

Zeitschrift: Geomatik Schweiz : Geoinformation und Landmanagement =
Géomatique Suisse : géoinformation et gestion du territoire =
Geomatica Svizzera : geoinformazione e gestione del territorio

Band: 104 (2006)

Heft: 8

Artikel: Historische Verfahren zur geographischen Ortsbestimmung

Autor: Minow, Helmut

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-236348>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 13.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Historische Verfahren zur geografischen Ortsbestimmung

Im Zusammenhang mit der Diskussion um die Entstehung der rätselhaften Portolan-karten [8], [9] entstand u. a. die Frage nach den geodätischen Grundlagen für die Herstellung eines hinreichend genauen Karteninhaltes. Um brauchbare Karten anzufertigen, war die möglichst exakte Bestimmung der Lage genügend vieler Orte auf der Erde erforderlich.

En liaison avec la discussion concernant la genèse des mystérieuses cartes Portolan [8], [9] il s'est posé entres autres la question des bases géodésiques nécessaires à la fabrication d'un contenu de cartes suffisamment précis. Afin d'établir des cartes utilisables, il était nécessaire de déterminer avec autant de précision que possible la situation de points suffisamment nombreux sur la Terre.

In relazione al dibattito sull'allestimento delle enigmatiche carte del portolano, è pure stata sollevata la questione delle basi geodetiche disponibili per la creazione di un contenuto cartografico sufficientemente preciso. Per allestire delle carte utilizzabili era necessario disporre della determinazione esatta della posizione di un numero sufficiente di luoghi della Terra.

H. Minow

Breite und Länge

Die Vorstellung von einer idealen Kugel-form der Erde gehörte zum längst gesicherten Wissenbestand der Gelehrten in der Antike und im Mittelalter. Sie geht auf den griechischen Mathematiker Eudoxos von Knidos (ca. 408–355 v. Chr.) zurück. Im geozentrischen Weltbild wurden die Koordinaten der Himmelskugel mit denen der Erdkugel in Beziehung gebracht; dabei spielten bei der astronomischen Bestimmung der geografischen Koordinaten eines Ortes die traditionsgebundenen Begriffe geografische Breite (φ) und geografische Länge (λ) eine besondere Rolle. Zur kartenmässigen Erfassung von geografischen Orten auf der Erdoberfläche in einem Gradnetz gab es verschiedene Verfahren. Die Bestimmung der geografischen Breite konnte sowohl in der Antike als auch im Mittelalter prinzipiell sehr gut bewältigt werden; manchmal wurde die Breite sogar überraschend gut gemessen; denn es war möglich, den Mittagsschatten des Gnomons (des Schattenstabes) bei der Tagundnachtgleiche mehr oder

weniger exakt zu messen und daraus die Breite des betreffenden Ortes abzuleiten. Auch konnte man die Breite aus der Tagelänge des längsten Tages berechnen. Weniger genau ermittelte man die geografische Breite φ aus dem Höhenwinkel des Polarsterns über dem Horizont. Ungleich viel schwieriger gestaltete sich die Ermittlung der geografischen Länge, d.h. die Bestimmung des Abstandes eines Ortes von einem durch Übereinkunft festgelegten Hauptmeridian. Da gab es meist nur rohe Schätzungen. Die geografische Länge konnte man entweder terrestrisch durch direkte Messung des Abstandes zwischen zwei Orten oder astronomisch auf Grund der Zeitdifferenz zwischen den beiden ermitteln. Es wurde erkannt, dass das Problem der Längenbestimmung auf eine Zeitbestimmung hinausläuft (1 Stunde Zeit entspricht 15 Längengraden, 1 Grad $\hat{=}$ 4 Zeitminuten).

Mess-Objekt Mond

In der Antike kam man auf den Gedanken, die Beobachtung von Mondfinsternissen auszuwerten. Die Zeitdifferenz ist in der Praxis der Unterschied zwischen den Mittaglinien, d.h. im Gradnetz zwi-

schen den Längengraden, die durch die zu messenden Punkte gehen. Der Zeitpunkt, da der Mond in den Erdschatten eintritt, ist für alle Beobachtungsorte derselbe, jedoch jeweils zu einer anderen (wahren) Ortszeit. Damit liess sich die Zeitdifferenz berechnen und für die Bestimmung der geografischen Länge auswerten.

Hiermit war grundsätzlich das Verfahren gefunden, mit dem sich einzelne Festpunkte zuverlässig berechnen liessen.

Der griechische Astronom Hipparch von Nikaia (ca. 190–125 v. Chr.) hatte es als Aufgabe der Astronomen angesehen, die Breite und die Länge auf der Erdkugel mathematisch-astronomisch zu bestimmen. Allerdings klagte er darüber, dass man ein solches Verfahren zu wenig anwenden könnte, da Mondfinsternis nicht eben häufig vorkommen und genaue Aufzeichnungen nur selten zur Verfügung ständen.

Als anwendbares Verfahren wurde im Mittelalter von Peter Apian die Methode der Mondabstände [4] vorgeschlagen [5]: Der Winkelabstand des Mondes von bestimmten Fixsternen auf der Ekliptik wurde mit Hilfe des Jakobsstabes gemessen (Abb. 5). Der Nürnberger Astronom Johannes Werner hatte bereits 1514 einen ähnlichen Vorschlag gemacht. Die Methode erfordert allerdings komplizierte Rechnungen; die angestrebte Genauigkeit sollte eine Winkelminute sein [14].

Zur Längenberechnung zog man noch andere Himmelserscheinungen, etwa Sternbedeckungen durch den Mond, in Betracht. Zudem wurden aus moderner Sicht einige Lösungsvorschläge gemacht, mit welchen Verfahren in der Antike und im Mittelalter mit den damals vorhandenen Möglichkeiten die geografische Länge ermittelt werden konnte [6], [10].

Eratosthenes: Gradnetz

Der alexandrinische Gelehrte Eratosthenes von Kyrene (ca. 276–194 v. Chr.) hatte eine «Geographia» verfasst, die leider nur in Fragmenten überliefert ist [13]. Danach hatte er versucht, die damals bekannte Welt, die Oikumene, in ihrer Län-

ge und Breite zu erfassen, in Zonen einzuteilen und ein brauchbares Koordinatennetz aus Meridianen und Parallelkreisen auf der Erdkugel einzuführen. Welche Daten von Eratosthenes zur eigentlichen geografischen Ortsbestimmung verwendet wurden, ist nicht bekannt, vielleicht waren es Distanzangaben aus früheren Wegebeschreibungen und aus Logbüchern (Itinerarien).

Ptolemaios: Itinerarien

Auch der grösste Kartograph der Antike, Klaudius Ptolemaios (ca. 100–170 n.Chr.) befasste sich in seinem grundlegenden geografischen Werk «Geographia» (acht «Bücher») ausführlich mit dem Problem der Distanzmessung und der Ortsbestimmung; dazu wurden Itinerarien aus den Berichten von Reisenden zu Lande und zur See verwendet. Die Strecken wären auf die Luftlinie zu reduzieren und dann mit dem auf der Erde gezogenen grössten Kreis in Beziehung zu setzen. Diese unzulängliche Methode kritisierte er jedoch und befürwortete eine viel genauere Methode, nämlich ein Verfahren mit astronomischen Messungen. Doch nur ein einziges astronomisches Ereignis hatte er zur Längenbestimmung genutzt, nämlich die totale Verfinsternung des Mondes im Jahre 331 v. Chr., die an den beiden Orten Arbela (in der Nähe des Tigris) und Kartago gleichzeitig beobachtet wurden [13]. Die geografische Breite (platos, latitude) rechnete Ptolemaios vom Äquator 0° bis zum Pol 90°, für die Länge (mēkos, longitude) verlegte er den Nullmeridian von ursprünglich Alexandria aus praktischen Gründen an den Westrand der ihm bekannten Welt (etwa bei den Kapverdischen bzw. Kanarischen Inseln, ca. 25° W Greenwich). Besonders bei der Analyse von Koordinaten-Tabellen und dergleichen sollte auf die unterschiedlichen Nullmeridiane geachtet werden [11].

Biruni: messen und berechnen

Schliesslich soll ein Beispiel aus dem «arabischen» Kulturkreis ausführlich vorge-

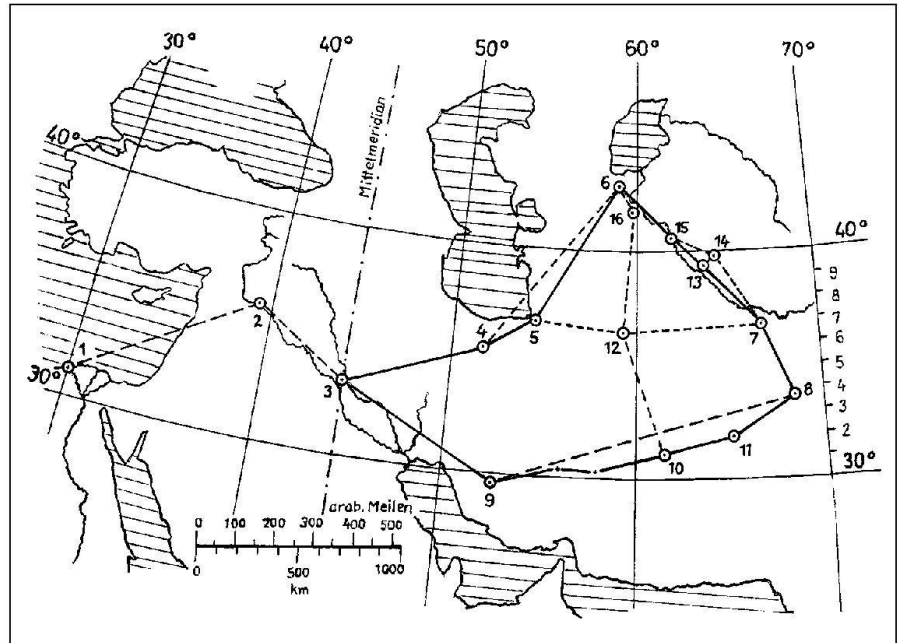


Abb. 1: Stationen des «geografischen Streckenzuges» nach al-Biruni. Ortsangaben siehe Tabelle 1.

stellt werden; darin wurde versucht, für die geografische Ortsbestimmung vor allem die Länge zu ermitteln. Der «arabische» Naturwissenschaftler al-Biruni (973–1048), der aus einer iranischen Familie in Choresmien (Mittelasien) stammte [7], hatte sich schon in jungen Jahren damit beschäftigt, verschiedenen Orte mit Hilfe astronomischer Beobachtungen geografisch zu bestimmen. Dabei wandte er bald die Prinzipien der sphärischen Trigonometrie an. Im Tahdid [2] macht er einen Vorschlag und sagt, dass «zwischen je zwei Orten diese vier Grössen miteinander in Beziehung stehen: ihre jeweilige geografische Breite, ihre Längendifferenz und ihre Entfernung (Abb. 2). Wenn drei davon bekannt sind, kann die vierte bestimmt werden. Es gibt drei Kombinationsmöglichkeiten: die erste besteht aus den beiden Breiten und der Längendifferenz, daraus ergibt sich die Entfernung; ...die zweite besteht aus den beiden Breiten und der Entfernung, daraus ergibt sich die Längendifferenz; die dritte besteht aus der Entfernung, der Längendifferenz und eine der beiden Breiten, die zweite Breite kann daraus bestimmt werden. Hauptsächlich die beiden letzten Möglichkeiten haben wir von An-

fang an in unseren Studien verfolgt» [2]. Hier im Tahdid [2] und auch im Canon [3] finden sich sehr ausführliche Beschreibungen seines Vorgehens. Die Messungen und Berechnungen hatte Biruni in den Jahren um 1020 durchgeführt. Bei der Bestimmung der geografischen Breite auf den einzelnen Stationen verliess sich Biruni ausser auf seine eigenen Messungen auch auf die Angaben aus früheren Schriften anderer Gelehrter; die entsprechenden Daten übernahm er jedoch nicht ungeprüft.

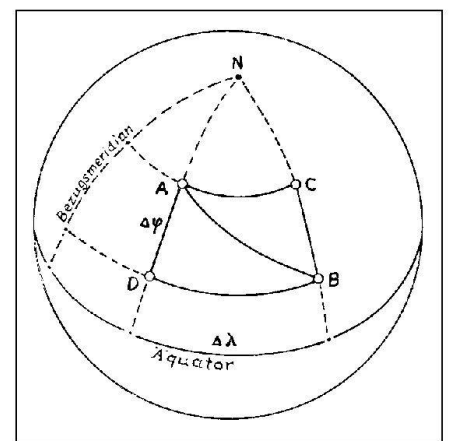


Abb. 2: Ermittlung der geografischen Länge auf der Erdkugel.

Station	Ort	φ nach Biruni [modern]	λ nach Biruni	λ Birunis Wert – 25° 35' [modern]	Bemerkung
1	Alexandria (Al-Iskandariyah)	30° 58' [31° 13']	51° 54' (51° 14' 45")	26° 19' [29° 55']	
2	Raqqa (ar-Raqqa) (Nikephorion)	36° 01' [35° 57']	63° 39' 17" (62° 15' 15")	38° 05' [39° 03']	
3	Baghdād	33° 25' [33° 20']	70° 00'	44° 25' [44° 25']	Mittelmeridian
4	Rayy (Ar-Rai) (Rhagae)	35° 34' 39" [35° 35']	78° 05' 20"	53° 30' [51° 25']	
5	Jurjān (Gorgān)	38° 08' 33" [38° 50']	80° 14' 01"	54° 39' [54° 29']	
6	Jurjāniya (Gorgania)	42° 17' [42° 48']	84° 06' 46" (84° 00' 54")	58° 31' [59° 25']	[modern: Chodzeji]
7	Baikh	36° 41' 36" [36° 30']	– 91° (90° 19' 48")	64° 45' [67° 00']	
8	Ghazna (Chazni)	33° 35' [33° 33']	94° 22' 24" (95° 02' 26")	68° 47' [68° 26']	(68° 44') → Canon
9	Shīrāz	29° 36' [29° 36']	78° 33' 32"	52° 53' [52° 32"]	
10	Zaranj (Sijistān)	30° 52' [31° 06']	88° 45' 08"	63° 10' [61° 53']	
11	Bust (Qal'a Bist)	32° 15' [31° 28']	91° 37' 30"	66° 03' [64° 21']	
12	Nīshāpūr (Neyshābūr)	36° 10' [36° 13']	84° 45' 57" (85° 57' 52")	59° 11' [58° 50']	
13	Āmūya	39° 12' [39° 09']	87° 45' 24"	62° 10' [63° 34']	
14	Bukhārā	39° 20' [39° 47']	87° 30' (87° 14' 47")	61° 55' [64° 25']	
15	Darghān (Darganata)	40° 30' 17" [40° 30']	86° 23' 56"	60° 49' [62° 10']	
16	Kāth (Khwārazm)	41° 35' 40" [41° 50']	– 85°	– 60° [60° 40']	

Tab. 1: Stationen des «geografischen Streckenzuges» nach al-Biruni. Berechnungsergebnisse und Vergleich.

Die Wegemasse entnahm Biruni den Berichten über Post- und Reiserouten, soweit er die Entfernungen auf seinen Reisen in Persien, Afghanistan und Indien nicht selbst ermitteln konnte. Auf jeden Fall sollte auf die natürliche Beschaffenheit der Gegend geachtet werden, in der die Wegeentfernung ermittelt wurde, auf mögliche Abweichungen von der Richtung, auf Bodenerhebungen, Hindernisse, Gewässer oder Wüstenstriche.

«Und dies sind Dinge (= Strecken), die verschiedene Masse (= Reduktions-Faktoren) haben, je nach ihrem einzelnen oder paarweisen Vorkommen. Durch sie wird das Mass des Abzugs verschieden bestimmt, das sich dabei nach dem Ermessen und Gutdünken des Beobachters richtet. Und

bei den Entfernungen gibt es einige, die den Abzug der Hälfte und noch mehr brauchen; und es gibt solche, die den Abzug eines Sechstels und noch weniger brauchen. Der Abzug des Sechstels wird allgemein gebilligt, wenn die Wege den geraden Linien ähnlich sind».

Die so «ermittelte» Entfernung AB (in Parasangen oder Meilen) wird zunächst in das Bogenmass \widehat{AB} (als Grosskreis auf der Erdkugel) umgeformt (Abb. 2). Hierbei wird (entsprechend der Gradmessung unter al-Ma'mún) mit $56\frac{2}{3}$ Meilen für einen Erdgrad gerechnet.

1 Parasange (farsakh) hat 3 arabische Meilen zu ca. 1960 m. $\Delta \varphi = \varphi_A - \varphi_B$. Mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie wird berechnet

$$\Delta\lambda = \arcsin \sqrt{\frac{(S^2 \widehat{AB} - S^2 \Delta\varphi) \cos \varphi_A}{\cos \varphi_B}} \times \frac{R}{\cos \varphi_A}$$

oder

$$\Delta\lambda = \arcsin \sqrt{\frac{S^2 \widehat{AB} - S^2 \Delta\varphi}{\cos \varphi_A \cdot \cos \varphi_B}} \times R,$$

wobei $R = 60$.

Biruni benutzte die umständlichere erste Rechenformel. Die Funktionswerte wurden einer vorberechneten Sehnen-tafel entnommen; es wurde aber auch die Sinusfunktion verwendet.

Der Zusammenhang zwischen Sehnenrechnung und der Verwendung des trigonometrischen Sinus ist leicht herzustellen (Abb. 3). Bezieht man nämlich die Saite (griech. chorde) oder Sehne S eines Winkels α , unter der die Strecke AB zu verstehen ist, auf den Kreisradius 1, dann ist $2 \sin \alpha = S$ (2α) oder $\sin \alpha = \frac{1}{2} S$ (2α). Der Bogen (arcus) wird in moderner Ausdrucksweise mit \arcsin oder auch z.B. als \widehat{AB} für $\arcsin AB$ bezeichnet.

Die Zahlen sind im Sexagesimalsystem angegeben; und damit wird auch gerechnet.

Beispiele:

$$11; 4, 56'' \text{ bedeutet } 11^\circ 04' 56''$$

$$2; 5, 29' = (2 \times 60^2) + (5 \times 60) + 29 = 7529'$$

$$\text{oder } = 2 + 0,0833 + 0,0081 = 2,0914 \quad | \times 60^2 = 7529$$

$$3; 59, 46 = 3 + 0,9833 + 0,0128 = 3,9961 \quad | : 60 = 0,0666$$

In Tabelle 1 sind die Endresultate der Berechnungen Birunis für die untersuchten 16 Stationen zusammengestellt. Die Werte für λ , die Biruni auf den Mittelmeridian von Baghdad = 70° bezog, sind auf den Nullmeridian von Greenwich umgerechnet, damit Birunis Ergebnisse sich leicht mit den modernen Koordinaten vergleichen lassen.

Um zu sehen, wie Biruni seine Rechnungen durchgeführt hatte, wird entsprechend dem ausführlichen Text im Tahdid [2] als Beispiel die Strecke Baghdad (= A) – Shiraz (= B) mit den Stationen 3 und 9 in sexagesimaler sowie in moderner Schreib- und Rechenweise vorgestellt.

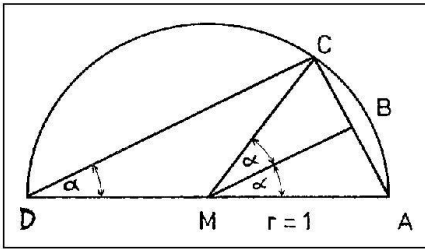


Abb. 3: Beziehungen zwischen Sehnenrechnung und Sinusrechnung.

Die betreffende Textstelle in der Übersetzung lautet:

«Über die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Baghdad (3) und Shiraz (9): Die Entfernung zwischen den beiden Orten beträgt 170 Parasangen, und da der Weg meist eben ist, reduzieren wir um $\frac{1}{10}$, d.h. wir multiplizieren mit 9 und dividieren das Ergebnis durch 10. Der Quotient ist 153 Parasangen, was 459 Meilen bzw. $8^{\circ}06'00''$ entspricht. – Die Sehne zu diesem Bogen ist 8; 28, 32. Das Quadrat dazu ist 71; 50, 6, 9, 4.

Die Breite von Shiraz ist $29^{\circ}36'$ (in Übereinstimmung mit dem, was Ibn al-Súfi fand). – Der Unterschied zwischen dieser Breite und der von Baghdad ($33^{\circ}25'$) ist $3^{\circ}49'$. Seine Sehne ist 3; 59, 46. Das Quadrat dazu ist 15; 58, 8, 3, 16. Die Differenz der beiden Quadrate ist 55; 51, 58, 5, 48.

Wir multiplizieren diese Differenz mit dem Cosinus der Breite von Baghdad und erhalten das Produkt 2797; 50, 17, 44, 44, 13, 36, das wir durch den Cosinus der Breite von Shiraz 52; 10, 10 dividieren. Wir bekommen den Quotienten 55; 51, 58, 5, 48, dessen Quadratwurzel 7; 28, 27 ist. Diese Wurzel multiplizieren wir mit dem Total-Sinus (60) und bekommen das Produkt 448; 27, 0. Dies dividieren wir durch den Cosinus der Breite von Baghdad und bekommen 8; 57, 16, eine Sehne, dessen Bogen $8^{\circ}33'32''$ ist. Dieser Bogen ist der Längenunterschied zwischen den beiden Orten, und der nähert sich $9^{\circ}0'$, einem Wert, der auch von den Astronomen benutzt wird. ($70^{\circ} + 8^{\circ}33'32'' = 78^{\circ}33'32''$ ist die Länge von Shiraz.)

Gegeben sind also die Strecke AB sowie die geografischen Breiten von A und von B.

$$\begin{aligned} \widehat{AB} &= 170 \text{ farsakhs} \times \frac{9}{10} \times 3 \\ &= 459 \text{ Meilen} / 56 \frac{2}{3} \text{ Meilen} / \text{Grad} \\ &\hat{=} 8^{\circ}06'00'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_A &= 33^{\circ}25' \\ \varphi_B &= 29^{\circ}36' \\ \Delta\varphi &= 3^{\circ}49' \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} \cos \varphi_A = 50; 4, 52 & 0,8347 \\ \cos \varphi_B = 52; 10, 10 & :60 \quad 0,8696 \\ S \Delta\varphi = 3; 59, 46 & 0,0666 \\ S \widehat{AB} = 8; 28, 32 & 0,1412 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \text{arc S} \sqrt{(8;28,32^2 - 3;59,46^2) \cdot \frac{50;4,52}{52;10,10}} \\ &\quad \times \frac{60}{50;4,52} \\ &= \text{arc S} \sqrt{55;51,58,5,48 \cdot \frac{50;4,52}{52;10,10}} \\ &\quad \times \frac{60}{50;4,52} \\ &= \text{arc S} \sqrt{\frac{2797;50,17,44,44,13,36}{\cos \varphi_B}} \\ &\quad \times \frac{60}{\cos \varphi_A} \end{aligned}$$

m letzten Rechenschritt vertauschte Biruni irrtümlich $\cos \varphi_A$ mit $\cos \varphi_B$. Er rechnete aber weiter:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \text{arc S } 8;57,16 = 8^{\circ}33'32'' \\ \lambda_A + \Delta\lambda &= 70^{\circ} + 8^{\circ}33'32'' = 78^{\circ}33'32'' = \lambda_B. \end{aligned}$$

Die Berechnungen der übrigen Strecken sind in Birunis Text nach dem gleichen Muster durchgeführt worden. In Tabelle 2 sind sämtliche Rechenschritte auch für die anderen Strecken übersichtlich zusammengefasst.

Biruni unterbricht gelegentlich den Gang seiner eigentlichen Berechnung zur Längenbestimmung von Ghazna (8), um noch für einige Nebenstationen, wie 13, 14, 15 und 16, die Entfernungen und Längenunterschiede zu ermitteln (vgl. Abb. 1).

Von den Stationen 5, 6, 7, 10 und 16 aus will er ausserdem mit sphärischen Dreiecken und Bogenlängen die geografischen Koordinaten der Station 12 (Nishapur) rechnerisch festlegen; er erhält dabei vier unterschiedliche, z.T. fehlerhafte, Endresultate. Die Zwischenrechnungen

Strecke	$\Delta\varphi$	Wegemaß in Farsakh (Parasangen)	Redukt.- und Umrechnungs-Faktor	arab. Meilen	Großkreis-Bogenmaß	$\Delta\lambda$	Bemerkung
1 – 2	$5^{\circ}03'$	–	–	628	$11^{\circ}04'56''$	$11^{\circ}45'15''$	
2 – 3	$2^{\circ}36'$	110	$\times 3$	330	$5^{\circ}49'34''$	$6^{\circ}20'43''$	
3 – 4	$2^{\circ}09'39''$	158	$\frac{5}{6} \times 3$	397	$7^{\circ}00'21''$	$8^{\circ}05'20''$	
4 – 5	$2^{\circ}33'54''$	70	$\frac{5}{6} \times 3$	175	$3^{\circ}05'18''$	$2^{\circ}08'41''$	
4 – 6	$6^{\circ}42'21''$	185	$\frac{5}{6} \times 3$	– 463	$8^{\circ}10'14''$	$6^{\circ}01'26''$	
6 – 7	$5^{\circ}35'24''$	150	$\frac{14}{15} \times 3$	420	$7^{\circ}24'42''$	$6^{\circ}18'54''$	} $7^{\circ}57'36''$ ($9^{\circ}37'16''$) → Canon
7 – 8	$3^{\circ}06'36''$	80	$\frac{4}{5} \times 3$	192	$3^{\circ}23'18''$	$1^{\circ}38'42''$	
3 – 9	$3^{\circ}49'$	170	$\frac{9}{10} \times 3$	459	$8^{\circ}06'00''$	$8^{\circ}33'32''$	vgl. Textbeispiel
9 – 10	$1^{\circ}16'00''$	$78 + 47 + 70$	$\frac{6}{7} \times 3$	504	$8^{\circ}53'39''$	$10^{\circ}11'36''$	
10 – 11	$1^{\circ}23'$	60	$\frac{5}{6} \times 3$	150	$2^{\circ}38'49''$	$2^{\circ}37'30''$	} $6^{\circ}02'26''$ ($5^{\circ}22'24''$) → 10 – 8
11 – 8	$1^{\circ}20'$	80	$\frac{5}{6} \times 3$	198	$3^{\circ}29'39''$	$3^{\circ}24'56''$	
9 – 8	$3^{\circ}59'$	$78 + 47 + 70 + 60 + 80 = 355$	$\frac{5}{6} \times 3$	– 852	$15^{\circ}27'$	$16^{\circ}14'02''$ ($15^{\circ}34'00''$)	} $16^{\circ}20'54''$ → Canon
10 – 8	$2^{\circ}43'$	120	$\frac{5}{6} \times 3$	300	$5^{\circ}17'39''$	$5^{\circ}22'24''$	
13 – 6	$4^{\circ}05'$	80	$\times 3$	240	$4^{\circ}14'07''$	$3^{\circ}44'30''$	
16 – 6	$0^{\circ}41'20''$	19	$\times 3$	57	$1^{\circ}00'21''$	$0^{\circ}59'06''$	
7 – 14	$2^{\circ}38'24''$	$65\frac{1}{4}$	$\times 3$	$195\frac{3}{4}$	$3^{\circ}27'11''$	$2^{\circ}49'48''$	

Tab. 2: Ergebnisse zu den einzelnen Strecken.

teilt er nicht mit. Diese lassen sich daher nicht nachvollziehen oder überprüfen. Nachdem Biruni sein Buch Tahdid [1] verfasst hatte, beschäftigte er sich noch einmal im Canon [3] mit dem gleichen Problem. Er will wieder die Differenz der geografischen Länge zwischen Ghazna (8) und Alexandria (1) ermitteln; er benutzt hauptsächlich die gleichen Ausgangswerte, jedoch in einem anderen Rechenverfahren. Er verwendet dabei den Satz von Ptolemaios:

Im allgemeinen Sehnenviereck (Abb. 4) ist $AB \times DC = DA \times BC + DB \times AC$
 In dem vorliegenden Sonderfall ist $AB = DC$ und $DA = BC$
 Durch die vier Punkte ACBD lässt sich eine Ebene legen. AB, DA und DB sind dann Sehnen (S) der Grosskreisbögen.
 Im Kreisviereck gilt der Satz von Ptolemaios.

Daraus wird abgeleitet:

$$\widehat{AB}^2 = \widehat{AD}^2 + \widehat{AC} \times \widehat{DB}$$

$$\widehat{AB}^2 - \widehat{AD}^2 = \widehat{AC} \times \widehat{DB}$$

$$\frac{\widehat{AB}^2 - \widehat{AD}^2}{\widehat{AC}^2} = \frac{\widehat{DB}}{\widehat{AC}}$$

$$\frac{\widehat{DB}}{\widehat{AC}} = \frac{\cos \varphi_B}{\cos \varphi_A} = \frac{\sin BN}{\sin AN}$$

wobei $BN = 90^\circ$, $\varphi_B = 0^\circ$
 und $DB = \Delta\lambda'$ gesetzt wird,

$$\Delta\lambda = \frac{\widehat{AC}}{\sin AN}$$

Zu diesem Verfahren sei nun ein Beispiel aus dem Canon [3] wiedergegeben. Es sind wieder die Stationen 3 und 9 mit der Strecke Baghdad (= A) – Shiraz (= B). Gegeben sind die gleichen Ausgangswerte für φ_A und φ_B .

Dann weiter

$$\widehat{AB} = 170 \text{ farsaKhs red.} = 153 \text{ Parasangen} \hat{=} 8^\circ 06' 00''$$

$$\begin{array}{l} S \widehat{AB} = 8; 29, 32 \quad \cos \varphi_A = 50; 3, 2 \\ S \widehat{AD} = 3; 59, 46 \quad \cos \varphi_B = 52; 10, 17 \end{array} \quad \left| :60 \right. \begin{array}{l} 0,8342 \\ 0,8695 \end{array}$$

Damit erhält man $S \widehat{AC} = 7; 28, 27$ und über $S \Delta\lambda = 8; 17, 16$ trotz einiger Fehler in der Sehnentafel schliesslich für $\Delta\lambda$

$= 8^\circ 33' 32''$, in Übereinstimmung mit dem Ergebnis im Tahdid [2]. Die textliche Darstellung der Gesamtaufgabe ist im Canon [3] weniger ausführlich als die im Tahdid beschriebene. Es gibt wieder zwei Streckenzüge: Im nördlichen ist diesmal die Zwischenstation Balkh (7) weggelassen; im südlichen wird $\Delta\lambda$ zwischen Shiraz (9) und Ghazna (8) ohne die Stationen Zaranj (10) und Bust (11) errechnet. Auch die Berechnungen über Nishapur (12) und andere Nebenstationen werden nicht erwähnt.

Ein Vergleich mit den Resultaten im Tahdid [2] lässt erkennen, dass die Darstellung im Canon auf keiner unabhängigen Bestimmung beruht. Biruni hat die Ergebnisse im Wesentlichen aus [1] (Tahdid) übernommen; nur an zwei Stellen, wo die Stationen weggelassen sind, hat er neu berechnet. Die Addition der Längendifferenzen und die geografische Länge von Baghdad ergibt die Länge von Ghazna.

	Nordstrecke	
3	70°00'00"	
Strecke		
3–4	8°05'20"	
4–6	6°01'26"	
6–8	9°37'16"	
8	93°44'02"	
	Südstrecke	
3	70°00'00"	Baghdad
Strecke		
3–9	8°33'32"	vgl. Textbeispiel
9–8	16°20'54"	
8	94°54'26"	Ghazna

Biruni bildet hier im Canon [3] das arithmetische Mittel aus den beiden Werten und erhält $\lambda = 94^\circ 22' 24''$ für Ghazna. Im Tahdid bevorzugte Biruni das bereits bekannte Ergebnis $\lambda = 94^\circ 22' 24''$ (vgl. Tab. 3).

Zum Vergleich: Mittelwert aus dem Canon: $94^\circ 19' - 25^\circ 35' = 68^\circ 44'$. Moderner Wert: $\lambda = 68^\circ 26'$ östl. v. Gr.

Um einen Bezug zur traditionellen Station 1 (Alexandria) herzustellen, hatte Biruni noch die Verbindung von Baghdad

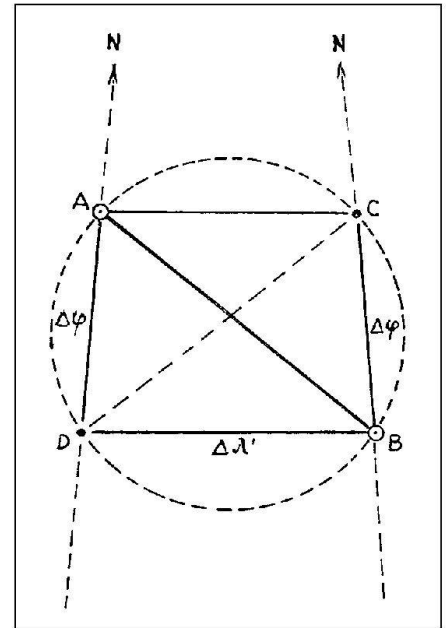


Abb. 4: Ermittlung der geografischen Länge im Sehnenviereck.

(3) über Raqqa (2) berechnet. Weil er dabei fremde, ungeprüfte Daten verwenden musste, ist ihm diese Berechnung leider misslungen. Der gesamte «geografische Streckenzug» entsprechend dem Text im Tahdid ist in Tabelle 3 zusammengefasst. (Es sei bemerkt, dass dieser Text etwa fünf Jahre vor [3] (Canon) verfasst worden ist.) Aus geodätischer und mathematischer Sicht sind die verschiedenen Rechenverfahren, die Biruni – so wie auch Ptolemaios – auf einer idealen Kugeloberfläche durchführte, im Prinzip richtig. Interessant ist die Aufstellung von zwei Teil-«Streckenzügen». Diese Anordnung mag vielleicht als Messungs- und Rechenkontrolle gedacht gewesen sein. Allerdings hat Biruni «Verbesserungen» nach Belieben eingefügt und Endresultate ohne weitere Begründung festgelegt. Überhaupt liegt die Schwäche des ganzen Verfahrens bei der willkürlichen und teilweise abenteuerlichen Entfernungsschätzung.

Um geografische Koordinaten zu ermitteln, hat Biruni verschiedene mathematische Formeln bzw. Rechenmethoden angewandt und dabei alle Kombinationsmöglichkeiten durchgerechnet. Ein Beweggrund war vielleicht die reine Lust am Rechnen selbst.

