Über lineare Transformationen von Triangulationsnetzen

termination, permet facilement la recherche de la meilleure détermination ainsi que d'utiles comparaisons.
Toutefois, l'application de la méthode n'est vraiment intéressante que si le nombre de solutions intermédiaires ne devient pas trop grand. En effet, pour trois visées surabondantes, soit cinq directions extérieures, ou six directions intérieures, cela fait déjà 10 intersections, respectivement 20 relèvements à calculer, avec leur poids.
C'est en fait dans les cas où l'on a une seule mesure surabondante (trois intersections ou quatre relèvements), assurant le contrôle et non l'intégration de la nouvelle détermination que le procédé s'avère intéressant.

Littérature

[1] *Wolf, H.:* Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Seite 57: *4. Der Satz von Jacobi.*

Adresse de l'auteur
Prof. P. Howald, Institut de Géodésie et Mensuration, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 33, av. de Cour, 1007 Lausanne

---

Über lineare Transformationen von Triangulationsnetzen

R. Conzett, Zürich

Einleitung

In der Vermessungspraxis stellt sich oft die Aufgabe, lokale Punktfelder, die für sich als freie Netze ausgeglichen wurden, in ein übergeordnetes Netz zu transformieren. Dabei legt man meistens eine Ähnlichkeitstransformation zugrunde und ermittelt die Transformationsbeziehungen durch eine Ausgleichung, bei der die Koordinatendifferenzen in den gemeinsamen Punkten der beiden Netze nach der Methode der kleinsten Quadrate minimalisiert werden (Helmert-Transformation).
Dieses Verfahren beruht auf einem stark vereinfachten mathematischen Modell, das die Koordinatenungenauigkeiten und die Korrelationen, die in beiden Systemen im allgemeinen vorhanden sind, nicht berücksichtigt.
Die folgenden Ausführungen befassen sich mit den Ergebnissen, die ein allgemeineres Modell liefert. Der Verfasser behauptet zwar nicht, das strengere Verfahren führe in der Praxis zu besseren Ergebnissen. Es reizte ihn vielmehr, zu fragen, wie sich die üblichen Näherungen auswirken und wie für besondere Fälle ein vollkommeneres Modell zu behandeln wäre. Der strengere Ansatz findet sich auch bei Moritz in [1], wo eine Anwendung der Kollokation gezeigt wird. Die konventionelle Lösung, die dort erwähnt ist, soll hier im einzelnen dargestellt werden. Es ergeben sich dabei naturgemäss interessante formale Querbeziehungen zur Kollokation.

Das mathematische Modell

Das übergeordnete Netz beziehe sich auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem Y, X, während im rechtwinkligen Lokalsystem die Koordinaten V, U heissen. Die Punkte P_i, $i = 1,2 \dots n$, gehören beiden Netzen an. Die 2n Koordinaten des Y, X-Systems fassen wir im Vektor Z zusammen:

$$\underset{1.2n}{Z^T} = (Y_1, Y_2, \dots Y_n, X_1, X_2 \dots X_n) \tag{1}$$

Entsprechend enthält W die 2n Koordinaten im V, U-System:

$$\underset{1.2n}{W^T} = (V_1, V_2, \dots V_n, U_1, U_2, \dots U_n) \tag{2}$$

Die Kofaktorenmatrizen der beiden Punktfelder seien bekannt und werden mit

$$\underset{2n.2n}{Q_{ZZ}}, \quad \text{bzw.} \quad \underset{2n.2n}{Q_{WW}}$$

bezeichnet. Auf die Problematik der Kofaktorenmatrix Q_{WW} im freien Netz wird später kurz eingetreten.
Die Transformationsformeln für die allgemeine lineare Transformation mit 6 unbekannten Transformationsparametern lauten:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_i &= t_y + r_{yv}\,\bar{V}_i + r_{yu}\,\bar{U}_i \\ \bar{X}_i &= t_x + r_{xv}\,\bar{V}_i + r_{xu}\,\bar{U}_i \end{aligned} \qquad i = 1, 2 \dots n. \tag{3}$$

Das sind 2n Bedingungen zwischen den ausgeglichenen Werten der Komponenten der Zufallsvariablen Z und W[1]). Wegen der unbekannten Parameter, die im Vektor

$$\underset{1.6}{t^T} = (t_y, t_x, r_{yv}, r_{yu}, r_{xv}, r_{xu}) \tag{4}$$

zusammengefasst sind, handelt es sich um eine bedingte Ausgleichung mit Unbekannten. Das System liefert also für $(4n + 6)$ unbekannte Grössen, 2n Bedingungen und ist somit $4n + 6 - 2n = (2n + 6)$-fach unterbestimmt. Das Minimumsprinzip ergibt die noch fehlenden Bestimmungsgleichungen. Die Koordinatenwerte beider Systeme betrachten wir als korrelierte Ersatzbeobachtungen und fassen sie im Vektor L mit der Kofaktorenmatrix Q_{LL} zusammen:

$$\underset{4n.1}{L} = \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix}; \qquad \underset{4n.4n}{Q_{LL}} = \begin{pmatrix} Q_{ZZ} & 0 \\ 0 & Q_{WW} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Die q-Werte in Q_{LL} müssen sich auf einen gemeinsamen Wert für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit σ_0 beziehen.
Die Gleichungen (3) werden nun mit Matrizen folgendermassen geschrieben:

---

[1]) Es gelten folgende Regeln für die Bezeichnung: $\underline{X}$: Zufallsvariable, X: Messung (Realisierung), $\bar{X}$: ausgeglichener Wert.

$$\bar{Z} - \bar{B} \cdot t = 0, \qquad (6)$$

wobei die Matrix B folgende Elemente enthält:

$$\underset{2n.6}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & V_1 & U_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & V_2 & U_2 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & V_n & U_n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & V_1 & U_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & V_2 & U_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 & V_n & U_n \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Mit $\bar{B}$ ist die entsprechende Matrix gemeint, bei der die V, U-Werte überstrichen, das heisst ausgeglichen sind. Ohne Querstrich enthält die Matrix B die Beobachtungen V, U als Realisierung der Zufallsvariablen $\underline{V}$, $\underline{U}$.

Formale Durchführung

Vorerst sind die Bedingungsgleichungen (6) zu linearisieren. (Wegen der Koordinaten V bezeichnen wir die Verbesserungen nicht wie üblich mit V, sondern mit δ_{Zi} (δ_{Yi}, δ_{Xi}) und δ_{Wi} (δ_{Vi}, δ_{Ui}).

Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, darf man die beiden Koordinatensysteme als angenähert parallel annehmen. Durch entsprechende Wahl der Näherungskoordinaten im lokalen Netz ist dies immer möglich. Auch setzen wir näherungsweise ein rechtwinkliges Lokalsystem mit dem Massstabsfaktor 1 voraus.

Damit wird bei

$$t = t_o + \delta t,$$

$$t_o^T = (t_{y_o}, t_{x_o}, 1, 0, 0, 1) \qquad (8)$$

$$\delta t^T = (\delta t_y, \ldots \delta r_{xu}).$$

Aus (6) ergibt sich, wenn $\bar{Z} = Z + \delta Z$, $\bar{W} = W + \delta W$ gesetzt werden, vorerst:

$$Z + \delta Z - (B + \delta B)\, t_o - B\, \delta t = 0,$$

und daraus

$$\delta Z - \delta B \cdot t_o - B \cdot \delta t + Z - B\ \ t_o = 0. \qquad (9)$$

Diese Gleichung formen wir um, damit wir an Bekanntes anknüpfen können. Die ersten beiden Glieder, welche die Verbesserungen der «Beobachtungen» enthalten, fassen wir – in Anlehnung an eine bedingte Ausgleichung – folgendermassen zusammen:

$$\delta Z - \delta B \cdot t_o = A\ \delta L.$$

δL ergibt sich aus (5):

$$\delta L = \begin{pmatrix} \delta Z \\ \delta W \end{pmatrix}; \quad \delta L^T = (\delta y^T, \delta x^T, \delta V^T, \delta U^T)$$

A erhält man, wenn man bedenkt, dass nach (7) im Differential δB die ersten beiden Kolonnen Null werden und bei den übrigen Elementen anstelle von V_i δV_i und von U_i δU_i tritt:

$$\underset{2n.4n}{A} = (E, -E); \quad \underset{2n.2n}{E} \ \text{Einheitsvektor.} \qquad (10)$$

$\delta B \cdot t_o$ ist somit ein Vektor, der die δV_i und die δU_i enthält.

Für die letzten beiden Glieder in (9) setzen wir

$$Z - B \cdot t_0 = l \qquad (11)$$

und erhalten mit den übrigen Abkürzungen

$$A.\delta L - B.\delta t + l = 0. \qquad (12)$$

Damit haben wir die übliche Form der bedingten Ausgleichung mit Unbekannten, in der auch der Term

$$\underset{2n.1}{A \cdot \delta L} = \begin{pmatrix} \delta Y - \delta V \\ \delta X - \delta U \end{pmatrix}$$

durchschaubar wird.

Bisher haben wir eine 6 parametrige affine Transformation zugrunde gelegt. Bei Triangulationsnetzen besteht aber im allgemeinen kaum ein Grund, affine Verzerrungen anzunehmen. Um eine Ähnlichkeitstransformation zu erhalten, führen wir folgende zusätzlichen Bedingungen für die Unbekannten ein:

$$r_{yv} - r_{xu} = 0$$
$$r_{yu} + r_{xv} = 0$$

Mit

$$\underset{2.6}{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

erhalten wir - wenn wir noch (8) berücksichtigen - das System

$$\left| \begin{array}{lll} A\ \delta L - & B\ \delta t + l & = 0 \\ & C\ \delta t & = 0 \end{array} \right| \qquad (14)$$

Zu den Beobachtungen L gehört die in (5) eingeführte Kofaktorenmatrix. Wir erhalten somit eine bedingte Ausgleichung mit Unbekannten für korrelierte (Ersatz-) Beobachtungen, wobei zwischen den Unbekannten Bedingungen bestehen.

Die Minimumsbedingung für die δL_i nach der Methode der kleinsten Quadrate führt zum Normalgleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{llll} A Q_{LL} A^T \cdot k & & - B\ \delta t + l & = 0 \\ & & C\ \delta t & = 0 \\ -B^T \cdot k & + C^T \cdot k' & & = 0 \end{array} \right| \qquad (15)$$

das nach bekannten Verfahren nach δt aufgelöst werden kann.

Reduktion auf fingierte Beobachtungen

Methodisch interessanter ist die Anwendung der bekannten Äquivalenz zwischen der bedingten Ausgleichung mit Unbekannten und der vermittelnden Ausgleichung mit entsprechend korrelierten Ersatzbeobachtungen. Hier sind bereits die ursprünglichen (bedingten) Beobachtungen korreliert; zudem bestehen noch Bedingungen zwischen den Unbekannten: ein Schulbeispiel! Gleichung (14) führt mit

$$A\,\delta L = \triangle = \begin{pmatrix} \delta Y - \delta V \\ \delta X - \delta U \end{pmatrix} \tag{16}$$

auf die neuen Verbesserungsgleichungen

$$\begin{aligned} \triangle &= B\,\delta t - l \\ 0 &= C\,\delta t \end{aligned} \tag{17}$$

mit der entsprechenden Kofaktorenmatrix

$$Q_{ll} = AQ_{LL}A^T = Q_{ZZ} + Q_{WW} \tag{18}$$

Man beachte den Unterschied zwischen Q_{LL} nach (5) und diesem Q_{ll}.

Mit der Abkürzung

$$N = B^T Q_{ll}^{-1}\,B \tag{19}$$

ergibt sich für δt die bekannte Formel

$$\delta t = [E - N^{-1}C^T\,(CN^{-1}\,C^T)^{-1}\,C\,]\,N^{-1}\,B^T Q_{ll}^{-1}\,l, \tag{20}$$

der man, mit $C = 0$, auch die «affine» Lösung entnehmen kann.

Es interessieren aber auch die Verbesserungen an den ursprünglichen Koordinaten δY, δX und δV, δU. Aus (14) erhält man mit der Minimumsbedingung $\delta L = Q_{LL}A^Tk$. Diese Gleichung zerfällt wegen der besonderen Struktur von A nach (10) in

$$\begin{aligned} \delta Z &= \quad Q_{ZZ} \cdot k \\ \delta W &= -Q_{WW} \cdot k \end{aligned} \tag{21}$$

k erhält man nach (15), (17) und (18) mit

$$k = (A^T Q_{LL} A)^{-1} (B\delta t - l) = Q_{ll}^{-1}\,\Delta\,. \tag{22}$$

Für den «Modelltest» braucht man noch

$$\delta L^T Q_{LL}^{-1}\,\delta L = \Delta^T Q_{ll}^{-1}\,\Delta = \Delta^T k\,. \tag{23}$$

Wichtig ist die Auswirkung dieser Ausgleichung auf die Genauigkeit der Koordinaten Z und W. Man berechnet dazu die Matrix

$$Q_{\bar{L}\bar{L}} = Q_{LL} - Q_{LL}A^T\,Q_{kk}A\,Q_{LL} \tag{24}$$

mit

$$\begin{aligned} Q_{kk} = {} & Q_{ll}^{-1} - Q_{ll}^{-1}\,BN^{-1}\,B^T Q_{ll}^{-1} \\ & + Q_{ll}^{-1} B\,N^{-1} C^T (C\,N^{-1} C^T)^{-1}\,C\,N^{-1} B^T Q_{ll}^{-1} \end{aligned} \tag{25}$$

Auch hier steht mit $C = O$ die «affine» Lösung zur Verfügung. $Q_{\bar{L}\bar{L}}$ zeigt im Quadrat oben links die $Q_{\bar{Z}\bar{Z}}$, unten rechts die $Q_{\bar{W}\bar{W}}$ Matrix, während in den beiden anderen Feldern die Korrelationen zwischen den ausgeglichenen Koordinaten beider Systeme erscheinen:

$$\underset{4n.4n}{Q_{\bar{L}\bar{L}}} = \underset{2n.2n}{\begin{pmatrix} Q_{\bar{Z}\bar{Z}} & Q_{\bar{Z}\bar{W}} \\ \hline Q_{\bar{Z}\bar{W}} & Q_{\bar{W}\bar{W}} \end{pmatrix}} \tag{26}$$

Bemerkungen zur Kofaktorenmatrix des freien Netzes

Nach den vorliegenden Formeln stellt man fest, dass etwa nach (20) und (18) die Transformationsbeziehungen, aber auch die Verbesserung δZ und δW und die Kofaktorenmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen nach (24) beziehungsweise (25) von Q_{ww}, das heisst der Kofaktorenmatrix des freien Netzes abhängen. Über diese Q_{ww}-Matrix des freien Netzes sind in letzter Zeit zahlreiche Publikationen erschienen, zum Beispiel [2], [3], [4], [5]. Je nach Annahme der «Berechnungsbasis» ergeben sich *verschiedene* Matrizen; eine besondere Rolle spielt die verallgemeinerte oder Helmert-Inverse. Für den weniger eingeweihten Leser mag die Feststellung interessant sein, dass bei der numerischen Durchführung die sich auf verschiedene «Basen» beziehenden Q-Matrizen, aber auch die Helmert-Inverse, zwar zu verschiedenen Transformationsvektoren δt und zu verschiedenen Kofaktormatrizen $Q_{\bar{W}\bar{W}}$ führen, dass aber die δZ und die $Q_{\bar{Z}\bar{Z}}$, das heisst die Verbesserungen an den Koordinaten des übergeordneten Systems und deren «Genauigkeitsverbesserung», wie auch die Quadratsumme der Verbesserungen nach (23) durch die (willkürliche) Annahme der Basis im freien Netz in keiner Weise betroffen werden. Das Endresultat der Ausgleichung ist in allen Fällen dasselbe. Ein Vergleich mit dem von Höpke in [6] dargestellten Verhalten der Orientierungsunbekannten bei der Vereinigung von Richtungssätzen drängt sich auf.

Bemerkungen zur Helmert-Transformation

Aus der allgemeinen Lösung kann man Rückschlüsse auf die Vereinfachungen ziehen, wie sie bei der Helmert-Transformation eingeführt werden. Offensichtlich nimmt man dort an, dass entweder alle Q_{ZZ}-Elemente oder aber alle Q_{WW}-Elemente Null seien. Ferner schliesst man bei derjenigen Q-Matrix, die von Null verschiedenen angenommen wird, a priori Korrelationen zwischen den Koordinaten aus und rechnet mit einem einheitlichen Wert in der Diagonalen, das heisst gleichen Gewichten für alle Y, X, respektive V, U.

Von dieser speziellen Annahme kann man sich mit dem dargestellten Formelapparat nach Belieben freimachen und sich den gegebenen Verhältnissen allenfalls besser anpassen, hier immer unter der Voraussetzung, dass keine wesentlichen systematischen Fehleranteile vorhanden sind. Numerische Versuche bestätigen allerdings, dass bei guten Netzformen selbst grössere Gewichtsunterschiede und Korrelationen auf die ausgeglichenen Koordinaten wenig Einfluss haben und, wenn nicht besondere Verhältnisse vorliegen, die Helmert-Transformation gute Resultate gibt.

Möglichkeiten für die Praxis

In der Einleitung wurde gesagt, dass bei dieser Untersuchung methodische Fragen im Vordergrund standen. Dem Studierenden sollte ein allgemeineres Modell dargestellt werden; auch scheint es reizvoll, an dieser Aufgabe aus der Praxis die Bedeutung der verallgemeinerten Ausgleichungsformen und Fragen des freien Netzes vorzuführen. Aber auch praktische Fragen sind dazugekommen. Sie sollen kurz gestreift werden:

1. Es treten immer Fälle auf, wo bei Transformationen einzelne Punkte des Landessystems als unsicher angenommen werden müssen. Allfällige Punktverschiebun-

gen verfälschen die Transformation. Man kann sich nun ein Computerprogramm vorstellen, bei dem der Benützer «interaktiv» oder durch Vorgabe verschiedener Varianten die Q_{ZZ}-Matrix «steuert». Grosse Beträge für die Elemente $q_{Y_iY_i}$ und $q_{X_iX_i}$ der Q_{ZZ}-Matrix «befreien» den Punkt P_i vom Transformationszwang. Noch wichtiger scheint, dass man durch geeignete Wahl der q für einzelne Punkte bestimmte Bewegungsrichtungen frei geben oder sperren kann. Die pvv-Summe steht bei der Beurteilung von solchen Annahmen als Zielfunktion zur Verfügung.

2. Natürlich besteht ein enger Zusammenhang dieses Ausgleichungssystems mit der folgenden gruppenweisen Ausgleichung: Dem ursprünglichen Z-System werden die Messungen des Lokalsystems beigefügt, ohne diese vorerst in einem Netz zusammenzufassen. Vergleiche der entsprechenden Modelltests, auch etwa mit dem von Pelzer in [4] dargestellten «Deformationstest», drängen sich auf.

Man kann das Problem auch so stellen, dass man von einem gegebenen Netz, dem Z-System, dessen Charakteristiken man kennt, ausgeht und nach der Methode fragt, nach der ein zusätzlich gemessenes Lokalsystem in dieses Z-System zu integrieren sei. Vorerst müsste man wohl durch einen Test klären, ob zwischen den Netzen signifikante Formunterschiede bestehen; anschliessend erhielte man in der beschriebenen Weise das resultierende Z-System, bei dem die zusätzlichen Informationen aus dem lokalen System einbezogen wären.

Anwendungen dazu liegen auf der Hand: Bei periodischen Deformationsmessungen werden die «Fixpunktkoordinaten» laufend verbessert; man vergleiche zum Beispiel [7]. Auch die Integration lokaler terrestrischer Netze in ein photogrammetrisches Punktsystem wäre eine Anwendung.

Schlussbemerkungen

Die dargestellten Formeln wollen nicht ein optimales numerisches Verfahren angeben. Ein Hinweis auf [8] genügt, um andere Möglichkeiten dafür anzudeuten. Auch die für die Praxis oft wichtige Frage der Interpolation von systematischen Einflüssen wird hier nicht einbezogen. Leider fehlt hier der Platz, die angedeuteten Lösungen durch numerische Beispiele anschaulich darzustellen.

Literatur

[1] *Moritz, H.:* Least-Squares Collocation. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 75, München 1973.

[2] *Baarda, W.:* Statistics: a Compass for the Land Surveyor (S-transformations). Kongressberichte der FIG, 1968, 507 C.

[3] *Mittermayer, E.:* Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze. Zeitschrift für Vermessungswesen 1971, S. 401.

[4] *Pelzer, H.:* Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 164, München 1971.

[5] *Wolf, H.:* Die Helmert-Inverse bei freien geodätischen Netzen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1973, S. 396.

[6] *Höpke, W.:* Einige Ergänzungen zur Theorie der Richtungsmessungen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1969, S. 85.

[7] *Aeschlimann, H.:* Zur Genauigkeit geodätischer Verschiebungsmessungen. Mitteilungen Nr. 13 aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der Eidg. Technischen Hochschule Zürich, 1971.

[8] *Schmid, H.:* Ein allgemeiner Ausgleichungs-Algorithmus zur Auswertung von hybriden Massenanordnungen. Bildmessung und Luftbildwesen 1965, S. 93.

Adresse des Verfassers
Prof. R. Conzett, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Rämistrasse 101, 8006 Zürich