

# Ein Versuch, die hypothesenfreie Reduktion des geometrischen Nivellements und die Schwerelosigkeit beim "Freien Fall" aus der Kräftefunktion darzustellen

Autor(en): **Embacher, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural**

Band (Jahr): **86 (1988)**

Heft 2

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-233744>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Ein Versuch, die hypothesenfreie Reduktion des geometrischen Nivellements und die Schwerelosigkeit beim «Freien Fall» aus der Kräftefunktion darzustellen

W. Embacher

Das totale Differential der Kräftefunktion gibt, bei sinngemässer Festlegung der Konstanten, die Potentialdifferenz zweier Punkte und die Schwerkraft. Andererseits erkennt man aus der Ableitung der Kräftefunktion, dass beim bewegten System die doppelte Beschleunigung auftritt, während im System selbst Schwerelosigkeit herrscht. Weiters zeigt der Verfasser einen Fehler auf, welcher bisher bei der Berechnung der «Geopotentiellen Kote» aufgetreten ist.

*La différentielle totale de la fonction de forces (champ gravitationnel) donne, lorsque l'on fixe correctement les constantes, la différence de potentiel entre deux points et la pesanteur. On montre d'autre part qu'en dérivant la fonction de forces, on obtient le double de l'accélération dans un système en mouvement, tandis que règne l'apesanteur dans le système lui-même. L'auteur met aussi en évidence une faute commise jusqu'ici dans le calcul de la cote géopotentielle.*

### 1. Einleitung

Der in der Geodäsie hauptsächlich verwendete Ausdruck «Kräftefunktion» ist mit der negativen Potentialfunktion gleichbedeutend.

Lagrange hat zuerst die Bemerkung gemacht, dass sich die Komponenten einer anziehenden Kraft als die partiellen Differentialquotienten einer und derselben Funktion nach den Koordinaten des angezogenen Punktes darstellen lassen. Laplace hat dieses Resultat auf die Anziehung beliebiger Massen ausgedehnt. Für die dabei auftretende Funktion hat Gauss den Namen «Potential» eingeführt. Green hatte dafür die Bezeichnung «Potentialfunktion» vorgeschlagen.

Je nach dem Grade der Annäherung in der Reihenentwicklung der Kräftefunktion unterscheidet man sogenannte Niveausphäroide n-ten Ranges. Das Glied 0. Ordnung stellt die Kugel dar.

### 2. Das Schwerfeld der Erde

Wir betrachten näherungsweise den Erdkörper als geschichtete Kugel, so dass wir ihn durch einen Massenpunkt ersetzt denken dürfen.

Die Bewegung der Einheitsmasse auf dem Weg  $dr$  entgegen der Schwerkraft  $\gamma$  erfordert die Arbeit

$$dA = -\gamma dr = -k^2 \frac{M}{r^2} dr \quad (0,1)$$

Um die Masse von der Höhe  $r_1$  auf  $r_2$  zu heben, ist die Arbeit

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -k^2 \frac{M}{r^2} dr = k^2 \frac{M}{r_2} - k^2 \frac{M}{r_1} \quad (0,2)$$

erforderlich.

Um die Probemasse von  $r_1 = r$  aus nach  $r_2 = \infty$  zu befördern, braucht man die sogenannte Ablösearbeit P

$$P = -k^2 \frac{M}{r} \quad (0,3)$$

Man bezeichnet sie als potentielle Energie oder Potential des Feldes an der Stelle  $r$ ; dieses Potential ist nach dem oben Gesagten gleich der negativen Kräftefunktion U, wobei  $k^2$  die Gravitationskonstante, d.i. ein Proportionalitätsfaktor mit

$$k^2 = 66,67 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{und } M = \frac{4}{3} \pi r^3 \dots \sigma_m \quad (0,4)$$

ist, wenn  $\sigma_m$  die mittlere Dichte der Erde bedeutet. Überlässt man die Probemasse mit der potentiellen Energie  $-k^2 \frac{M}{r}$

sich selbst, so setzt sie sich in Richtung der wirkenden Kraft in Bewegung. Sie gewinnt an kinetischer Energie mit wachsender Geschwindigkeit  $v$ . Bezeichnen wir mit  $R$  den Erdradius und mit  $r$  den Abstand der Probemasse vom Erdmittelpunkt bei Beginn des Falles, so gilt für die kinetische Energie nach Durchfallen der Potentialdifferenz

$$\frac{v^2}{2} = k^2 M \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \quad (0,5)$$

In der Nähe der Erdoberfläche geht diese Gleichung für

$$\gamma = \frac{M}{R^2} k^2$$

und mit einer Fallhöhe  $h = (r - R)$  über in

$$\frac{v^2}{2} = \gamma \cdot h \quad \text{oder} \quad v^2 = 2 \gamma h \quad (0,6)$$

Dies ist das allgemeine Fallgesetz.

Setzen wir in Gleichung (0,3) für die Masse  $M$  die Gleichung (0,4) ein und bedenken, dass der Ausdruck

$$k^2 \frac{M}{R^2}$$

gleich der Schwere  $\gamma$  ist, so gilt für die Kräftefunktion U auf der Oberfläche der geschichteten Kugel

$$U = \gamma \cdot R \quad (0,7)$$

Dies ist die Gleichung der Niveaufläche im Abstand  $R$ . Betrachten wir den Zustand der relativen Ruhe, so können wir den Mittelwert

$$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \gamma_m$$

der Schwere der beiden Niveauflächen  $U_1$  und  $U_2$  in der Nähe der Oberfläche als konstant auffassen und bezeichnen wir den Unterschied der beiden Radien dieser Niveauflächen ( $R_2 - R_1$ ) mit  $\Delta R = -h$ , so gilt für den Potentialunterschied  $\Delta U$  der beiden Niveauflächen

$$\Delta U_R = -\gamma_m h \quad (0,8)$$

Bei konstant gehaltenem Radius, und nur dann, gilt bei Änderung der Schwere  $\gamma$  um  $\Delta \gamma$

$$\Delta U_\gamma = \Delta \gamma R \quad (0,9)$$

Die Gleichung (0,9) geht aus der Fundamentalgleichung meines «Dynamischen Nivellements» hervor und setzt keine Massenänderung, bzw. Dichteänderung voraus. Die Gleichung (5,2) meiner Arbeit: «Der Höhenunterschied zweier Punkte der physischen Erdoberfläche» (Heft 9 der Institutsmittellungen des Institutes für Geodäsie der Universität Innsbruck) lautet:

$$h = \frac{(g - \gamma_0)}{-\left(\frac{\Delta g}{\Delta h} - 4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta\right) - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h} - 4\pi k^2 \sigma \sin \delta \cos \delta}$$

# Partie rédactionnelle

Auf die geschichtete oder homogene Kugel angewandt, gibt sie den Kugelradius:

$$R = \frac{\gamma}{4\pi k^2 \sigma_m - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h}}$$

denn  $\frac{\Delta g}{\Delta h}$  ist auf der Kugeloberfläche Null, genauso wie der Geländewinkel  $\delta$ . Damit ergibt sich für den Nenner

$$\begin{aligned} & (4\pi k^2 \sigma_m - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h}) \\ &= 4\pi k^2 \cdot 5,517 - \frac{4}{3} \pi \cdot 4k^2 \cdot 5,517 \\ &= -\frac{4}{3} \pi k^2 \sigma_m = -154,14 \text{ sec}^{-2} \end{aligned}$$

von mir mit  $\Delta \gamma$  bezeichnet.

Allein die Dimension von  $\Delta \gamma [\text{sec}]^{-2}$  zeigt, dass der Ausdruck mit Masse oder Massenänderung nichts zu tun hat. Wie oben erwähnt, gelten diese Überlegungen für die Nähe der Kugeloberfläche. Aus A. Wangerin: «Theorie des Potentials und der Kugelfunktion» (Seite 50) ergeben für  $r = R$  die Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \lim_{r=R} V_a &= \lim_{r=R} V_i = \frac{4}{3} \pi \sigma R^2 \\ &= \Delta \gamma \cdot R \cdot R = \gamma \cdot R \end{aligned}$$

(siehe Gleichung 0,72)

$$\lim_{r=R} X_a = \lim_{r=R} X_i = \frac{4}{3} \pi \sigma X = \Delta \gamma \cdot R = \gamma$$

(siehe Gleichung 0,9)

Obwohl die Funktionen für Potential und Anziehung für äussere und innere Punkte verschieden sind, schliessen sich die Aus- und Innenwerte an der Grenzfläche (Oberfläche) kontinuierlich an. Dementsprechend sind die Hauptglieder der Funktionen ausserhalb der Grenzfläche bis auf kleine Korrektionsglieder den Hauptgliedern an der Grenzfläche gleich: Denn für  $r = R + h$  lautet das Potential

$$V_a = \gamma \cdot R \cdot \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

und die Anziehung  $X_a$

$$X_a = \gamma \cdot \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

Man sieht, dass die Korrektionsglieder in der Nähe der Grenzfläche in Bezug auf die Hauptglieder sehr klein sind. Es genügt daher, die Funktionen an der Grenzfläche selbst zu untersuchen.

Aus dem Ausdruck für die Schwere

$\gamma = k^2 \frac{4}{3} \pi \sigma_m \cdot R$ , der wie oben gezeigt wurde, auch in der Nähe der Erdoberfläche gilt, geht hervor, dass

$$\Delta \gamma = k^2 \frac{4}{3} \pi \sigma_m$$

sein muss ( $\Delta \gamma$  ist die zweite Ableitung von  $V_i$  in einer Richtung). Also zeigt Gleichung 0,9), dass die Ableitung der Kräftefunktion nach der Schwere  $\gamma$  bei gleichbleibendem Radius, im Zustand der Ruhe, die Schwere ergibt.

### 3. Der Abstand benachbarter Niveaulflächen

Wir gehen vom Modell der Kugelflächen als Niveaulflächen ab und betrachten die tatsächlichen Niveaulflächen. Wenn  $n$  die nach aussen gerichtete Normale im Punkt P einer Niveaulfläche ist, so ändert sich beim Übergang in der gleichen Lotlinie von der Niveaulfläche  $W = C$  zur benachbarten die Konstante  $W$  um  $dW$  und es gilt analog zu Gleichung 0,8) die Gleichung

$$g \, dn = -dW \quad 1)$$

Orientieren wir das Koordinatensystem im Punkt  $P_0$  so, dass die z-Achse mit der Flächennormalen zusammenfällt, die + x-Achse mit der geographischen Nordrichtung und die + y-Achse mit der Ostrichtung, so sind die Komponenten der Schwerkraft, wenn wir unter  $W$  das Potential der Schwerkraft verstehen, im Punkt  $P_0$ :

$$g = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 = 0 \quad 2)$$

Setzen wir für die Funktion  $f(x, y, z)$  jetzt die

Funktion  $\frac{\delta W}{\delta z}$ , so ist im Punkt P ( $x, y, z$ ), wenn wir den Wert im benachbarten Punkt  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  mit  $\left(\frac{\delta W}{\delta z}\right)_0$  bezeichnen nach der Taylorschen Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta z} &= \left(\frac{\delta W}{\delta z}\right)_0 + \left(\frac{\delta^2 W}{\delta x \delta z}\right)_0 (x - x_0) \\ &+ \left(\frac{\delta^2 W}{\delta y \delta z}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\delta^2 W}{\delta z^2}\right)_0 (z - z_0) + \dots \end{aligned} \quad 3)$$

$\frac{\delta W}{\delta z}$  bedeutet die Zunahme des Potentials in Richtung der z-Achse. Setzen wir für  $z - z_0$  den Höhenunterschied  $-\Delta h$  und für die Resultierende aus  $(x - x_0)$  und  $(y - y_0)$  die Seite  $\Delta s$ , so geht Gleichung 3) über in

$$\begin{aligned} -\frac{\delta W}{\delta h} &= g_0 - \left(\frac{\delta^2 W}{\delta h^2}\right)_0 \Delta h \\ &+ \left(\frac{\delta^2 W}{\delta h \delta s}\right)_0 \Delta s + \dots \end{aligned} \quad 4)$$

Die beiden letzten Glieder dieser Gleichung entsprechen dem Schwereunterschied  $\Delta g$  zweier benachbarten Punkte der physischen Erdoberfläche

$$\Delta g = -\Delta h \frac{\delta g}{\delta h} + \Delta s \frac{\delta g}{\delta s} \quad 5)$$

Uns interessiert der Höhenunterschied zweier Punkte der physischen Erdoberfläche. Man pflegt die Differenz zweier Zielhöhen, welche durch die horizontale Visur eines Nivellierinstrumentes an zwei vertikal aufgestellten Massstäben entsteht, als Höhenunterschied der beiden Punkte zu bezeichnen.

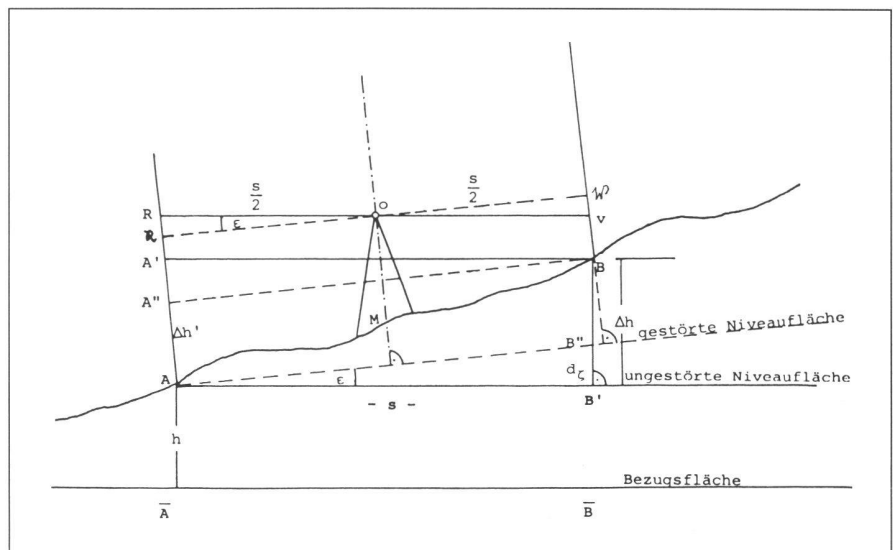


Abb. 1

Das «Denkgewohnte» liegt in den beiden Begriffen «horizontal» und «vertikal». Als «Denknotwendiges» wäre festzustellen, dass die Niveaufläche durch den Schnittpunkt Kippachse-Stehachse nicht parallel ist mit der Senkrechten auf das Lot im Fusspunkt des Instrumentes, auf welche sich die Differenz der Zielhöhen bezieht. Zunächst wollen wir die Frage nach der wahren Natur der nivellierten Höhenunterschiede wiederholend klären.

Abbildung 1 zeigt den Schnitt eines Hanges in Richtung der Falllinie mit den Geländepunkten A, M und B.

$\bar{A} \bar{B}$  sei die ungestörte Ausgangsfläche, der Abstand  $\bar{A} \bar{A}$  sei  $h$ . Der Standpunkt des Nivellierinstrumentes ist M und die beiden Nivellierlatten stehen in A und B. Die gestörte Niveaufläche in A ist strichliert gezeichnet ( $A B''$ ), während die Parallele zur ungestörten Niveaufläche in A und B' voll dargestellt wurde. Der Winkel zwischen der Parallelen zur ungestörten und der gestörten Niveaufläche ist mit  $\varepsilon$  bezeichnet, dieser Winkel kann im Gebirge einen Betrag bis zu 30 Bogensekunden erreichen. In O sei die Visierlinie durch R - W gekennzeichnet und die Parallele zur ungestörten Niveaufläche durch O wäre R - V. Der Höhenunterschied im gestörten System (d.h. dem tatsächlich vorhandenen System) ist  $\Delta h' = AA'' = BB''$  und der im ungestörten System  $\Delta h = BB' = AA'$ . Es ist also  $\Delta h$  um  $B'B'' = d\zeta$  grösser als  $\Delta h'$ , das heisst

$$\Delta h = \Delta h' + d\zeta = \Delta h' + \frac{g_A - g_B}{g} h \quad (5,0)$$

Der Wert für  $d\zeta$  wurde der Arbeit [1] entnommen (Glg. 3.21, S. 24).

Die Nichtparallelität der beiden ungestörten Niveauflächen  $\bar{A} \bar{B}$  und  $AB'$ , d.h. der Höhenunterschied  $\Delta h_B$  wegen der Bessel- oder Normalreduktion " $\Delta\gamma$ " beträgt im Maximum in der Nord-Südrichtung  $\Delta h_B = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} h$  (siehe [2] Glg. (10), Seite 292, und [5] Glg. (3.2), Seite 250). Diese Reduktion beträgt in unserer Breite z.B. für 2000 m Höhenunterschied auf einen Kilometer Entfernung etwa 1,6 mm.

Nehmen wir an, es würde vom Punkt A bis zum Punkt I nivelliert. So erhalten wir als «rohe Lattenhöhe» des Punktes I über Punkt A

$$\text{"Rohe Lattenhöhe"} = \sum_{n=1}^{n=i} \Delta h'$$

Die Summe  $\sum_{n=1}^{n=i} \Delta h'$  ist der Abstand einer zur Bezugsfläche durch A parallelen Fläche. Nachdem die Lotrichtungen nur um Sekundenbeträge schwanken, kann man die einzelnen Lattenabschnitte summieren. Der Fehler, welcher bei einem Richtungsunterschied der Lotrichtungen von beispielsweise 30" und einem Höhen-

unterschied von 3000 m dadurch entsteht, beträgt 0,03 mm, kann also vernachlässigt werden.

Die Nichtparallelität der tatsächlichen Niveauflächen kann beim geometrischen Nivellement nicht festgestellt werden (siehe [9], Abb. 4), weil das geometrische Nivellement sowohl auf der ungestörten als auch auf der gestörten Niveaufläche den Höhenunterschied Null ergibt.

Wir gehen vom Abstand zweier Parallellflächen zur einfacheren Vorstellung auf den Abstand zweier Parallelkurven über und betrachten der Einfachheit halber als Ausgangspunkt einen Meridian einer Rotationsfläche.

Zwei Parallelkurven sind dadurch definiert, dass sie auf allen ihren gemeinsamen Normalen ein Stück von derselben Länge abschneiden; bekanntlich heissen diese stetigen Kurven «Evolventen». Der Ort ihrer gemeinsamen Krümmungsmittelpunkte ist die Evolute. Da die Krümmung eine Funktion der zweiten Ableitung ist, muss die Evolute einschliesslich der zweiten Ableitung eine stetige Kurve sein. Im allgemeinen ist der ebene Schnitt einer gestörten Niveaufläche keine solche Kurve. Daher gibt es zu einer gestörten Niveaufläche, wenn wir wieder zu den Flächen übergehen, im allgemeinen keine Parallellfläche. Die gestörte Niveaufläche kann also nicht als Vergleichsfläche dienen.

Die «rohe Lattenhöhe» kann nicht als Abstand von einer gestörten oder tatsächlichen Niveaufläche aufgefasst werden, sondern nur als Abstand von einer analytischen Fläche definiert werden!

Die «rohe Lattenhöhe» erweitert durch die Höhenänderung  $\Delta h_B$  wegen der Normal-

oder Besselreduktion gibt den Abstand zweier ungestörter Niveauflächen. Gibt man die Summe aller  $d\zeta$  dazu, so erhält man den Abstand eines Punktes einer gestörten Niveaufläche von der ungestörten Bezugsniveaufläche in seiner Lotlinie. Würde man den Abstand zweier gestörter Niveauflächen suchen, so müsste man die Differenz der beiden Abstände von der jeweiligen ungestörten Niveaufläche ( $d\zeta_{\text{unten}} - d\zeta_{\text{oben}}$ ) suchen.

Da sich jedoch die zweite gestörte Niveaufläche unter der physischen Erdoberfläche befindet, ist eine Bestimmung des Höhenunterschiedes  $d\zeta_{\text{unten}}$  dieser gestörten Niveaufläche von ihrer zugehörigen ungestörten ohne Hypothesen nicht möglich.

Der Höhenunterschied eines Oberflächenpunktes lässt sich nur in Bezug auf eine ungestörte Ausgangsfläche hypothesenfrei bestimmen.

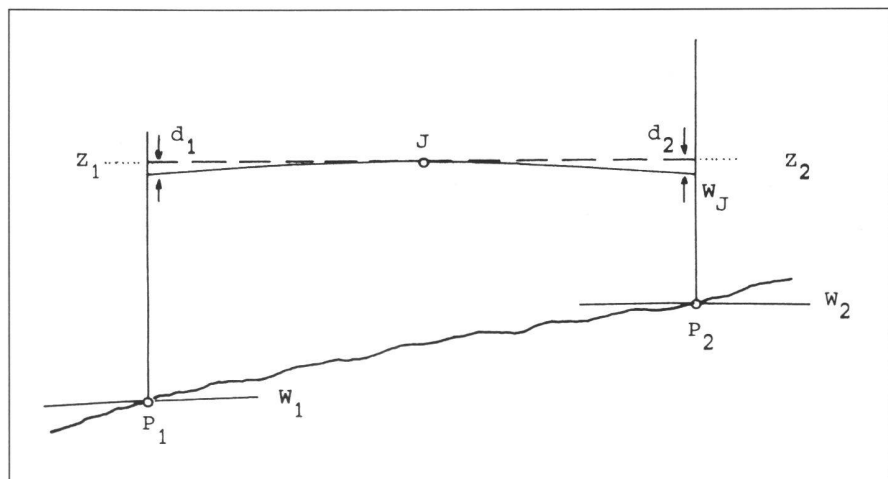
Helmert schreibt in seinem Lehrbuch [2], dass aus geometrischen Nivellements Höhenunterschiede und Meereshöhen in Strenge nicht zu finden sind. Er geht zur Bestimmung der «strengen Reduktion des Nivellements» auf Potentialdifferenzen über.

Er und in der Folge auch Ledersteger [3] geben für die Potentialdifferenz zweier Messpunkte und damit zweier Niveauflächen die Gleichung

$$W_2 - W_1 = (z_2 - z_1) \frac{g_2 + g_1}{2} \quad (6,0)$$

an, wobei sie das Restglied  $\frac{1}{2} (z_2 + z_1)$

$(g_2 - g_1)$  wegen seiner angeblichen Geringfügigkeit vernachlässigen. Die Werte für  $g_1$  und  $g_2$  werden den Messungen an



**Abb. 2**  
 $W_1, W_2$  Niveaufläche durch Punkt 1 bzw. 2  
 $W_J$  Niveaufläche durch Instrumentenhorizont  
 $z_1$  Lattenablesung: ... auf Lattenstandpunkt 1  
 $z_2$  Lattenablesung: ... auf Lattenstandpunkt 2  
 $O$  Lattennullpunkt  
 $d_1, d_2$  Abstand im Punkt 1 bzw. 2 zwischen Horizontalebene und Niveaufläche durch den Instrumentenhorizont J  
 $\Delta C_{1,2}$  Potentialdifferenz zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$

# Partie rédactionnelle

den Fusspunkten  $P_1$  und  $P_2$  der Messlaten entnommen. Zeger [4] berechnet den Potentialunterschied zweier Punkte exakter, indem er die Horizontal- und Vertikalgradienten einführt.

Zeger erhält die Potentialdifferenz  $\Delta C_{1,2} = W_2 - W_1$  mit

$$\Delta C_{1,2} = -\bar{g}_1(z_1 - d_1) + \bar{g}_2(z_2 - d_2)$$

Durch Transformation, wie bei Helmert [1] und Ledersteger [2] und Einführung des Vertikalgradienten  $V_a$  erhält er die mittleren Schwerewerte  $\bar{g}_1$  und  $\bar{g}_2$ . Die Differenz der Oberflächenschwerewerte drückt Zeger durch Gleichung 5,0) aus, wobei

$$\frac{\delta g}{\delta h} = V_a \text{ und } \frac{\delta g}{\delta s} = H_a$$

die äusseren Gradienten sind. Er erhält schliesslich, bei Vernachlässigung der Abstände  $d_1$  und  $d_2$ :

$$\Delta C_{1,2} = -\frac{1}{2}(g_1 + g_2)\Delta h_{1,2} + \frac{1}{2}s_{1,2}(z_1 + z_2)H_a \dots \quad (7,0)$$

Bekanntlich ist beim Nivellement aus der Mitte bei stetigem Gelände die jeweilige Instrumentenhöhe gleich der halben Summe der Zielhöhen. Wenn die Potentialdifferenz  $\Delta C_{1,2}$  aus der Differenz zweier Potentialdifferenzen abgeleitet wird, ist also das Zusatzglied

$$\frac{1}{2}s_{1,2}(z_1 + z_2)H_a$$

von der jeweiligen Instrumentenhöhe abhängig. Zeger begeht hier den selben Fehler wie Helmert und Ledersteger. Ein Reduktionsglied der Potentialdifferenz kann nicht von der jeweiligen Instrumentenhöhe abhängig sein! Dies lässt sich auch einfacher zeigen:

Wie oben soll  $\bar{g}_1$  bzw.  $\bar{g}_2$  die Schwerkraft in den Höhen  $\frac{1}{2}z_1$  bzw.  $\frac{1}{2}z_2$  sein und  $V_{a1}$  und  $V_{a2}$  seien die äusseren Vertikalgradienten. Dann ist

$$\begin{aligned} z_1 \bar{g}_1 &= (g_1 - V_{a1} \frac{z_1}{2}) z_1 \\ &= g_1 z_1 - V_{a1} \frac{z_1^2}{2} \end{aligned} \quad (8,0)$$

$$\begin{aligned} z_2 \bar{g}_2 &= (g_2 - V_{a2} \frac{z_2}{2}) z_2 \\ &= g_2 z_2 - V_{a2} \frac{z_2^2}{2} \end{aligned}$$

Für  $V_{a1} = V_{a2} = V_a$  gilt

$$g_2 z_2 - g_1 z_1 - \frac{V_a}{2}(z_2^2 - z_1^2) \quad (9,0)$$

Beim Nivellement auf derselben Niveaufläche ist  $z_1 = z_2 = J$  ( $J$  = Instrumentenhöhe) und daher

$$J(g_2 - g_1) \neq 0 \quad (10)$$

Beim Nivellement vom Äquator zum Pol und einer Instrumentenhöhe von 1,5 m ist, wenn man die Instrumentenhöhe von 1500 mm durch die Schwere von ~ 1000 gal dividiert:

$$1,50(g_{\text{Pol}} - g_{\text{Äqu.}}) \approx 8 \text{ mm.}$$

Das ist die Konvergenz zweier Niveauflächen mit einem Höhenunterschied von 1,50 m vom Äquator bis zum Pol. Die dynamische Höhendifferenz auf ein und derselben Niveaufläche ist selbstverständlich Null! Dies zur Richtigstellung der Ableitungen von Helmert [2] und Ledersteger [3].

Wie in Abbildung 3 gezeigt, wird zur Berechnung der «Geopotentiellen Kote» der Wert

$$g_0 = \frac{1}{2}(g_i + g_k)$$

verwendet. In Abbildung 3 sind  $g_i$  und  $g_k$  die gemessenen Schwerewerte in  $P_i$  und  $P_k$ . Zur Bestimmung der Potentialdifferenz zwischen  $P_i$  und  $P_k$  wird der Schwerewert  $g_i'$  in  $P_i'$  verwendet. Dieser ergibt sich, wie man aus Abbildung 3 sieht, entweder aus

$$g_i' = g_i - \frac{1}{2}V_a \cdot dh$$

oder

$$g_i' = g_0 - \frac{1}{2}H_a \cdot ds$$

Dies erhält man auch aus Gleichung 5,0), wenn man entweder  $ds$  oder  $dh$  Null setzt. Wird  $g_i'$  mit  $dh$  multipliziert, so erhalten wir für die Potentialdifferenz

$$\begin{aligned} W_2 - W_1 &= \frac{1}{2}(g_1 + g_2)\Delta h_{21} \\ &- H_a \Delta h_{21} \cdot \frac{s}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

Wie man sieht, geht Gleichung 7,0) in Gleichung 11) über, wenn man den Vorblick  $z_2 = \text{Null}$  werden lässt, d.h. wenn man  $W_2 - W_1$  direkt bestimmt.

Der Horizontalgradient  $H_a$  lässt sich durch Schweremessungen bestimmen, damit kann die Hypothesenfreie Reduktion des geometrischen Nivellements durchgeführt werden.

## 4. Die Änderung der Kräftefunktion bei Änderung des augenblicklichen Bewegungszustandes

Wir bleiben wieder bei der Kugel und gehen von der Gleichung für die Kräftefunktion

$$U = \gamma \cdot R \quad (0,7)$$

aus. Bei Änderung der Kräftefunktion bei gleichzeitiger Änderung des Bewegungszustandes, also in mobilem Zustand, sind sowohl  $\gamma$  als auch  $R$  variabel, aber nicht voneinander unabhängig, denn nach Gleichung 0,9 ist

$$\gamma = \Delta\gamma \cdot R \quad (0,71)$$

daher ist

$$U = R^2 \Delta\gamma \quad (0,72)$$

und

$$\Delta U_{R,\text{Syst.}} = 2R \Delta R \Delta\gamma = -2\gamma h \quad (0,73)$$

(wobei die Fussnote «System» zeigen soll, dass die Gleichung für das bewegte System gilt).

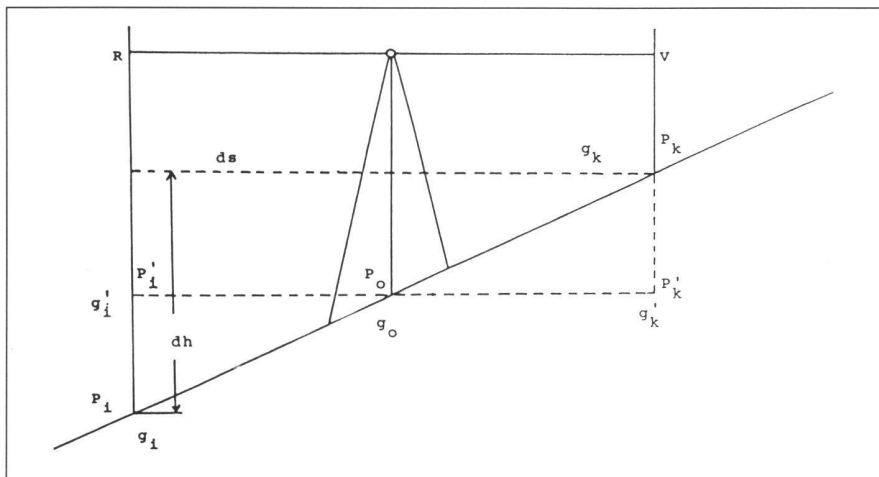


Abb. 3

Genauso wie das totale Differential für die Gleichung 0,7 in der Ruhe gilt, gilt für den freien Fall die Ausgangsgleichung 0,72, wobei die Differentiation nach R das allgemeine Fallgesetz und die Differentiation nach  $\Delta\gamma$  Null gibt, weil  $\Delta\gamma$  konstant ist.

$$\Delta U_{\gamma, \text{Syst.}} = 0 \quad 0,74$$

Beide Ableitungen der Kräftefunktion gelten für das beschleunigt-bewegte System. Gleichung 0,73 sagt aus, dass die Potentialdifferenz, die zu Beginn der Bewegung Null war, am Ende der Bewegung  $2\gamma h$  beträgt. Für das Bezugssystem ist die Potentialdifferenz gleich dem Mittelwert, also  $\gamma h$ . Zum gleichen Resultat kommt man über das bekannte Integral für die Arbeit. Für die Einheitsmasse gilt

$$A = \int_{v_1}^{v_2} v \, dv = \frac{v^2}{2} \quad 0,75$$

Dieses Integral besagt, dass die Arbeit das Geschwindigkeitsintegral über dem Impuls ist.

Aus Abbildung 4 sehen wir, dass der Impuls das geometrische Mittel aus dem Weg und der doppelten Beschleunigung ist. Das halbe Quadrat der Geschwindigkeit (Fläche O, A, B) ist die Arbeit oder die Leistung

$$\frac{v^2}{2}$$

Aus Gleichung 0,74 folgt, dass beim «Freien Fall» im bewegten System Schwerelosigkeit herrschen muss.

## 5. Über die Auswirkung der Schwerelosigkeit im bewegten System auf die Bewegungen in den fließenden Gewässern

Solange der freie Fall nicht gebremst wird, zeigt eine belastete Federwaage keinen Ausschlag, ein schwingendes Pendel hört auf zu schwingen, eine Kerzenflamme erlischt. Bei Raketenflügen treten für den Menschen infolge fehlender Gravitation physiologisch-physikalische Umweltbedingungen auf. Dies gilt besonders für die Erdumkreisung der Satelliten, welche nichts anderes als ein Fallen auf vorgeschriebener Bahn ist.

Auch die freie Bewegung auf der schiefen Ebene ist ein Fallen auf vorgeschriebener Bahn. Hier muss ebenfalls Schwerelosigkeit auftreten. Dies gilt für die gesamte Gebirgsdynamik, besonders für das Fließen des Wassers und für das Abgehen von Lawinen.

Bekanntlich geht die Lageenergie der aus dem Gebirge abfließenden Gewässer grösstenteils verloren. Die Abflussge-

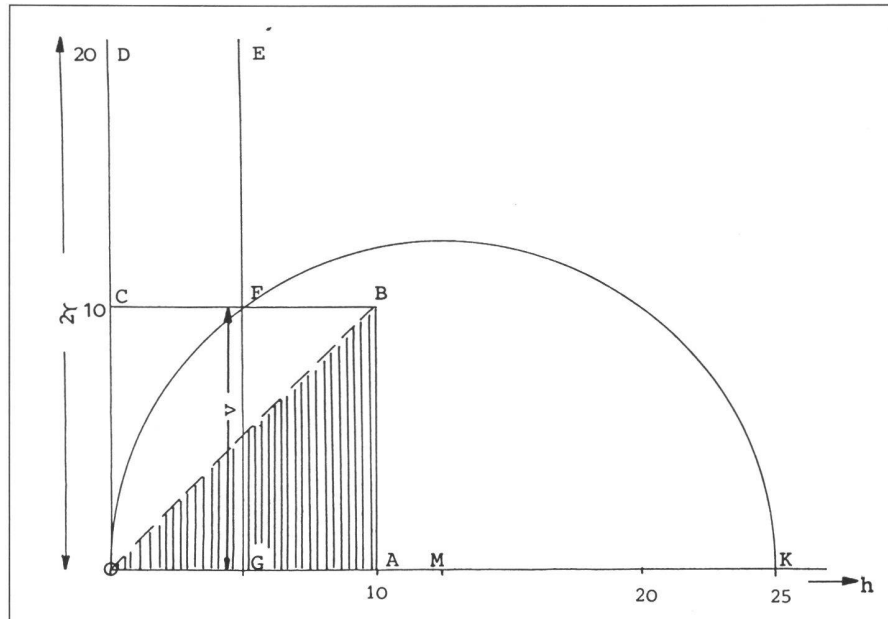


Abb. 4

windigkeit, selbst der reissendsten Gewässer, übersteigt den Wert von 5 bis 6 m/sec nicht. Die Energie des Wassers verbraucht sich beim Abfluss zur Überwindung der inneren Reibung und der Wandreibung. Die Summenwirkung dieser Reibungen wird als Bettwiderstand bezeichnet.

Bei rascher Spiegelsenkung, nämlich um die halbe Wassertiefe  $h = \frac{1}{2}t$ , erreicht die Wassergeschwindigkeit einen kritischen Wert. Es wird  $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{gt}$ , die auftretende Geschwindigkeit  $v$  ist die sogenannte Wellenschnelligkeit.

Man unterscheidet zwei Arten der Wasserbewegung, nämlich laminares und turbulentes Fließen. Ebenso gibt es zwei Arten des Abflusses, und zwar Strömen und Schiessen. Die laminare Bewegung mit ihrer geringen Geschwindigkeit hat stets den strömenden Abfluss zur Folge. Bei Überschreitung einer bestimmten kritischen Geschwindigkeit  $v_{gr} > \sqrt{g \cdot t}$  geht der strömende Abfluss jedoch in den schiessenden Abfluss über, wofür die FROUDE'sche Kennzahl

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gt}} \leq 1$$

massgebend ist. Einer Änderung der Bewegungsgrösse oder des Impulses "m·v" entspricht daher auch eine Änderung der FROUDE'schen Zahl.

Durch die innere Reibung oder den Impulsaustausch ([6], Seite 82) vollzieht sich eine Änderung der Bewegungsgrösse. Offenbar beeinflusst die Schwerelosigkeit im bewegten System beim freien Fall die innere Reibung und damit auch die Art des Wasserabflusses.

Es besteht nach dem Wissen des Verfas-

sers keine Literatur darüber. Es wäre daher angebracht, auf diesem Gebiet einen Forschungsschwerpunkt zu bilden.

### Literatur:

#### A. Allgemeine:

Bergmann-Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik Band I, Walter de Gruyter Verlag, Berlin 1970.

Handbuch der Astronautik: Akademische Verlagsgesellschaft Athenaion, Konstanz 1964.

#### B. Spezielle:

[1] W. Embacher: Die Bestimmung der orthometrischen Korrektur des geometrischen Nivellements aus Lotabweichungen und aus dem Störpotential T. ÖZfV 1980.

[2] F. Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie. 2. Auflage, Leipzig 1962.

[3] K. Ledersteger: Handbuch der Vermessungskunde, Band V, Stuttgart 1968.

[4] J. Zeger: Berechnung der geopotentiellen Kotendifferenzen Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen 1984.

[5] W. Embacher: Ein Versuch zur Bestimmung des gestörten Schwerevektors aus lokalen Gravimetermessungen. ZfV 1980.

[6] J. Kozeny: Hydraulik, ihre Grundlagen und praktische Anwendung. Springer-Verlag, Wien 1953.

Der Verfasser dankt Herrn o. Univ. Prof. Dipl. Ing. Dr. Werner Kresser für wichtige Hinweise zum Abschnitt 5.

#### Adresse des Verfassers:

Prof. Dipl.-Ing. Dr. Wilhelm Embacher  
Ramseiden 60  
A-5760 Saalfelden