Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 84 (1986)

Heft: 2

Artikel: Das mathematische Modell bei der computergestützten Auswertung von Messdaten

Autor: Schmid, H.H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-233027

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Das mathematische Modell bei der computergestützten Auswertung von Messdaten

H.H. Schmid

Im Jahre 1979 wurde in dieser Zeitschrift unter der Überschrift «Über den Wandel der geometrischen-algebraischen Modellvorstellung in der Photogrammetrie unter dem Einfluss computergestützter Auswerteverfahren» der Einfluss des Computer-Potentials auf die Formulierung des mathematischen Modells der photogrammetrischen Messmethode behandelt, (VPK 7-8/79, S. 197 – 205). Um unnötigen Duplikationen zu begegnen, wird der Inhalt dieses Artikels – auch im Detail – vorausgesetzt.
Hier soll mit der Aufzeichnung einer Folge von allgemein bei der Auswertung von Messdaten anwendbaren Prinzipien begonnen werden, in die sich die im erwähnten Artikel dargestellten photogrammetrischen Auswerteschritte sinngemäss einreihen lassen. Eine Analyse wird durchgeführt, um vor allem den Gebrauchswert der computergestützten Verfahren für die Datenverarbeitung zu demonstrieren. Einige Hinweise werden gegeben in bezug auf die Datenauswertung von unorthodoxem Bildmaterial, das aufgrund moderner Technik im Sinne der Ikonometrie in grösserem Masse in die Praxis Eingang finden dürfte.

En 1979, il a été traité dans cette revue, sous le titre «Über den Wandel der geometrischen-algebrischen Modellvorstellung in der Photogrammetrie unter dem Einfluss computergestützter Auswerteverfahren» (Evolution de la conception du modèle géométrico-algébrique en photogrammetrie sous l'influence des procédés de restitution assistés par ordinateur), l'influence du potentiel de l'ordinateur sur la formulation du modèle mathématique dans la méthode photogrammétrique (VPK 7-8/79, p 197-205). Afin d'éviter ici toute répétition inutile, le contenu de cet article est supposé connu – également dans le détail.

Le présent article débute par une revue d'une série de principes applicables de manière générale dans l'exploitation de données de mesure, série dans laquelle peuvent s'intégrer les étapes de restitution photogrammétrique décrites dans l'article mentionné. Une analyse est effectuée pour démontrer avant tout la valeur pratique des procédés utilisant l'ordinateur pour le traitement de données. L'auteur donne quelques indications en liaison avec l'exploitation de données provenant de matériel-image non orthodoxe, lequel pourrait, sur la base d'une technique moderne dans le sens de l'iconométrie, prendre une place croissante dans la pratique.

Will man aus Messdaten spezifische Parameter bestimmen, die a priori verlangte statische Eigenschaften haben sollen, so muss man tunlichst in einem ersten Schritt die Formulierung von einem mathematischen Modell vornehmen. Bei diesem Begriff handelt es sich um die Aufstellung funktionaler Beziehungen zwischen den eingangs erwähnten Parametern und Grössen, die man als idealisierte Messwerte interpretieren kann. Meist werden dazu algebraisch formulierte Ausdrücke in Bezug auf mathematische Grössen gebildet. Die Bezeichnung «mathematisches Modell» im Vergleich zu dem zuweilen gebrauchten Ausdruck «funktionales Modell» erscheint vom Prinzip her richtiger zu sein, da sich jede der aufzustellenden Beziehungen ausschliesslich auf idealisierte, also auf als fehlerfrei angenommene Grössen bezieht. Das mathematische Modell ist u.a. die Basis für eine eindeutige Problemlösung, deren Analyse Kenntnisse vermittelt, die für die Optimierung des Auswerteproblems nützlich sind. Ferner ist das mathematische Modell die Grundlage für das entsprechende stochastische Modell, aufgrund dessen es möglich wird, durch den Einbezug von überschüssiger Information, beim Vorhandensein von normal verteiltem Rauschen die wahrscheinlichsten Werte der zu bestimmenden Parameter, die wahrscheinlichsten Verbesserungen der Messwerte und statistische Angaben für alle berechneten Resultate zu erhalten. Diese Problematik wird in der zweiten Abhandlung diskutiert. Hier soll zunächst das mathematische Modell und die daraus hervorgehende eindeutige Lösung erörtert werden.

Dabei sollen diese Betrachtungen unter Berücksichtigung des sich rasch in die Praxis einführenden Potentials des elektronischen Rechnens angestellt werden.

Das mathematische Modell einer spezifischen Messanordnung kann mit dem Ausdruck $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{O}$ ganz allgemein dargestellt werden. Grundsätzlich sind im $\mathbf{y}$-Vektor die oben erwähnten Parameter $\mathbf{U}$ (als Unbekannte) und die idealisierten Messwerte $\mathbf{L}$ vorhanden. Damit gilt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{L},\mathbf{U}) = \mathbf{O} \qquad (1)$$

Die Formulierung eines spezifischen mathematischen Modells verfolgt also im allgemeinen den Zweck, die zu bestimmenden Parameter $\mathbf{U}$ mit den $\mathbf{L}$-Grössen in einen funktionalen Zusammenhang zu bringen. Dabei können sich natürlich auch Hilfsgrössen aufzwingen. Treten diese als zusätzliche Unbekannte auf, werden sie dem $\mathbf{U}$-Vektor hinzugefügt. Sind derartige Parameter als Konstante zu behandeln, ist ihre Verwendung im Modell unproblematisch. Im Falle dass gewisse im $\mathbf{U}$-Vektor vorkommende Parameter als zusätzliche Information in Form von Zufallsvariablen mit den dazugehörigen statistischen Angaben vorgegeben werden, kann von zusätzlichen Bedingungsgleichungen Gebrauch gemacht werden, eine Massnahme, die ausführlich in der Abhandlung in VPK 3/86 besprochen wird und hier nur insoweit zur Diskussion steht, als solche Information zur eindeutigen Problemlösung nötig sein kann.

Betrachten wir nun das mathematische Modell in Bezug auf den geometrischen Inhalt eines Messverfahrens, das hauptsächlich der Auswertung von Abbildungen dient.

Der eigentliche Datenerhebungsprozess für eine bildmässige Darstellung kann in der Registrierung von Abbildungsdetails gesehen werden. Jedes identifizierbare Abbildungsdetail gibt zu einer entsprechenden räumlichen Richtung Anlass. Solche Richtungen können aus der geometrisch interpretierten Umkehrung des Aufnahmevorganges gewonnen werden, offensichtlich mit Hilfe von spezifischen Parametern, die typisch für den unter betracht stehenden physikalischen Vorgang des Abbildungsprozesses sind.

Als ein die heutige Praxis immer noch dominierendes Beispiel ist die metrische Photographie zu nennen. Die Abbilder des zu vermessenden Objekts werden mit Hilfe eines Objektives und einem Zentralverschluss erhalten. Die Anzahl der ableitbaren räumlichen Richtungen entspricht

---

Die Beiträge von H.H. Schmid (VPK 2/86 und 3/86) sind vom Verfasser umgestaltete Übersetzungen englischer Vortragstexte. Die Vorträge wurden im September 1983 im Rahmen von Seminaren auf Einladung der «Chinese Academy of Space Technology» in Peking und Sian gehalten.

Originaltitel:
- The change of the photogrammetric evaluation technique from analog to computer assisted methods.
- Computer assisted possibilities for the treatment of redundant information including a general solution to the problem of the free net.

im Grenzfall der Anzahl von Auflösungselementen des verwendeten Datenerhebungssystems. Auch im Falle der klassischen Photographie gilt, dass der einzelne Abbildungsstrahl das grundsätzliche Bauelement des Aufnahmevorganges ist. Diese geometrische Simulierung des physikalisch-optischen Abbildungsprozesses führt im Falle der Photographie zu der vertretbaren Annahme, dass alle auftretenden Richtungen einen gemeinsamen Punkt, das Projektionszentrum, haben. Damit ergibt sich für die Vielzahl aller solcher Richtungen ein räumliches Strahlenbündel. Aufgrund dieser Eigenheit, die im Prinzip der Zentralperspektive ihren Ausdruck findet, haben die sich bei der Formulierung des mathematischen Modells nötig machenden «Elemente der inneren Orientierung» für alle zu modellierenden Richtungen die selben Werte. Sie sind im Grunde genommen nichts anderes als die räumlichen Koordinaten des Projektionszentrums, bezogen auf ein allerdings dreidimensional konzeptiertes Bildkoordinatensystem, und werden in der Praxis oft wie Kammerkalibrierungskonstante behandelt. Auf Grund der heute zur Verfügung stehenden Rechenkapazität werden diese Hilfsgrössen bisweilen ergänzt mit zusätzlichen Parametern, die meist dazu dienen, sogenannte Objektiv-Verzeichnungen und/oder Filmdeformationen, also physikalische Einflüsse, zu simulieren. Der Grundgedanke ist dabei, die im Bildkoordinatensystem als Ortsfunktionen beschriebene Lage eines spezifischen Abbildungsdetails auf einen dem mathematischen Prinzip der Zentralperspektive entsprechenden Ort umzurechnen.

Offensichtlich bleibt nach der Simulierung eines Aufnahmestrahles die zusätzliche Aufgabe, diesen Sehstrahl in bezug auf ein dreidimensionales Koordinatensystem zu orientieren. Es handelt sich dabei um den Bezugsrahmen, auf den sich das endgültige Triangulationsergebnis beziehen soll.

Insoweit, als die Annahme gerechtfertigt ist, dass die Belichtungsdauer des Zentralverschlusses kurz genug ist, um eine etwaig stattfindende geometrische Veränderung der Lage der Kammer im erwähnten Bezugssystem zu vernachlässigen, beziehentlich durch technische Vorkehrungen an der Aufnahmeapparatur genügend genau zu kompensieren, und unter der weiteren Annahme, dass das Objekt und somit der geometrische Inhalt der Photographie während des Belichtungsintervalls innerhalb des Bezugsrahmens als unveränderlich betrachtet werden kann, sind die geometrischen Parameter, die zur Orientierung des Einzelstrahlens führen, für alle im Aufnahmeprozess vorkommenden Richtungen die selben Grössen. Diese Sachlage ist die Voraussetzung, dass man den Vorgang der eigentlichen photogrammetrischen Aufnahme, d.h. die Entstehung des Messbildes, geometrisch durch ein Strahlenbündel genügend genau darstellen kann.

Danach ist in der klassischen Photogrammetrie die Aufgabe der sogenannten äusseren Orientierung als die Ortung des photogrammetrischen Modells des Objektes gegenüber dem vorerwähnten Bezugsrahmen im Objektraum zu interpretieren. Auf diesem Konzept beruhen schlussendlich auch alle Methoden der Zweibild-Analogauswertung bez. die Konstruktionen der verschiedenen photogrammetrischen Auswertegeräte.

Die dabei zusätzlich ausgenutzte Fähigkeit des stereoskopischen Sehvermögens beeinflusst die Genauigkeit des Orientierungs- und Auswertevorganges – beziehentlich im Grenzfall ermöglicht diese erst deren Ausführung –, ohne jedoch den geometrischen Inhalt des angewendeten Verfahrens zu beeinflussen. Die Analoglösung bedient sich also zweier mit optisch-mechanischen Mitteln wiederhergestellter Aufnahmestrahlenbündel, die – und das erscheint in bezug auf das entsprechende mathematische Modell wichtig – als Operationseinheiten im Orientierungsvorgang auftreten. Die Analogmethode ist deshalb als Bündelmethode anzusehen.

In bezug auf die sich daraus ergebenden Konsequenzen, vor allem im Vergleich mit der computer-aided-Methode, wird auf den in der Inhaltsübersicht erwähnten Artikel hingewiesen.

Hier soll der grundsätzliche Unterschied zwischen den mathematischen Modellen von allgemeinen geometrischen Gesichtspunkten aus betrachtet werden. Die wesentlichste Charakteristik der computergestützten Bildmessung kann man in der Tatsache sehen, dass das mathematische Modell sowohl für die Simulierung des Aufnahmevorganges als auch des Orientierungsproblems auf eine algebraische Formulierung der Geometrie eines idealisierten Einzelstrahles hinausläuft. Dabei bestehen von Haus aus keine spezialisierenden, d.h. einengenden Annahmen über die Art der Abbildung, wie solche z.B. am besprochenen Beispiel durch die Annahme einer Zentralperspektive vorhanden sind. In der computergestützten Behandlung wird diesem Spezialfall dadurch Rechnung getragen, dass sich ein Teil der bei der Modellierung des einzelnen Strahles auftretenden Unbekannten für alle Abbildungsstrahlen auf gleiche Grössen beziehen, genau so wie die Tatsache, dass sich homologe Strahlen im Raum schneiden müssen, dadurch zum Ausdruck kommt, dass die jedem derartigen Strahl im entsprechenden mathematischen Modell zugeordneten Objektpunktkoordinaten für alle solcher Strahlen wohl als Unbekannte, aber als gleiche Grössen in die Rechnung eingehen.

Die Benennung einer auf dieser Vorstellung beruhenden räumlichen Triangulation als «Bündelmethode» wirft einmal die Frage nach der Aussagekraft dieser Bezeichnung auf, zum anderen wird sie dem Potential der allgemeinen Bildtriangulation kaum gerecht. Die Stärke der numerischen Lösung liegt gerade in der Universalität ihrer Anwendungsmöglichkeit. Damit wird natürlich nicht ausgeschlossen, ein solches Verfahren auch für den Fall einer genügend strengen Zentralperspektive zu gebrauchen. Die sich für genauere Vermessungen in der Praxis immer ergebende Notwendigkeit, kleine Abweichungen zwischen physikalischer Realität und dem idealisierten mathematischen Modell zu berücksichtigen, kann durch die Verwendung von zusätzlichen Modellparametern in der Simulierungsphase erreicht werden. D.h. kleine Unstimmigkeiten im Konzept der z.B. Kollinearitätsbedingung, wie sie u.a. durch Refraktion entstehen, können Strahl für Strahl berücksichtigt werden, womit auch die Möglichkeit offen steht, die komplexe Wirklichkeit des optisch-chemischen Abbildungsprozesses genügend genau in Einklang mit dem idealisierten Prinzip der Zentralperspektive zu bringen.

Im allgemeinen werden die funktionalen Beziehungen, wie sie in einem mathematischen Modell vorkommen, nicht nötigerweise von Haus aus linear sein. In der Praxis überkommt man meistens die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten im Rechenvorgang mit einer Taylorreihenlinearisierung unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung.

Somit erhält man aus (1) das lineare System:

$$F(L^o, U^o) + \left[\frac{\delta F(y)}{\delta L}\right]_{L^o} \Delta L + \left[\frac{\delta F(y)}{\delta U}\right]_{U^o} \Delta U = 0 \quad (2)$$

wobei gilt: $\mathbf{L} = \mathbf{L^o} + \Delta \mathbf{L}$ und $\mathbf{U} = \mathbf{U^o} + \Delta \mathbf{U}$

$\mathbf{L^o}$ und $\mathbf{U^o}$ sind Annäherungswerte. Verwendet man für $\mathbf{L^o}$ die gemessenen Grössen ℓ, so kann man bei der eindeutigen Lösung $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{O}$ annehmen und man erhält für (2) mit offensichtlicher Bedeutung der eingeführten Bezeichnungen: $\mathbf{B}\,\Delta\mathbf{U} = \mathbf{w}$ (3). Hat man zur Bestimmung der Unbekannten $\mathbf{U}$, bez. $\Delta\mathbf{U}$ eine entsprechende Anzahl unabhängiger Gleichungen von der Form (3) zur Verfügung, d.h. ist $\mathbf{B}$ vom Format her eine u x u Matrix, erhält man rein formal als eindeutige Lösung: $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{w}$ (4). Ohne ins Gewicht fallende Limitierungen einzuführen, kann man als wesentlichste Aufgabe der Bildmessung die Bestimmung der räumlichen Lage einer Anzahl Objektpunkte sehen sowie im Falle der photographischen Abbildung die Bestimmung der Raumlage der Projektionszentren und die räumlichen Orientierungselemente der unter Betracht stehenden Aufnahmen. Die einfachste Form eines entsprechenden Triangulationsnetzes erhält man, wenn nur zwei Abbildungen des zu vermessenden Objektes vorliegen. Um diese Bemerkung über die geometrische Zielsetzung der sich auf Abbildungen stützenden Bild-

messung zu erweitern, soll die Tatsache erwähnt werden, dass jede Triangulation, die sich auf zwei Abbildungen bezieht, durch eine willkürliche Anzahl weiterer Abbildungen ergänzt werden kann, solang jedes zusätzliche Bild eine genügende Anzahl triangulierter Objektpunkte enthält. Die sogenannten Streifen- und Blocktriangulationen, oder in anderen Worten, die in ihrer Anordnung sehr anpassungsfähigen Mehrbildtriangulationen machen von dieser Möglichkeit Gebrauch.

Ehe die im Gleichungssystem (4) gegebene Lösung ausgeführt werden kann, muss man bei der Auswertung einer jeden Messmethode Überlegungen anstellen, ob die im mathematischen Modell auftretenden Unbekannten vom Informationsinhalt her aus den zur Verfügung stehenden Messgrössen abgeleitet werden können. Dies gilt vor allem dann, wenn im **U**-Vektor Grössen auftreten, die sich auf einen übergeordneten Bezugsrahmen beziehen, während die Messgrössen selbst von diesem Rahmen unabhängig sind, sich also nur auf Quantitäten beziehen, die zur inneren Geometrie des zu vermessenden Objektes gehören. Diese Situation liegt typisch bei Entfernungsmessungen, Messungen von Entfernungsunterschieden und/oder unorientierten Richtungen vor, unabhängig von deren Dimensionalität.

Deshalb fordern alle im geodätischen Bereich vorkommenden Messmethoden zusätzliche von aussen her einzuführende Informationen. Gleich hier soll betont werden, dass derartige zusätzliche Information sich immer auf eine Auswahl der U-Werte bez. auf Funktionen solcher Parameter bezieht, die im System (3) vorkommen. Diese Sachlage unterstützt die Forderung, im mathematischen Modell möglichst keine Unbekannten algebraisch zu eliminieren, ehe nicht die sich nötig machende zusätzliche Stützinformation eingeführt wurde.

Bei der Bildmessung wird diese Situation anschaulich, wenn man annehmen kann oder muss, dass die Information eines Abbildes invariant in bezug auf das Koordinatensystem des Objektraumes ist. Oder umgekehrt: Ein Ergebnis in Form von Koordinaten und absoluten Orientierungsgrössen kann niemals allein aus der Information solcher Abbildungen abgeleitet werden, d.h. also aus den Messungen von Bildkoordinaten.

Es ist nötig, zusätzliche Information von aussen her einzuführen, um, wie der mathematische Ausdruck sagt, den spezifischen Rang des Defektes des unter Betracht stehenden Gleichungssystems zu eliminieren. In anderen Worten: Das System (3) ist immer singulär unabhängig von der Anzahl von Gleichungen, die in der **B**-Matrix zusammengefasst sind, solange diese sich ausschliesslich auf Bildkoordinatenmessungen stützen.

Wie wohl bekannt, sind in der Bildmessung sieben derartige Informationsbits einzuführen, nämlich Information, die gleichwertig mit drei Translationen und drei Rotationen ist, also Quantitäten, die nötig und hinreichend sind, um einen dreidimensionalen Koordinatenrahmen festzulegen, und die beim Vorliegen von ausschliesslich Richtungsmessungen durch die Einführung eines Massstabsfaktors, bez. äquivalenter Information, ergänzt werden müssen.

Es sollte nun nicht schwierig sein, sich vorzustellen, dass das bisher meist geometrisch interpretierte Auswerteproblem bei der Bildmessung durch entsprechende algebraische Ausdrücke simuliert werden kann, die das entsprechende mathematische Modell bilden. Für ein Detail, das zu einer entsprechenden Programmierung führen kann, ist nochmals auf den vorerwähnten VPK-Artikel hingewiesen.

Zusammenfassend kann man folgern, dass das mathematische Modell der numerischen Bild-Auswertemethode sich auf die Behandlung einzelner Richtungen stützt und der Informationsinhalt einer Abbildung «i» als I_i aus der Summe der Beiträge der «n» simulierten Sehstrahlen besteht. Also gilt:

$$I_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{y})_i = \mathbf{0}$$

Der Informationsinhalt einer jeden vorstellbaren Bildmessanordnung ist dann gegeben als die Summe der Beiträge der einzelnen Abbildungen und somit als die Summe aller in einer spezifischen Messanordnung auftretenden Einzelstrahlen. Ein entsprechender Ausdruck ergibt sich für die Gesamtinformation I_j bei «m» Abbildungen als Doppelsummation mit:

$$I_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{y})_{ij} = \mathbf{0}$$

Auf diesem Prinzip fusst der Algorithmus für die computergestützte Auswertung der numerischen Bildtriangulation, eingeschlossen das operationelle Konzept des analytischen Plotters als auch der computer-aided Orthophotoprozess. Die geometrischen Aspekte der Auswertung von Abbildungen, begonnen beim verallgemeinerten Rückwärtseinschnitt bis zur Auswertung des sophistiziertesten Verbandes von Abbildungen, können somit aus der algebraischen Simulation von einzelnen Abbildungsstrahlen aufgebaut werden.

Die Anpassungsfähigkeit eines zweckmässig gewählten mathematischen Modells wurde u.a. offensichtlich mit der Einbeziehung von Messungen für den Triangulationsmassstab im photogrammetrischen Programm der Apolloflüge Nos 15 bis 17 durch Laser Entfernungsmessungen nach dem Mond. Auf Grund der Wahl des Kollinearitätsmodells in seiner dreiteiligen Originalformulierung, also ohne algebraische Eliminierung des Verhältnisfaktors im Einzelstrahl-Modell, konnte bei Rang sechs des Defektes eine gewichtete überbestimmte Massstabsbestimmung ohne Schwierigkeit ausgeführt werden.

Aus den bisher angestellten Betrachtungen können einige Schlussfolgerungen gezogen werden, deren Bedeutung nicht auf die Auswertung von klassischen, d.h. zentralperspektivischen Abbildungen beschränkt sind, sondern auch im Auswerteprozess von Abbildungen mit komplexeren Abbildungsbedingungen Gültigkeit haben.

In bezug auf die Verwendung des Computers für die numerische Auswertung sollte das mathematische Modell einer spezifischen Messmethode so einfach wie möglich gehalten werden. Die denkbar einfachste Bezugseinheit sollte bei der Aufstellung des mathematischen Modells Verwendung finden, wie z.B. der einzelne Abbildungsstrahl in der Bildmessung. Der optimale Gebrauch des Computers verlangt, wie bekannt, dass die Rechnungen auf einem, mathematisch gesehen, möglichst niederen Niveau gehalten werden, während die Anzahl der sich gelegentlich nötig machenden Loops im Rechenvorgang sehr gross sein darf.

Auf der anderen Seite sollte die Bemühung nach Einfachheit bei der Formulierung des mathematischen Modells nicht das Ziel haben, möglichst viele der auftretenden Parameter algebraisch zu eliminieren. Im Gegenteil: Es ist wünschenswert, möglichst alle Parameter, die zur Simulierung eines spezifischen Messverfahrens nötig sind, im Auswertealgorithmus zu belassen, um die Möglichkeit für einen uneingeschränkten Defektbeseitigungsprozess zu gewährleisten.

Die Reduktion von Unbekannten – in anderen Worten – die Reduktion der Anzahl von Gleichungen im System, das schlussendlich invertiert werden muss, ist zweifelslos ein, zumindest aus ökonomischen Gesichtspunkten, wünschenswertes Ziel. Jedoch sollte ein solcher Schritt durch numerische Elimination von gewissen Gruppen der Unbekannten erst *nach* der Defektbeseitigung vorgenommen werden. Bei der Auswertung von Abbildungen kann man annehmen, dass auch beim Vorliegen von unorthodoxen Bildern man im oben beschriebenen Sinn z.B. die Gruppe der sogenannten Orientierungsgrössen oder die Gruppe der Objektpunkte vor der Invertierung des Systems, aber erst nach der Einführung der Information zur Defektbeseitigung, tunlichst eliminiert. Praktisch kann dieser Eliminationsschritt wechselnd mit jeder Iterationsschleife ausgeführt werden. Wenn nötig, müssen natürlich die eliminierten Parameter und die ihnen zugeordneten statistischen Angaben nachträglich berechnet werden.

Ferner ist die Analyse eines spezifischen mathematischen Modells besonders geeignet für die Untersuchung einer bestimm-

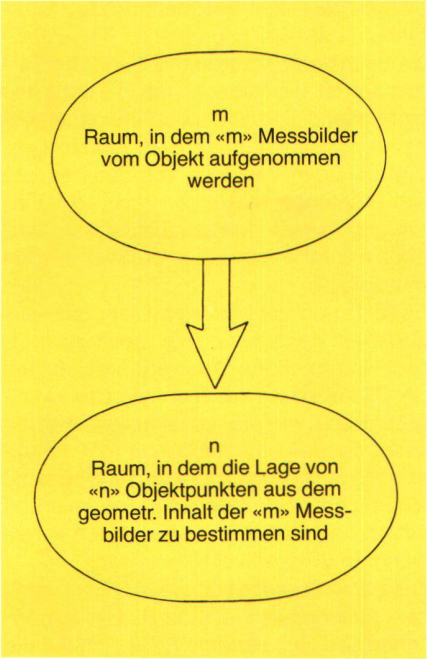
ten Messmethode in bezug auf die Universalität ihrer Anwendung. Bei der Bildmessung geht es dabei vor allem um die Einsicht in den Triangulationsprozess, d.h. um Kenntnis über mögliche Anordnungen der Abbildungen für verschiedene eindeutige Lösungen der räumlichen Bildtriangulation. Es ist eine bekannte Tatsache, dass ein System von unabhängigen linearen Gleichungen für «u» Unbekannte nur gelöst werden kann, wenn auch eine der Anzahl der Unbekannten entsprechende Anzahl solcher Gleichungen zur Verfügung steht. Dabei muss angenommen werden, dass die Koeffizientendeterminante dieser Gleichungen von Null genügend verschieden ist, so dass die Lösung vor allem bei geometrischen Problemen nicht durch das Vorhandensein von kritischen Flächen oder kritischen Räumen in Frage gestellt wird.

Von dieser Annahme ausgehend, kann man eine Vorstellung von der Mannigfaltigkeit von eindeutigen Lösungen in bezug auf ein spezifisches Messprinzip erhalten. Solche Information kann abgeleitet werden, wenn zunächst die Anzahl der aus der Messaufgabe resultierenden Unbekannten mit Hilfe des zugrundeliegenden mathematischen Modells festgestellt wird. Zieht man von deren Anzahl den Rank des vorliegenden Systemdefekts ab, so erhält man eine Angabe über die Anzahl von freien Variablen oder Unbekannten, die in einer spezifischen Messaufgabe zu bestimmen sind. Anderseitig kann man eine zahlenmässige Angabe über die Anzahl der unkorrelierten Gleichungen berechnen, die sich gesamthaft für eine spezifische Messanordnung ergeben. Eindeutige, d.h. sich nicht widersprechende Lösungen sind durch die Forderung gekennzeichnet, dass die Anzahl der nicht korrelierten Gleichungen gleich sein muss zur Anzahl der Unbekannten nach der Defektbeseitigung. Von dieser notwendigen Balance zwischen der Anforderung von Information (Anzahl der freien Variablen) und der zur Verfügung stehenden Messinformation (Anzahl der unabhängigen Bestimmungsgleichungen) kann ein Ausdruck abgeleitet werden, der in Hinsicht auf das Vorhandensein von verschiedenen eindeutigen Lösungen analysiert werden kann.

Diese Möglichkeit soll am Beispiel einer Bildtriangulation demonstriert werden.

Der geometrische Inhalt einer solchen Triangulation, die sich auf klassische Messbilder stützt, kann mit dem folgenden Diagramm erklärt werden.

Der Pfeil deutet an, dass der Ursprung der Information im Raum «m» ist und zum Objektraum «n» fliesst. Ferner wird die Annahme gemacht, dass keine zusätzlichen Messungen existieren, weder zwischen den im m-Raum auftretenden Orientierungsgrössen, noch zwischen den Orten der n-Punkte des Objektraumes.



Im Einklang mit dem Aufbau des erwähnten mathematischen Modells der Kollinearität kann der entsprechende **y**-Vektor aufgeteilt werden in:

- **O** ein Vektor für alle Orientierungsparameter eines Einzelstrahles
- $\mathbf{X}_i$ ein Vektor der räumlichen Koordinaten eines Objektpunktes «i»
- $\mathbf{x}_i$ ein Vektor der dreidimensionalen Bildkoordinaten eines Abbildungspunktes, und
- s_i ein jedem Einzelstrahl zugeordneter Verhältnisfaktor, der mitunter als Massstabsfaktor des spezifischen Sehstrahles bezeichnet wird.

Die Anzahl der Parameter (p), die in einer Bildtriangulation auftreten, kann, ohne die Anzahl der gemessenen Bildkoordinaten zu berücksichtigen, berechnet werden als:

$p = Om + 3n + s$. Dabei gilt für s = Anzahl der in einer bestimmten Triangulationsfiguration auftretenden Einzelstrahlen.

Mit dem vorher erwähnten Rang des Defektes (D) eines sich auf räumliche Richtungen stützenden Triangulationssystems von sieben ergibt sich die Anzahl von freien Variablen (u) als:

$$u = p - D = Om + 3n + s - 7$$

Da die Anzahl von unabhängigen Bestimmungsgleichungen im mathematischen Modell des Einzelstrahles drei ist, ergibt sich die Gesamtzahl bei s-Sehstrahlen als:

$$E = 3s$$

Um der allgemeinen Gültigkeit willen kann man nicht annehmen, dass alle n-Objektpunkte auf allen m-Abbildungen erscheinen. Deshalb muss man zwischen verschiedenen Punktarten im Objektraum unterscheiden. Die verschiedenen Typen solcher Punkte soll mit dem Buchstaben t_i bezeichnet werden, wobei sich die Indexziffer «i» auf die Anzahl der sich in einem so bezeichneten Objektpunkt schneidenden Einzelstrahlen bezieht.

Somit kann man für die Anzahl der Objektpunkte «n» setzen:

$$n = (t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{m-1} + t_m)$$

Die Gesamtzahl aller Einzelstrahlen wird damit:

$$s = (1t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \ldots + (m-1)t_{m-1} + mt_m)$$

Die für die Informationsballance aufzustellende Gleichung ist u = E, und mit den oben abgeleiteten Resultaten:

$$Om + 3n + s - 7 = 3s \text{ oder}$$
$$Om - 7 = 2s - 3n$$

Substituiert man die aufgestellten Ausdrücke für n und s, erhält man für:

$$2s - 3n = [- t_1 + t_2 + 3t_3 + \ldots + (2m - 5)t_{m-1} + (2m - 3)t_m]$$

und schlussendlich für die Bedingung der eindeutigen Lösung:

$$Om - 7 = [- t_1 + t_2 + 3t_3 + \ldots + (2m - 5)t_{m-1} + (2m - 3)t_m].$$

Es ist nun möglich, diesen Ausdruck zahlenmässig auszuwerten, um die Information über eindeutige Lösungen zu erhalten, die bei der Bildtriangulation möglich sind. Ohne irgendwelche Restriktionen einzuführen, soll von der in der Praxis meistens gebrauchten Annahme ausgegangen werden, dass die Elemente der inneren Orientierung als fehlerfreie Grössen eingeführt werden. Folglich ist die Anzahl der im **O**-Vektor auftretenden Parameter «sechs». Weiter soll, um das Beispiel nicht unnötig zu komplizieren, die Annahme gemacht werden, dass die Objektpunkte auf zumindest zwei Abbildungen erscheinen. Somit sind Punkte des Typs t_1 nicht vorhanden. Das Resultat einer derartigen Investigation ist in folgender Tabelle wiedergegeben.

Die Tabelle enthält insoweit interessante Information, als sich die Tatsache zeigt, dass die Anzahl der möglichen eindeutigen Lösungen rasch zunimmt, wenn die Anzahl von Bildern, auf denen ein spezifisches Objekt abgebildet ist, anwächst.

Von praktischem Interesse ist die Tatsache, dass bei einer Abbildungszahl $m > 2$ immer eine eindeutige Lösung besteht, die ausschliesslich die Schnitte von je zwei homologen Strahlen erfordert. Jedoch, wie ersichtlich, steigt die Anzahl der zu bestimmenden freien Variablen aufgrund des Anwachsens der nötigen Objektpunktanzahl «n» an, so dass eine solche Lösung erhöhten Messaufwand mit sich bringt.

Bis zu einem gewissen Grad ist überraschend, dass unabhängig von der Anzahl von Abbildungen, die für ein Objektanteil vorliegen, es immer möglich ist, mindestens eine eindeutige Lösung aufgrund von fünf

m	t_2	t_3	t_4	$n = \Sigma t_j$	Om - 7 = 2s-3n	s	u	Anzahl eindeutiger Lösungen	Bemerkungen
2	5	–	–	$\boxed{5}$	5	10	20	1	klassische 2-Bildtriangulation
3	11	0	–	11	11	22	44		Albertz'sche Doppelstreifen Triangulation
	8	1	–	9		19	38		klassische Streifentriangulation
								4	
	5	2	–	7		16	32		
	2	3	–	$\boxed{5}$		13	26		
4	17	0	0	17	17	34	68		
	14	7	0	15		31	62		
	11	2	0	13		28	56		
	8	3	0	11		25	50		
	5	4	0	9		22	44		
	2	5	0	7		19	38		
								15	
	12	0	1	13	17	28	56		
	9	1	1	11		25	50		
	6	2	1	9		22	44		
	3	3	1	7		19	38		
	0	4	1	$\boxed{5}$		16	32		
	7	0	2	9	17	22	44		
	4	1	2	7		19	38		
	1	2	2	$\boxed{5}$		16	32		
	2	0	3	$\boxed{5}$	17	16	32		

O = Anzahl der Orientierungselemente pro Aufnahme = 6
m = Anzahl von Aufnahmen
t_i = Punkte in denen sich «i» homologe Strahlen schneiden
n = Anzahl der Objektpunkte
Om-7 = Bedingung für die Informationsballance (Defekt = 7) = 2s - 3n
s = Anzahl von einzelnen Strahlen
u = Anzahl der freien Variablen

Objektpunkten herzustellen, wie mit den umrandeten Lösungen gezeigt ist. Eine derartige Analyse in bezug auf die Möglichkeit verschiedener eindeutiger Lösungen sollte die Untersuchung von Problemen anregen, die sich mit der inneren Genauigkeit eines triangulierten Punkthaufens befassen. Solche Untersuchungen sollten vor allem bei der Anwendung der Bildmessung im nicht-topographischen Bereich von Interesse sein, wo man oft zu unkonventionellen Bildanordnungen gezwungen ist, oder andererseits diese möglich sind. Dabei ist es sicherlich wichtig, einen Einblick in den nötigen messtechnischen Aufwand versus erreichbarer Genauigkeit im eindeutigen Modell zu erhalten.

Zusammenfassung:

Dieser Artikel beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Problem des mathematischen Modells, beziehentlich dessen vor allen geometrischen Veränderungen unter dem Einfluss der computer-aided Auswertetechnik. Ein wesentliches Resultat kann darin gesehen werden, dass die meisten Beschränkungen der Analogauswertung vornehmlich in bezug auf die Universalität der Anwendung der Bildmessung mit Hilfe der numerischen Möglichkeiten überkommen werden. Dabei sollte erkannt werden, dass die computergestützten Verfahren nicht lediglich als ein Ersatz für den Einsatz gewisser analog arbeitender Komponenten angesehen werden sollten. Das Potential des elektronischen Rechnens hat auf Grund seiner Kapazität in bezug auf die hohe Rechenschärfe und seiner operationellen Geschwindigkeit einen bedeutenden Zuwachs in den Anwendemöglichkeiten beim Einsatz der Bildmessung gebracht. Dazu kommt die grosse Anpassungsfähigkeit in der Datenbehandlung. Diese Entwicklung bringt nicht nur vom ökonomischen Gesichtspunkt her Vorteile, sondern erlaubt mit einem Blick in Richtung zukünftiger Anwendung eine allgemeine Datenbehandlungsweise zu entwickeln. So sollten Bilder, die mit unkonventionellen Aufnahmeverfahren erhalten werden, wie z.B. Abbildungen von dynamisch arbeitenden Panoramakammern oder elektro-optischen Scannern, thermischen Mappern oder Abbildungen produzierenden Radars, nach grundsätzlich gleichen, zumindest ähnlichen Gesichtspunkten ausgewertet werden können. Zusätzlich wird die Geschwindigkeit des elektronischen Rechenprozesses mit seiner Realtime-Kapazität in steigendem Masse für die Lösung von operationellen Problemen im instrumentellen Bereich für moderne Datenverarbeitungsansprüche zur Anwendung kommen. Dem Inhalt der eindeutigen Lösung und die Anpassung des mathematischen Modells an die vorhandene elektronische Rechenkapazität wurde besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Eine zusätzliche Bedeutung kommt der eindeutigen Lösung für das im nächsten Artikel zu diskutierende allgemeine Konzept für eine computergestützte statistische Verarbeitung von überschüssiger Information zu.

Ausgewählte Bezugsliteratur ist am Ende der im nächsten Heft folgenden Abhandlung gegeben.

Adresse des Verfassers:

Hellmut H. Schmid
em. Prof. ETH Zürich, Dr. Dr. h.c.
Baermattweg 10, CH-3324 Hindelbank