

**Zeitschrift:** Geomatik Schweiz : Geoinformation und Landmanagement =  
Géomatique Suisse : géoinformation et gestion du territoire =  
Geomatica Svizzera : geoinformazione e gestione del territorio

**Herausgeber:** geosuisse : Schweizerischer Verband für Geomatik und  
Landmanagement

**Band:** 109 (2011)

**Heft:** 6: 150 Jahre Schweizerische Geodätische Kommission

**Artikel:** Interpolationen und Kurvenbestimmung

**Autor:** Sievers, Beat

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-236800>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 25.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Interpolationen und Kurvenbestimmung

In den vergangenen Jahren legten die Lehrbereiche «geodätische Statistik und Ausgleichsrechnung» und «Mathematik» des Instituts Vermessung und Geoinformation FHNW (IVGI) ein Schwergewicht auf die Anwendung neuerer Methoden der Statistik und Interpolation auf geodätische Daten. Im Einzelnen wurden Verfahren der nichtparametrischen Regression (Kollokation und Filterung), der Interpolation, der Kurvenbestimmung und der Zeitreihenanalyse untersucht und zu diesem Zweck in Softwarepaketen implementiert. Erkenntnisse zu Interpolationen und ein Algorithmus zur Kurvenbestimmung werden dargestellt.

*Dans les dernières années, les domaines d'enseignement «statistiques géodésique et techniques de compensation» et «mathématiques» de l'institut de topographie et de géoinformation FHNW (IVGI) ont jeté un poids lourd largement utilisé dans l'étude des applications des méthodes nouvelles de la statistique et de l'interpolation, comme la régression nonparamétrique (collocation et filtrage), la détermination des courbes et l'analyse des séries chronologiques. Nous présentons des connaissances concernant l'application des méthodes de l'interpolation et un algorithme pour la détermination des courbes.*

Negli scorsi anni le discipline d'insegnamento della «statistica geodetica e del calcolo di compensazione» e della «matematica» nonché dell'Istituto di misurazione e geoinformazione FHNW (IVGI) hanno posto l'accento sull'applicazione di nuove metodologie di statistica e d'interpolazione su dati geodetici. In particolare si sono analizzati i processi della regressione non parametrica (collocazione filtraggio), dell'interpolazione, della determinazione delle curve e dell'analisi e delle serie cronologiche, fatto che ha portato all'implementazione di pacchetti di software. Si sono pure rappresentati i risultati sull'interpolazione e un algoritmo per la determinazione della curva.

B. Sievers

## Interpolationen

In der Praxis stellt sich meist die Frage, welches die Toleranzwerte für Residuen oder Restklaffungen bei Transformationen oder Interpolationen sind. [1] gibt die Antwort: entweder verwendet man Vorgabewerte aus Toleranztabellen (z.B. TVAV oder [2]), oder man ermittelt die Ausreisser mit statistischen Methoden aus den Daten (Histogramme, Boxplots, Quantil-Quantil-Plots, siehe [1]). Dazu ist zu bemerken, dass bereits die Residuen in E- oder N-Richtung vielfach auf Ausreisser hindeuten. Wenn radiale Restklaffungen «fs» interpretiert werden, ist neben dem Betrag auch die Richtung des (zweidimensionalen) Klaffungsvektors zu be-

achten. Vor Interpolationen ist eine visuelle Analyse und Beurteilung des Klaffungsbildes aus der Vortransformation zwingend!

Verschiedenen Arbeiten (Bachelor Theses, Projektarbeiten) haben am IVGI in den vergangenen Jahren mit realen und synthetischen Daten folgende *Fragen* untersucht:

- wie viele Stützpunkte sind erforderlich?
- wie sollen sie verteilt sein?
- wie viele Kontrollpunkte, wo sollen sie angeordnet werden?
- welcher Algorithmus ergibt unter Berücksichtigung der folgenden Randbedingungen die besten Resultate:
  - regelmässiges, unregelmässiges Stützpunktfeld
  - Umgang mit sehr lokalen Spannungen / Inhomogenitäten

- Umgang mit Stützpunkthaufen, welche zu Übergewichten führen können
- Behandlung von Randgebieten (z.B. Gemeindegrenzen), welche keine Koordinatenänderungen erfahren sollten.

Als vorläufige Erkenntnisse ergeben sich: Die *Toleranzen* sind gut bemessen, die dreifache Sicherheitsmarge ist erheblich. Die Überbestimmung (Freiheitsgrad 2) bei der statistischen Betrachtungsweise ist klein und führt zu ebenfalls erheblichen Toleranzintervallen.

Die *Anzahl der erforderlichen Stützpunkte* hängt von der Homogenität des bearbeiteten Spannungsgebietes ab und lässt sich nicht verbindlich quantifizieren. Generell gilt: je homogener das Interpolationsgebiet, desto weniger Stützpunkte sind erforderlich. Die endgültige Anzahl ist iterativ zu ermitteln.

Die *Verteilung der Stützpunkte* soll das Gebiet repräsentieren und auch umfassen (keine Extrapolationen!).

Die Zahl der *Kontrollpunkte* sollte 30% bis 50% der Stützpunkte betragen und ihre Umgebung ebenfalls repräsentieren.

*Interpolationsalgorithmus*: die drei untersuchten Methoden «Interpolation nach gewogenem Mittel (TRANSINT)», «multi-quadratische Analyse (MQI)» und «Natural Neighbour Interpolation (NNI)» sind in den Resultaten vergleichbar, ergeben aber jede in Teilen ihrer Anwendungsgebiete beste, in anderen realitätsfremde Resultate [1], [5]. Die Methode «Kombination begrenzter Deformationen» (CDL) [3] schneidet generell schlechter ab als MQI oder NNI, bedingt eine homogene Stützpunktverteilung und wird zur lokalen Entzerrung nicht empfohlen [4].

Aus Versuchen [5] mit verschiedenen Stützpunktfeldern ist zu erkennen:

*Regelmässiges Stützpunktfeld*: Je näher ein zu interpolierender Neupunkt bei einem Stützpunkt liegt, desto mehr weichen die Residuenvektoren der verschiedenen Interpolationsalgorithmen voneinander ab. «Sanfte» Übergänge ergeben sich im Vektorbild mit MQI bzw. TRANSINT (letztere unter Verwendung einer vernünftig angesetzten Maschenweite  $d_0$ ).

**Unregelmässiges Stützpunktfeld:** hier werden die Algorithmen MQI oder TRANSINT empfohlen.

**Sehr lokale Spannungen / Inhomogenitäten** sind vom übrigen Gebiet isoliert zu untersuchen und zu interpolieren. Ist dies nicht erwünscht, wird eine Kollokation mit Helmert-Transformation empfohlen [6].

**Stützpunkthaufen** beeinflussen die Neupunkte bei allen Interpolationsalgorithmen etwa gleich unerwünscht. Sie sollten besser durch einen einzigen repräsentativen Punkt aus der Stützpunktmenge ersetzt werden.

**Randgebiete:** Werden in eine Grenze am Rande des Gebietes nur wenige fiktive Stützpunkte mit Restklaffung Null eingefügt, nehmen die interpolierten Neupunktesiduen gegen den Rand hin nicht fließend zu Null ab. Die Anzahl der fiktiven Randpunkte ist deshalb zu verdichten: der Abstand zwischen Stützpunkten auf dem Rand soll kleiner sein als der Abstand der Randstützpunkte zu einem Stützpunkt im Gebiet. Dann liefern TRANSINT und MQI brauchbare Ergebnisse, NNI versagt wegen der Bedingung «keine Extrapolation».

B. Fischer

## Kurvenbestimmung

Aus den Positionsmessungen einzelner Punkte einer mehrfach (Abb. 1, ● und ○) abgefahrenen Kurve ist diese als parametrisierte Kurve  $(x(t), y(t))$  zu schätzen. Da-

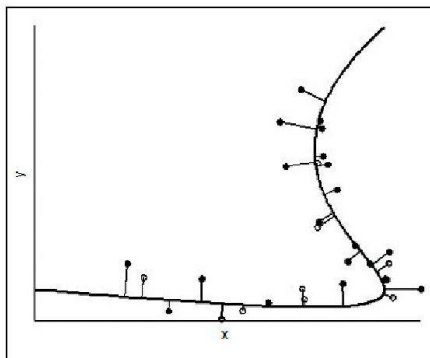


Abb. 1.

bei stehen als Daten nur die Punktekordinaten  $(x_i, y_i)$  zur Verfügung, nicht aber deren Parameterwerte  $t_i$  (i.a.  $\neq$  Zeit). Im Folgenden skizzieren wir die Idee des in [7] beschriebenen Algorithmus, welcher diese Schätzung liefert.

1. **Startschritt:** In die auf dem Bildschirm dargestellten Messpunkte setzt man interaktiv ein Polygon  $k_0$  als ungefähre abgefahrenere Weg und erste Schätzung der Kurve (Abb. 2). Hier unterscheidet sich unser Vorgehen von [7].

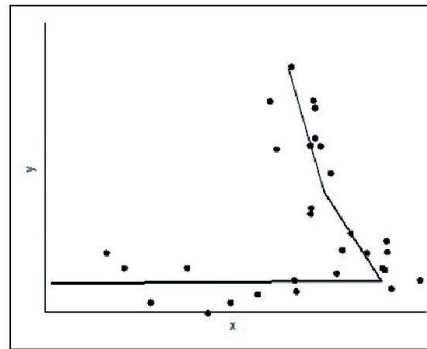


Abb. 2.

Ein **Iterationsschritt** besteht aus den Teilen 2A und 2B. Bei unseren Beispielen trat nach 5 bis 15 Iterationen Konvergenz ein. 2A. **Projektionsschritt:** Zu jedem Datenpunkt  $P_i$  wird der nächstgelegene Punkt  $Q_i$  auf der Näherungskurve  $k_j$  bestimmt (Abb. 3). Zu den  $Q_i$  wird anschliessend die Bogenlänge  $t_i$  entlang dem Polygonzug berechnet, und die Punkte nach steigenden  $t_i$  sortiert.

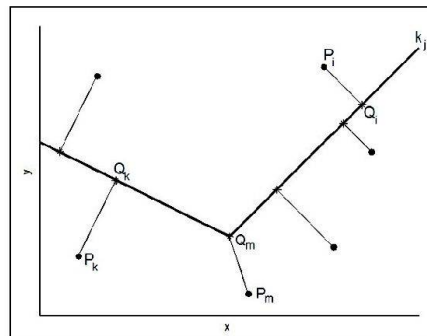


Abb. 3.

2B. **Glättung der Komponentenfunktionen:** Die beiden Komponenten  $x_i$  und  $y_i$  der Daten werden je einzeln geglättet

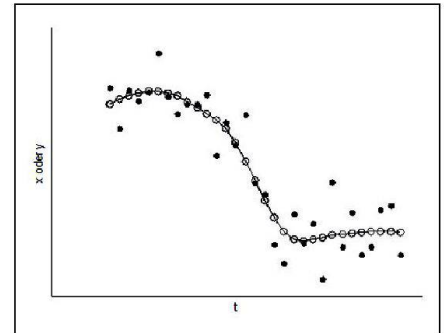


Abb. 4.

(Abb. 4). Zu jedem Datenpunkt  $\bullet(t_i, y_i)$  wird mit dem in [8] beschriebenen Glättungsverfahren eine Schätzung  $o(t_i, \hat{y}_i)$  berechnet, ebenso für  $(t_i, x_i)$ . Die Glättungswerte sind Punkte der neuen Schätzung  $k_{j+1}$  der Kurve, und damit die Ecken eines neuen Polygonzuges. Es folgt die nächste Iteration, bis die Änderungen der geschätzten  $(x_i, y_i)$  unter eine Schranke fallen.

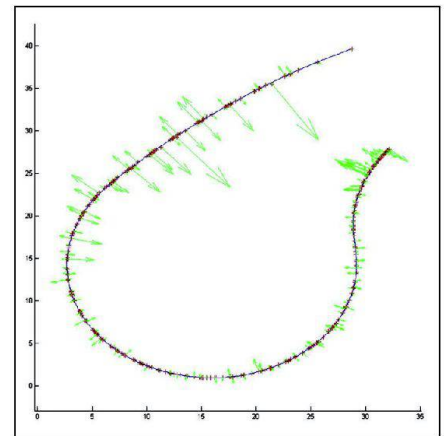


Abb. 5.

Abb. 5 zeigt ein Beispiel der Auswertung einer mehrfach GNSS-gemessenen Kurve ([9]). Die Achsen sind in [m] angeschrieben, der längste Verbesserungsvektor misst 18 cm.

**Literatur:**

- [1] Furrer, M., Sievers, B. (2009): «Qualitätsindikatoren für den Bezugsrahmenwechsel LV03-LV95». In: *Geomatik Schweiz* 107: 20–24.
- [2] Eidgenössische Vermessungsdirektion (2007): «Überführung der amtlichen Vermessung in den Bezugsrahmen der Landesvermessung 1995 (LV95) – Konzept.»

- 
- [3] Durussel, R. (1974): «Contribution à l'étude des méthodes de transformation géométrique» In: *VPK/MPG* 72: 259–262.
- [4] Rüdiger, L. (2010): «Interpolation von Geodaten nach CDL». Bachelor Thesis Muttenz. Fachhochschule Nordwestschweiz.
- [5] Walch, M. (2011): «Praxisanwendung von Interpolationen». Master Vertiefungsprojekt Muttenz. Fachhochschule Nordwestschweiz.
- [6] Fischer, B. and Brühlmann, P. (2006): On the Application of Nonparametric Regression Methods to Geodetic Data. XXIII FIG Congress TS 63, Munich. [http://www.fig.net/pub/fig2006/papers/ts63/ts63\\_05\\_fischer\\_bruhlmann\\_0460.pdf](http://www.fig.net/pub/fig2006/papers/ts63/ts63_05_fischer_bruhlmann_0460.pdf).
- [7] Hastie, T. and Stuetzle, W. (1989): «Principal Curves», *J. Am. Stat. Ass.* 84(406), p.502–516.
- [8] Cleveland, W.S.: «Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots», *J. Am. Stat. Ass.*, Dec. 1979, 74(368), p.829–836.
- [9] Fischer, H.J. und Grütter, C. (2005): «Nicht-parametrische Regression». Diplomarbeit Muttenz. Fachhochschule Nordwestschweiz.

Beat Sievers, Beat Fischer  
Fachhochschule Nordwestschweiz  
FHNW, Hochschule für Architektur, Bau  
und Geomatik, Institut Vermessung und  
Geoinformation  
Gründenstrasse 40  
CH-4132 Muttenz  
[beat.sievers@fhnw.ch](mailto:beat.sievers@fhnw.ch)  
[beat.fischer@fhnw.ch](mailto:beat.fischer@fhnw.ch)