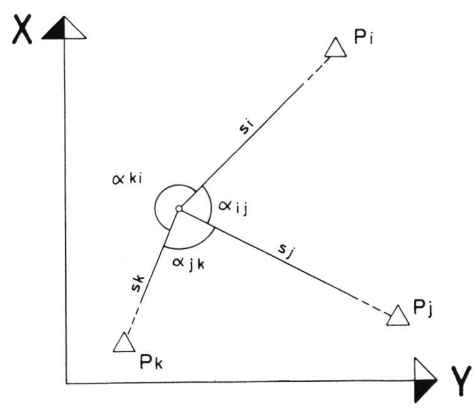
$$p_{ijk} = p_i p_j p_k \cdot (-a_i b_j - a_j b_k - a_k b_i + a_i b_k + a_j b_i + a_k b_j)^2 \qquad (5.3)$$

En tenant compte de l'expression des coefficients a et b définis en (4.2) et en arrangeant les termes, (5.3) devient:

$$\boxed{p_{ijk} = p_i p_j p_k \cdot \left\{ \frac{\sin(\varphi_j - \varphi_i)}{s_i \cdot s_j} + \frac{\sin(\varphi_k - \varphi_j)}{s_j \cdot s_k} + \frac{\sin(\varphi_i - \varphi_k)}{s_i \cdot s_k} \right\}^2 \qquad (5.4)}$$

Chacune des différences de gisement qui entrent dans cette formule est l'angle d'ouverture compris entre les deux directions correspondantes et il est facile de constater, d'après la figure, que ce sont les 3 angles du tour d'horizon qui interviennent dans le calcul du poids.





La formule (5.4) devient finalement:

$$\boxed{p_{ijk} = p_i p_j p_k \cdot \left\{ \frac{\sin\alpha_{ij}}{s_i \cdot s_j} + \frac{\sin\alpha_{jk}}{s_j \cdot s_k} + \frac{\sin\alpha_{ki}}{s_i \cdot s_k} \right\}^2 \qquad (5.5)}$$

Ainsi, les coordonnées compensées d'un point déterminé par $n > 3$ visées intérieures sont-elles les moyennes pondérées des coordonnées de tous les relèvements calculables en combinant ces n directions trois à trois. Le poids attribué à chacun de ces relèvements est donné par la formule (5.5) ci-dessus.

Jusqu'ici, il a été fait abstraction de la 3e inconnue, celle d'orientation à la station, car elle n'intéresse en général pas au premier abord. Il va cependant de soi que si par chaque calcul de relèvement on en détermine une valeur, celle-ci reçoit le même poids que les coordonnées, défini par (5.5); la valeur compensée de l'inconnue d'orientation est également la moyenne pondérée de toutes ces valeurs.

Enfin, *les erreurs moyennes sur les coordonnées compensées* se calculent par les formules suivantes:

$$\boxed{m_y = \pm \sqrt{\frac{[p v_y v_y]}{(n-3) \cdot [p]}}} \quad \text{et}$$

$$\boxed{m_x = \pm \sqrt{\frac{[p v_x v_x]}{(n-3) \cdot [p]}}} \qquad (5.6)$$

p	poids des relèvements, selon (5.5)
v_Y, v_X	erreurs résiduelles des coordonnées des relèvements par rapport à leurs moyennes pondérées
n	nombre de directions intérieures

Il est facile de justifier ces formules en se basant sur les équations aux erreurs fictives, dans lesquelles l'inconnue d'orientation est éliminée:

$$\boxed{p_i\, v_i = A_i \cdot dY + B_i \cdot dX + L_i} \qquad (i = 1 \ldots n) \qquad (5.7)$$

Avec: $A_i = a_i - \dfrac{[pa]}{[p]}$; $B_i = b_i - \dfrac{[pb]}{[p]}$; $L_i = l_i - \dfrac{[pl]}{[p]}$

On sait que les v_i donnés par (5.7) sont identiques à ceux que donnent les équations aux erreurs (5.1). Dès lors, l'analogie de (5.7) avec (4.1) est établie et l'on a celle de (5.6) avec (4.11). Cependant, le nombre d'observations surabondantes est ici (n — 3) et non plus (n — 2).

6. Conclusions

Comme cela fut dit dans l'introduction, l'application de la méthode des moyennes pondérées convient aux problèmes des points triangulés, car l'on n'y a en fait que deux inconnues. Soit pour l'intersection, soit pour le relèvement, les solutions intermédiaires s'obtiennent par un calcul topographique classique, consistant à fournir des coordonnées **Y** et **X**.

Les poids à attribuer à ces solutions s'obtiennent par des formules simples, faisant intervenir des angles et des longueurs qui peuvent d'ailleurs être pris graphiquement sur un canevas à l'échelle.

Le fait qu'à chaque intersection ou à chaque relèvement soit attribué un poids dépendant de la structure de dé-

termination, permet facilement la recherche de la meilleure détermination ainsi que d'utiles comparaisons.
Toutefois, l'application de la méthode n'est vraiment intéressante que si le nombre de solutions intermédiaires ne devient pas trop grand. En effet, pour trois visées surabondantes, soit cinq directions extérieures, ou six directions intérieures, cela fait déjà 10 intersections, respectivement 20 relèvements à calculer, avec leur poids.
C'est en fait dans les cas où l'on a une seule mesure surabondante (trois intersections ou quatre relèvements), assurant le contrôle et non l'intégration de la nouvelle détermination que le procédé s'avère intéressant.

Littérature

[1] *Wolf, H.:* Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Seite 57: *4. Der Satz von Jacobi.*

Adresse de l'auteur
Prof. P. Howald, Institut de Géodésie et Mensuration, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne,
33, av. de Cour, 1007 Lausanne

Über lineare Transformationen von Triangulationsnetzen

R. Conzett, Zürich

Einleitung

In der Vermessungspraxis stellt sich oft die Aufgabe, lokale Punktfelder, die für sich als freie Netze ausgeglichen wurden, in ein übergeordnetes Netz zu transformieren. Dabei legt man meistens eine Ähnlichkeitstransformation zugrunde und ermittelt die Transformationsbeziehungen durch eine Ausgleichung, bei der die Koordinatendifferenzen in den gemeinsamen Punkten der beiden Netze nach der Methode der kleinsten Quadrate minimalisiert werden (Helmert-Transformation).
Dieses Verfahren beruht auf einem stark vereinfachten mathematischen Modell, das die Koordinatenungenauigkeiten und die Korrelationen, die in beiden Systemen im allgemeinen vorhanden sind, nicht berücksichtigt.
Die folgenden Ausführungen befassen sich mit den Ergebnissen, die ein allgemeineres Modell liefert. Der Verfasser behauptet zwar nicht, das strengere Verfahren führe in der Praxis zu besseren Ergebnissen. Es reizte ihn vielmehr, zu fragen, wie sich die üblichen Näherungen auswirken und wie für besondere Fälle ein vollkommeneres Modell zu behandeln wäre. Der strengere Ansatz findet sich auch bei Moritz in [1], wo eine Anwendung der Kollokation gezeigt wird. Die konventionelle Lösung, die dort erwähnt ist, soll hier im einzelnen dargestellt werden. Es ergeben sich dabei naturgemäss interessante formale Querbeziehungen zur Kollokation.

Das mathematische Modell

Das übergeordnete Netz beziehe sich auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem Y, X, während im rechtwinkligen Lokalsystem die Koordinaten V, U heissen. Die Punkte P_i, $i = 1,2 \ldots n$, gehören beiden Netzen an. Die 2n Koordinaten des Y, X-Systems fassen wir im Vektor Z zusammen:

$$\underset{1.2n}{Z^T} = (Y_1, Y_2, \ldots Y_n, X_1, X_2 \ldots X_n) \tag{1}$$

Entsprechend enthält W die 2n Koordinaten im V, U-System:

$$\underset{1.2n}{W^T} = (V_1, V_2, \ldots V_n, U_1, U_2, \ldots U_n) \tag{2}$$

Die Kofaktorenmatrizen der beiden Punktfelder seien bekannt und werden mit

$$\underset{2n.2n}{Q_{ZZ}}, \quad \text{bzw.} \quad \underset{2n.2n}{Q_{WW}}$$

bezeichnet. Auf die Problematik der Kofaktorenmatrix Q_{WW} im freien Netz wird später kurz eingetreten.
Die Transformationsformeln für die allgemeine lineare Transformation mit 6 unbekannten Transformationsparametern lauten:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_i &= t_y + r_{yv}\,\bar{V}_i + r_{yu}\,\bar{U}_i \\ \bar{X}_i &= t_x + r_{xv}\,\bar{V}_i + r_{xu}\,\bar{U}_i \end{aligned} \qquad i = 1, 2 \ldots n. \tag{3}$$

Das sind 2n Bedingungen zwischen den ausgeglichenen Werten der Komponenten der Zufallsvariablen Z und W[1]). Wegen der unbekannten Parameter, die im Vektor

$$\underset{1.6}{t^T} = (t_y, t_x, r_{yv}, r_{yu}, r_{xv}, r_{xu}) \tag{4}$$

zusammengefasst sind, handelt es sich um eine bedingte Ausgleichung mit Unbekannten. Das System liefert also für $(4n + 6)$ unbekannte Grössen, 2n Bedingungen und ist somit $4n + 6 - 2n = (2n + 6)$-fach unterbestimmt. Das Minimumsprinzip ergibt die noch fehlenden Bestimmungsgleichungen. Die Koordinatenwerte beider Systeme betrachten wir als korrelierte Ersatzbeobachtungen und fassen sie im Vektor L mit der Kofaktorenmatrix Q_{LL} zusammen:

$$\underset{4n.1}{L} = \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix}; \qquad \underset{4n.4n}{Q_{LL}} = \begin{pmatrix} Q_{ZZ} & 0 \\ 0 & Q_{WW} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Die q-Werte in Q_{LL} müssen sich auf einen gemeinsamen Wert für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit σ_0 beziehen.
Die Gleichungen (3) werden nun mit Matrizen folgendermassen geschrieben:

[1]) Es gelten folgende Regeln für die Bezeichnung: $\underline{X}$: Zufallsvariable, X: Messung (Realisierung), $\bar{X}$: ausgeglichener Wert.