

Zeitschrift: Horizonte : Schweizer Forschungsmagazin
Herausgeber: Schweizerischer Nationalfonds zur Förderung der Wissenschaftlichen
Forschung
Band: - (2000)
Heft: 45

Artikel: Mathe am Strand
Autor: Fischer, Stephane
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-967662>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 05.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

MATHEMATIK

Mathe am Strand

Feuchter Sand, der unter den Schritten trocknet. Ein Krug voll Reis, der an der Messerklinge hängen bleibt: So etwas passiert, wenn man eine zufällige Anhäufung von Sphären durcheinander bringt. Dieses in der Natur häufig zu beobachtende Phänomen interessiert Mathematiker.

Wer hat das noch nie bemerkt? Wenn man seinen Fuss auf feuchten Sand setzt, stellt man fest, dass der Sand um den Fussabdruck herum nicht feuchter wird, sondern im Gegenteil trocknet. Sandkörner, die zu Abermilliarden am Strand angehäuft sind, ordnen sich spontan so an, dass sie so dicht wie möglich beieinander liegen. Der geringste Druck, wie beispielsweise der eines Fusses, stört diese Anordnung und verursacht eine Lockerung der Sandkornschicht. Die Folge: Das Wasser, das sich an der Oberfläche befindet, verschwindet in der Tiefe, und zwar in den Zwischenräumen, die durch die Lockerung zwischen den Sandkörnern entstehen.

Andere Feststellungen bestätigen diese zumeist unerwartete Tatsache. Wenn man mehrmals mit einem Zahnstocher in einen vollständig mit Salz gefüllten Salzstreuer sticht, stört man die natürliche Anordnung der Salzkörner, die sich dadurch voneinander entfernen. Jedes Salzkorn beansprucht dann mehr Platz für sich. Aufgrund des begrenzten Raumes im Salzstreuer muss der zusätzliche Platz an anderer Stelle eingespart werden. Die Körner verformen sich, indem sie stärker gegeneinander und auch gegen den Zahnstocher drücken. Das Ergebnis: Schon nach kurzer Zeit lässt sich der Zahn-

stocher nicht mehr aus dem Salzstreuer herausziehen. In Indien führen die Fakire einen ähnlichen Trick vor, wenn sie mit einem Messer mehrmals hintereinander in einen vollständig mit Reis gefüllten Krug stechen. Nach dem zwölften Mal bleibt der Krug am Messer hängen.

Angst vor der Leere

«Alle Sphären, Körnchen oder Sphärenteilchen, die zufällig aufeinander geschichtet werden, verhalten sich genauso wie Sand, Salz oder Reis, wenn man ihre Anordnung stört», erklärt François Sigrist, Professor für Mathematik an der Universität Neuenburg und Autor mehrerer populärwissenschaftlicher Artikel über die Anordnung von Sphären. In zufälligen Aufschichtungen ordnen sich die Sphären bzw. die Körner spontan so dicht wie möglich beieinander an, d.h., sie nehmen so viel Platz wie möglich ein. Oder anders ausgedrückt, sie lassen so wenig Zwischenraum wie möglich untereinander. Eine geringfügige Störung verursacht immer eine Lockerung und damit eine Verringerung der Dichte.

Beobachtungen haben gezeigt, dass sich die maximal erreichbare Dichte, unabhängig von der Art der zufälligen Aufstapelung, immer in einer Größenordnung von etwa 63% bewegt, und zwar unabhängig von der

Mathematisch erklärbar:
trockene Spuren im nassen Sand.



Orangenpyramiden verfügen über eine höhere Dichte als zufällig aufeinander liegende Sandkörner im Sandhaufen.

Grösse der aufgeschichteten Sphären. Ein Kilo Kaffeebohnen nimmt praktisch den gleichen Raum ein wie ein Kilo gemahlener Kaffee, wie jeder ganz einfach selbst feststellen kann, wenn er seinen Kaffee im Supermarkt mahlen lässt. Egal ob man die Packung bis an den Rand mit gemahlenem Kaffee oder mit Kaffeebohnen auffüllt, man kann niemals mehr als 63% der Packung füllen.

Universelle Dichte

Eine weitere Erfahrung am Strand bestätigt dies: Man füllt eine Umkleidekabine mit Strandbällen, die man bunt durcheinander hineinwirft. Wenn sie fertig aufgeschichtet sind, belegen die Bälle wiederum nur 63%, also ungefähr zwei Drittel, des Gesamtvolumens der Kabine. «Alle Erkenntnisse in Bezug auf die zufällige Aufschichtung von Sphären sprechen für die Existenz einer universellen Dichte, die anhand eines mathematischen Modells beschrieben werden kann. Aber derzeit ist die Mathematik noch nicht in der Lage, ein solches Modell zu entwickeln», gibt François Sigrist zu.

Dem Laien mag dieser Grenzwert für die Dichte von 63% unbedeutend erscheinen. Aber er ist dennoch bemerkenswert. Eine einzelne Sphäre, die man in einem Würfel platziert – beispielsweise ein Schokoladenei in einer Schachtel – füllt nur 52% des

Gesamtvolumens, d.h. nur etwas mehr als die Hälfte. Es existiert allerdings ein Modell, um eine höhere Dichte zu erreichen, also die Befüllung zu verbessern, und zwar, indem Körner verschiedener Grösse gemischt werden. Auf diese Weise kann man immer noch etwas Pulverkaffee in eine Packung mit Bohnenkaffee einfüllen.

«Diese Tatsache ist den Herstellern von Raketen oder Munition gut bekannt. Durch die Mischung von Pulvern unterschiedlicher Korngrösse gelingt es ihnen, eine Granate oder ein Geschoss besser aufzufüllen. Aber auch für diese Fälle gibt es bis heute noch kein mathematisches Modell, mit dem die Proportionen und die Grössen für eine ideale Mischung vorhergesagt werden könnten. Jeder Hersteller muss also eigene Versuche anstellen, um die beste Mischung zur Befüllung herauszufinden. Diese Messungen sind geheim und nicht allgemein zugänglich. Aber es ist ziemlich sicher, dass sie alle zu demselben Ergebnis kommen», erläutert François Sigrist.

Es gibt jedoch natürliche Aufschichtungen von Sphären, die über eine höhere Dichte verfügen als ein Sandhaufen. So bestehen die meisten Metalle (Gold, Silber, Aluminium, Kupfer) aus einer Atomkristallstruktur mit einer Dichte von 74%. In diesen Metallen sind die einzelnen Atome (Sphären) in einem

flächenzentrierten Gitternetz angeordnet. Dabei handelt es sich um eine wohl geordnete Aufschichtung von Sphären, ähnlich den Kanonenkugelnstapeln, die man an manchen Militärdenkmalen findet, oder den Orangenpyramiden (mit quadratischer Grundfläche) im Supermarkt. Die horizontalen Ebenen stellen ein quadratisches und die Seitenflächen ein sechseckiges Netz in der Form von Bienenwaben dar. Würde man diese Pyramide auf eine Seitenfläche stellen, käme man zu einer überraschenden Einsicht: «Obwohl man intuitiv etwas anderes erwartet, macht es keinen Unterschied, ob man die Kugeln in einer Schachtel in quadratischen oder sechseckigen Schichten aufeinander stapelt», so François Sigrist.

Neuerliche Bestätigung

Der berühmte Mathematiker Carl Friedrich Gauss bewies schon 1831, dass das flächenzentrierte Gitternetz das Kristallgitter ist, das die höchste Dichte aufweist. Aber erst 1998 konnte Thomas Hales, ein amerikanischer Mathematiker, nachweisen, dass es sich dabei um einen absoluten Rekord im Bereich der Aufschichtungen handelt. «Man hat nun die Gewissheit, dass es unmöglich ist, Teilchen noch dichter aufzuschichten als im Kristallgitter von Metallen», lautet die Schlussfolgerung von François Sigrist. ■