Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 2 (1929)
Heft: III

Artikel: Die Zerstreuung von Röntgenstrahlen an Gasen I
Autor: Herzog, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-109446

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Zerstreuung von Röntgenstrahlen an Gasen I

von **G. Herzog.**

(22. V. 29.)

Zusammenfassung: Es wird eine neue Methode zur Messung der Winkelabhängigkeit der Röntgenstreustrahlung an Gasen angegeben und ihre Brauchbarkeit nachgewiesen. Die Messungen der Streufunktion für Argon ergeben einen monotonen Abfall mit wachsendem Streuwinkel.

§ 1. *Einleitung.*

Röntgenstrahlen werden beim Durchgang durch Materie in ihrer Intensität geschwächt; man spricht von einer Absorption der Strahlen. Die Intensitätsabnahme auf dem Wegelement ds kann angesetzt werden in der Form:

$$dI = -\mu I \, ds \,, \tag{1}$$

wo I die Intensität bedeutet. Die Konstante μ wird als Absorptionskoëffizient bezeichnet; sie gibt die Grösse der Intensitätsabnahme für die Längeneinheit des Weges an. Durch Integration erhält man aus Gl. (1):

$$I_s = I_0 e^{-\mu s}. \tag{2}$$

I_0 bezeichnet die ungeschwächte Intensität für $s = 0$.

Die Ursache der Energieabsorption[1]) ist eine mehrfache. Zunächst kann Energie der Röntgenstrahlung durch Auslösung von Elektronen (Photoeffekt) verbraucht werden. Eine zweite Möglichkeit des Energieverlustes ist die Anregung der Fluoreszenzstrahlung. Man versteht darunter das Auftreten von Sekundärstrahlung deren Wellenlänge unabhängig von der Frequenz der erregenden Strahlung ist. Sie wird nur durch die Art der absorbierenden Atome bestimmt. (Charakteristische Strahlung.) Die dritte Erscheinung ist die Streuung. Die Primärenergie wird wieder als Röntgenlicht nach allen Richtungen gestreut. Dabei bleibt die Frequenz der einstrahlenden Energie erhalten. Es handelt sich also wesentlich um eine Richtungsänderung

[1]) Eine ausführliche Übersicht siehe bei J. A. Stratton, Helv. Phys. Acta, I, 1928, 47.

der Primärstrahlung. Schliesslich hat man von dieser Streustrahlung die nach ihrem Entdecker genannte Compton-Strahlung zu unterscheiden. Ihre Wellenlänge ist im Vergleich zur einstrahlenden etwas vergrössert, wobei der Grössenunterschied vom Winkel zwischen Primärstrahl und der Beobachtungsrichtung abhängt.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der eigentlichen Streustrahlung, der sog. kohärenten Strahlung. Im voraus muss betont werden, dass es dabei nicht möglich ist, die Compton- oder inkohärente Strahlung ausser Acht zu lassen, da sich die beiden Strahlungen oft nur in ihrer Summenwirkung beobachten lassen.

Die Bedeutung der Untersuchung des Streuvorgangs liegt darin, dass man durch ihn Aufschluss über die Anordnung der Elektronen im Atom und über die Abstände der Atome im Molekül erhalten kann; dies sollen die folgenden Erörterungen zeigen.

Das Problem der Streuung von Röntgenstrahlen an einem einzelnen schwach gebundenen Elektron wurde von J. J. Thomson[1]) behandelt. Ein Elektron von der Masse m und der Ladung e befinde sich in einem elektromagnetischen Felde, dessen Intensität I_0 sei. Durch die elektrische Kraft E erfährt das Elektron eine Beschleunigung und wird dadurch selbst der Ausgangspunkt neuer Strahlung, deren Intensität vom Winkel ϑ zwischen primärer und Streustrahlrichtung abhängt. Bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit und r den Abstand des Punktes vom Elektron, wo die Streuintensität I_s gemessen wird, so ergibt sich für diese

$$I_s = I_0 \frac{e^4}{2\, r^2\, m^2\, c^4} (1 + \cos^2 \vartheta) \,. \tag{3}$$

Der Faktor $(1 + \cos^2 \vartheta)$ tritt auf, weil die primäre Strahlung unpolarisiert angenommen wurde. Man nennt ihn daher auch „Polarisationsfaktor".

Für n *unabhängig voneinander* streuende Elektronen wird die Intensität der Streustrahlung $n$mal so gross:

$$I_s = n \frac{I_0\, e^4}{2\, r^2\, m^2\, c^4} (1 + \cos^2 \vartheta) \,. \tag{4}$$

Durch Integration von I_s über alle Richtungen erhält man die von den n Elektronen im ganzen gestreute Energie W_s. Das Verhältnis von W_s zur einfallenden Primärenergie I nennt man

[1]) J. J. Thomson, Conduction through Gases, p. 325.

den „Streukoëffizienten“ σ. Sind n unabhängig streuende Elektronen im cm³, so wird

$$\sigma = \frac{W_s}{I} = n \frac{8 \pi e^4}{3 m^2 c^4} . \tag{5}$$

Der Ausdruck für den Streukoëffizienten enthält die Grösse der Wellenlänge der Primärstrahlung nicht. Gl. (5) sagt also aus, dass der Streukoëffizient unabhängig von der Wellenlänge ist. Diese Anschauung deckte sich völlig mit den alten Messungen von Barkla[1]), der experimentell für leichte Elemente die Beziehung aufstellte (ϱ bedeutet die Dichte der Streusubstanz):

$$\frac{\sigma}{\varrho} = 0{,}2 . \tag{6}$$

Aus dieser Beziehung konnte Barkla unter Zuhilfenahme von Gl. (5) die Anzahl Elektronen pro Atom bestimmen. Er fand bei leichten Elementen für die Elektronenzahl die richtige Grösse, was Gl. (5) zu bestätigen schien. Bei schweren Elementen ist $\frac{\sigma}{\varrho}$ jedoch wesentlich grösser als 0,2, ein Zeichen dafür, dass die klassische Theorie wohl nur einen Grenzfall darstellt.

Diese Abweichungen vom Werte der Thomson'schen Formel lassen sich erklären, wenn man die Annahme fallen lässt, dass die Elektronen unabhängig streuen. Am deutlichsten kann man dies zeigen, wenn man die Z streuenden Elektronen des Atoms auf so kleinen Raum zusammengebracht denkt, dass sie als ein einziges „grosses“ Elektron mit Z-facher elektrischer Elementarladung und Z-facher Elektronen-Masse betrachtet werden können. Man erhält in diesem Falle aus Gl. (3)

$$I_s' = I_e Z^2. \tag{7}$$

Für Z unabhängig streuende Elektronen ergab sich:

$$I_s = I_e Z , \tag{8}$$

wo

$$I_e = \frac{I_0 e^4}{2 r^2 m^2 c^4} (1 + \cos^2 \vartheta)$$

bedeutet.

Die beiden Ausdrücke Gl. (7) und (8) unterscheiden sich um einen Faktor Z. Keiner dieser beiden Fälle wird in Wirklichkeit genau realisiert sein. Je nach Anordnung der Elektronen

---

[1]) Barkla, Phil. Mag. 648, 1911, 22.

im Atom und je nach der verwendeten Wellenlänge haben die Streuwellen, die sich unter dem Winkel ϑ gegen die Einfallsrichtung fortpflanzen, verschiedene charakteristische Phasendifferenzen gegeneinander. Daher finden wir für jede Elektronenanordnung einen typischen Intensitätsverlauf der Streustrahlung. Die Variabeln treten in der Verbindung $\frac{a \sin \vartheta}{\lambda}$ auf, wo a die als konstant angenommenen Elektronenabstände bezeichnet. Die Abweichungen vom THOMSON'schen Gesetz werden somit als Interferenzen aufgefasst und müssen Schlüsse über die Elektronenanordnung im Atom zulassen.

Die in Gl. (7) und (8) betrachteten Grenzfälle werden erhalten, wenn einmal die Wellenlänge sehr gross gegenüber den Elektronenabständen, das andere Mal sehr klein gegen a gewählt wird. Im ersten Falle sind die *Amplituden* der Einzelwellen zu addieren, im zweiten Falle die *Intensitäten*.

KOHLRAUSCH und HEWLETT zeigten bei Absorptionsmessungen von γ-Strahlen ($\lambda \sim 0{,}02$ Å.-E.) an Kohlenstoff, dass der Wert von $\frac{\sigma}{\varrho}$ hier viel kleiner als der BARKLA'sche Wert wurde. Diese Unterschreitungen des THOMSON'schen σ-Wertes lassen sich selbstverständlich nicht durch Interferenzen von Sekundärwellen erklären, die von punktförmigen Elektronen ausgesandt werden. Es ist — grob gesprochen — eine weitere räumliche Auflösung des Elektrons nötig, um diesen Effekt zu erklären. Der erste Versuch in dieser Hinsicht stammt von COMPTON,[1]) der die Ladung des Elektrons ad hoc auf einen Ring von etwa 10^{-10} cm Durchmesser verteilte. Eine noch weitere Auflösung gibt die Wellenmechanik, wo die negative Elektrizität im Atom räumlich kontinuierlich ausgebreitet ist. Es kommen dann zwischen den Streuwellen die von den einzelnen Teilen des Elektrons ausgehen neuerdings Interferenzen zustande, die die Intensität weitgehend herunterdrücken können.

Der Intensitätsverlauf kann experimentell nach zwei Richtungen untersucht werden. Zunächst kann festgestellt werden, ob sich bei der Streuung von Röntgenstrahlen eine Wellenlängenabhängigkeit finden lässt. Sie sollte ja nach Gl. (5) nicht auftreten. Man kann zweitens die Winkelabhängigkeit der Streuintensität beobachten. Die Intensitätsverteilung sollte nach Gl. (3) durch den Polarisationsfaktor $(1 + \cos^2 \vartheta)$ darstellbar sein. Auch in der Winkelverteilung müssten sich Interferenzeffekte zeigen.

---

[1]) A. H. COMPTON, Phys. Rev. **14**, 1919, 20 und 247.

Interferenzerscheinungen sind weiter beim Zusammenwirken der Streuung einzelner Atome eines mehratomigen Moleküls vorauszusehen. Auch diese Erscheinung muss sich bei der Beobachtung der Winkel- oder Wellenlängenabhängigkeit der Streuintensität erfassen lassen.

Schliesslich ist nach DEBYE[1]) bei dichten Gasen ein sogen. „äusserer" Interferenzeffekt zu erwarten, der seine Ursache in der undurchdringlichen Wirkungssphäre der einzelnen Moleküle hat.

Die weitaus grösste Anwendung dieser Überlegungen zur Erforschung des Atombaus wurde bisher bei der Untersuchung von festen Körpern in kristalliner Form gemacht.

Lässt man nach dem Vorschlag von BRAGG Röntgenlicht einer Wellenlänge auf einen *Kristall* fallen, so wird das Licht bei geeigneter Richtung zwischen auffallendem Strahl und den Netzebenen des Kristalls reflektiert. Die Bedingung der Reflexion sagt aus, dass die Gangunterschiede der Streuwege zwischen den Atomen verschiedener Netzebenen ganzzahlige Vielfache n der auffallenden Wellenlänge λ sein müssen. Das Bragg'sche Gesetz lautet:

$$n\lambda = 2a \sin \vartheta \tag{9}$$

(a = Netzebenenabstand, ϑ = Reflexionswinkel, n = Ordnung der Reflexion.)

Über die Intensität der Reflexion sagt diese Gleichung nichts aus. Dieselbe hängt zunächst von der Anordnung ab, in welcher der Reflexionsversuch gemacht wird. Auf die verschiedenen möglichen Anordnungen soll hier nicht eingetreten werden. Eine ausführliche Darstellung findet man im Buche von COMPTON.[2]) Das Wesentliche kann man am Beispiel der Anordnung ersehen, die in der Bragg'schen Schule verwendet wird: durch ein geeignetes Blendensystem fällt die monochromatisierte Strahlung auf den Kristall. Die Intensität der reflektierten Strahlung wird mit einer Ionisationskammer gemessen. Der Kristall selbst wird während der Bestimmung langsam um die Reflexionslage gedreht. Man erhält so die sogen. integrale Reflexion ϱ („integrated reflection"):

$$\varrho = \frac{1}{2\mu} \frac{1+\cos^2\vartheta}{2} \left(\frac{N e^2}{m c^2} F\right)^2 \frac{\lambda^3}{\sin\vartheta} e^{-2M}. \tag{10}$$

Darin bedeuten: μ den „effektiven" Absorptionskoëffizienten, N die Anzahl der streuenden Atome in der Volumeneinheit, e

[1]) P. DEBYE, Phys. Zsch. **28**, 1927, 135.
[2]) A. H. COMPTON, X-Rays and Electrons.

und m die Konstanten für das Elektron, c die Lichtgeschwindigkeit, F den sogen. Strukturfaktor und e^{-2M} den Temperaturfaktor. Auf die Diskussion der einzelnen Grössen soll nunmehr eingegangen werden.

In dem Faktor $(1 + \cos^2 \vartheta)$ erkennt man den früher eingeführten Polarisationsfaktor. ϑ bedeutet den Winkel zwischen Primär- und reflektiertem Strahl (Streuwinkel).

Bei der Herleitung von Gl. (10) wird die äusserst wesentliche Annahme gemacht, dass der reflektierende Kristall ein „Mosaikkristall" sein soll. Bei genauer Untersuchung eines Kristalls (besonders durch die Röntgenforschung) erkennt man, dass er im allgemeinen nicht den regelmässigen Aufbau zeigt, der mit dem Worte Kristallgitter verbunden ist. In dem Kristall treten Verwerfungen auf, so dass er aus einzelnen Mikrokristallen aufgebaut erscheint, die erst die vollständige Regelmässigkeit des Gitterbaues zeigen. Wie Darwin[1]) und Ewald[2]) auf verschiedenen Wegen zeigten, ist die reflektierte Intensität am „idealen" Kristall eine andere als am Mosaikkristall. Beim idealen Kristall zeigen alle kleinsten Teile gleichzeitig die richtige Reflexionsstellung zum einfallenden Strahl. Dieser wird beim Eindringen stärker geschwächt, als dem normalen Absorptionskoëffizienten entspricht, weil dem einfallenden Strahl Energie durch die Reflexion an den oberen Kristallschichten entzogen wird. Beim Mosaikkristall tritt die gleiche Erscheinung an den kleinen Teilkristallen auf. Dieser Effekt der sogen. ersten Extinktion (primary extinction) kann jedoch klein gemacht werden, wenn die Teilkristalle klein genug sind. Man erreicht das bei den „Pulvermethoden", wo möglichst feines Kristallpulver zur Reflexion verwendet wird. Bei Untersuchungen verwendet man Kristalle, die möglichst nahe an die eine der beiden Idealformen herankommen. Die Benützung des Mosaikkristalls bringt eine weitere Erscheinung mit sich: die zweite Extinktion (secondary extinction). Sie besteht in dem Abschirmen der unteren Elementarkristalle durch obere, die in der richtigen Reflexionsstellung stehen. Da die verwendeten Blenden stets einen Strahl von endlichem Öffnungswinkel freigeben und ausserdem die Primärstrahlung eine geringe Linienbreite zeigt, gibt es eine gewisse Unempfindlichkeit in der Lage der Einzelkristalle, innerhalb welcher diese noch auf die Reflexion ansprechen. So ist es zu erklären, dass die reflektierte Intensität beim Mosaikkristall vielmals grösser als beim Idealkristall ist,

---

[1]) C. G. Darwin, Phil. Mag. **27**, 315 und 675, 1914.
[2]) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. **54**, 519, 1918.

da im ersten Falle auch noch „schief" gestellte Kriställchen reflektieren.

Bragg, James und Bosanquet[1]) zeigten, wie die zweite Extinktion bestimmt werden kann, während die erste Extinktion nicht direkt messbar ist. Brentano[2]) hat sie durch Verwendung von äusserst feinem NaCl-Pulver zu vermindern versucht. Der in Gl. (10) eingeführte „effektive" Absorptionskoëffizient soll die normale Absorption sowie auch die erste und zweite Extinktion in sich schliessen.

Die Grösse e^{-2M} rührt von der Wärmebewegung der Atome her. Die Wärmebewegung bewirkt eine Verminderung der reflektierten Intensitäten, da mit steigender Temperatur die Abstände der Elektronen von den Atommittellagen zunehmen. Theoretisch wurde das Problem des Einflusses der Wärmebewegung auf die gemessene Intensität von Debye[3]) und von Waller[4]) erfasst; aber erst durch die neuen Versuche von James und Firth[5]) und James und Brindley[6]) ist es ermöglicht worden, die Temperaturkorrektur experimentell richtig festzulegen. Diese Verfasser haben die Streuintensitäten am Steinsalz und Sylvin von der Temperatur der flüssigen Luft bis 900 Grad absolut gemessen. Bei tiefen Temperaturen gibt die Formel nach Waller gute Übereinstimmung mit dem Experiment, während sie bei höheren Temperaturen von etwa 600° absolut an zu kleine Intensitätsverminderungen erwarten lässt.

Aus diesen Erklärungen ersieht man Schwierigkeiten mit denen zu kämpfen ist, wenn man über die Intensitätsverhältnisse an Kristallen Messungen durchführt; denn für den Idealkristall würde die gestreute Intensität dem Strukturfaktor direkt proportional, während beim Mosaikkristall das Quadrat von F eingeht.

In Gleichung (10) können alle Grössen ausser F im Experiment direkt gemessen und also der Strukturfaktor damit berechnet werden. Solche Versuche wurden bisher in grosser Zahl ausgeführt. Dabei verwendete man als Kristall vorzüglich NaCl, das dem Mosaiktypus nahe kommt. Man wird versuchen, aus den gemessenen F-Werten die Elektronenverteilung zu bestimmen. Dazu können zwei Wege eingeschlagen werden. Der eine, bisher mehr verwendete, wurde von W. H. Bragg[7])

[1]) W. L. Bragg, James und Bosanquet, Phil. Mag. **41**, 309, 1921.
[2]) J. Brentano, Phil. Mag. **4**, 620, 1928.
[3]) P. Debye, Ann. d. Phys. **43**, 49, 1914.
[4]) L. Waller, Z. f. Phys. **17**, 398, 1923.
[5]) R. W. James und E. M. Firth, Proc. Roy. Soc. **117**, 62, 1927.
[6]) R. W. James und G. W. Brindley, Proc. Roy. Soc. **121**, 155, 1928.
[7]) W. H. Bragg, Phil. Trans. Roy. Soc. **215**, 253, 1915.

angegeben, von DUANE[1]) ausgearbeitet und von HAVIGHURST[2]) verwendet. Es ist dies die Methode der Fourier-Zerlegung. Sie beruht auf folgenden Überlegungen: Da die Atome gegenüber der einfallenden Strahlung von endlicher Grösse sind, hat man zu berücksichtigen, dass nicht alle Elektronen eines Atoms in einer Netzebene liegen. Es bedeute $p(z)$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Elektron im Abstande zwischen z und $z + dz$ von der Netzebene befindet und a den Abstand zweier Netzebenen. Enthält das Atom im ganzen Z Elektronen, so ist die gesamte Streuamplitude, die einem Atom entspricht:

$$F = Z \int_{-a}^{+a} p(z) \cos\left(\frac{4\pi z}{\lambda} \sin\frac{\vartheta}{2}\right) dz \,. \tag{11}$$

Das Integral

$$\int_{-a}^{+a} p(z)\, dz$$

hat den Wert 1, da es die Sicherheit ausdrückt, dass ein Elektron zwischen den beiden Netzebenen liegt, die die betrachtete Atomschicht einschliessen. Für kleine Winkel $\vartheta/2$, also streifend einfallende Primärstrahlung, geht damit F in den Wert Z über. Schreibt man für die Elektronenverteilung $p(z)$ im Abstande z von der Netzebene eine Fourier-Reihe an, so lässt sich zeigen, dass die Koëffizienten dieser Reihe durch die Strukturfaktoren F_n darstellbar sind. Dabei bedeutet F_n den Strukturfaktor, der aus Gl. (10) bei der Reflexion n-ter Ordnung an denjenigen Netzebenen auftritt, von denen aus z gemessen wird. Bei der genauen Analyse nach dieser Zerlegungsmethode ist es nötig, auch die F-Werte für *hohe* Ordnungen zu messen. Das scheitert gewöhnlich an der geringen Intensität dieser Reflexionen, so dass man auf eine Extrapolation angewiesen ist. Bei einer anderen Anwendung dieser Methode nach COMPTON[3]) tritt dieser Mangel noch gewichtiger in Erscheinung. Es wird hier die radiale Verteilung der Elektronen um den Atomkern bestimmt. Dabei treten in der Fourier-Reihe die Werte F_n mit der Ordnungszahl n multipliziert auf. Bei der Unsicherheit der Strukturwerte für hohe Ordnungen werden die Fehler noch mit den grossen n-Werten multipliziert.

---

[1]) W. DUANE, Proc. Nat. Acad. **11**, 489, 1925.
[2]) R. J. HAVIGHURST, Proc. Nat. Acad. **11**, 502, 1925.
[3]) A. H. COMPTON, X-Rays and Electrons, S. 163.

Eine weitere Schwierigkeit ist die Beschränktheit der Zahl der möglichen Ordnungen wegen der Bedingung $\sin \vartheta \leqq 1$. Diese Anzahl wächst zwar bei Verwendung kleiner Primärwellenlänge, dafür treten dann andere Schwierigkeiten auf (Compton-Prozess).

Diese Zerlegungsmethoden geben kontinuierliche Elektrizitätsverteilungen um den Atomkern.

Die zweite Möglichkeit für die Auswertung der F-Kurven besteht darin, dass man geeignete Atommodelle so anzunehmen sucht, dass die daraus gerechneten F-Werte mit den gemessenen möglichst gut übereinstimmen. Hier kann auch von unstetigen Ladungsverteilungen, also eigentlichen zentralisierten Elektrizitätsmengen, ausgegangen werden.[1])

Aus all den erwähnten Einflüssen: Ideal- oder Mosaikkristall, erste und zweite Extinktion, Temperaturbewegung, Beschränktheit der möglichen Reflexe und geringe Intensität bei hohen Ordnungen ersieht man, dass die Verwendung von Kristallen zur Erforschung der Atomstruktur grosse Schwierigkeiten bringt.[2])

Die Diagramme, welche bei der Zerstreuung von Röntgenstrahlen an *Flüssigkeiten* entstehen, sind bisher nicht einwandfrei erklärt. Es scheint, dass die Moleküle in Flüssigkeiten nicht völlig willkürlich angeordnet sind, sondern eine gewisse Schwarmbildung anstreben[3]). Drucker[4]) gibt eine Zusammenstellung der bisherigen Messergebnisse.

Günstiger liegen die Verhältnisse, wenn man sich die Aufgabe stellt, die Zerstreuung von Röntgenstrahlen an *Gasen* zu untersuchen. Darauf machte erstmalig Ehrenfest[5]) aufmerksam.

Ausführlichere Rechnungen findet man bei Debye. In einer ersten Abhandlung[6]) berechnet er die Zerstreuung von Röntgenstrahlen durch regellos im Raum liegende Atome. Über die Anordnung der Elektronen im Atom wird die Annahme getroffen, dass diese auf einem Ring verteilt sind. In dem Ausdruck für

---

[1]) P. Debye, Ann. d. Phys. **46**, 809, 1915; P. Debye und P. Scherrer, Phys. Zsch. **19**, 482, 1918; G. A. Schott, Proc. Roy. Soc. **96**, 695, 1920; Glocker und Kaupp, Ann. d. Phys. **64**, 541, 1921.

[2]) Weitere Literatur darüber: H. Ott, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. VII/2; P. P. Ewald, Handbuch der Physik, Bd. XXIV; M. W. L. Bragg, Vortrag am 5. Solvay-Kongress, 1927; J. Waller und R. W. James, Proc. Roy. Soc **117**, 214, 1927; R. W. James, J. Waller und D. R. Hartree, Proc. Roy. Soc. **118**, 334, 1928; G. W. Brindley und R. G. Wood, Phil. Mag. **43**, 616, 1929.

[3]) Katz, Zsch. f. Phys. **45**, 97, 1927.

[4]) Drucker, Phys. Zsch. **29**, 273, 1928.

[5]) P. Ehrenfest, Proc. Akad. Amsterdam **17**, 1184, 1915.

[6]) P. Debye, Ann. Phys. **46**, 809, 1915.

die Streuintensität tritt das Verhältnis vom Elektronenringradius a zur auffallenden Wellenlänge λ auf. Für die beiden Extreme

$$\lambda \gg a \quad \text{und} \quad \lambda \ll a$$

ergeben sich die früher erwähnten Grenzfälle Gl. (7) u. (8). Für zwischenliegende Grössen zeigt das Verhältnis von gestreuter zu primärer Intensität als Funktion des Streuwinkels Maxima. In der zweiten Arbeit[1]) untersucht er den Einfluss der äusseren oder intermolekularen Interferenzen für mehratomige Gase. Darnach treten Maxima und Minima in der Intensitätskurve auf, aus deren Lage auf die Atomabstände im einzelnen Molekül geschlossen werden kann.

Über bisher ausgeführte *Messungen der Streuung* von Röntgenstrahlen ist zu berichten, dass Untersuchungen an Gasen von Crowther bei festem Streuwinkel und von Mark u. Schocken, Barett, sowie Scherrer und Stäger bei fester Wellenlänge und veränderlichem Streuwinkel gemacht wurden. Darüber soll später im Zusammenhang mit den eigenen Messungen berichtet werden.

Bei der Auswertung der F-Kurven, die an Gasen oder Kristallen erhalten werden, hat man auch die Compton-Strahlung zu berücksichtigen. Die Theorie des Compton-Prozesses wurde von Compton[2]) und Debye[3]) aufgestellt. Darnach besteht der Compton-Prozess darin, dass durch die einfallende Energie ein Elektron aus dem Atom gelöst wird und als „Rückstosselektron" frei wird. Die Energie, die zur Überwindung der Bindung und zur Erteilung der Geschwindigkeit an das Elektron nötig ist, wird dem einfallenden Lichtquant entzogen und daher die Energie des gestreuten Quants um diesen Betrag kleiner. Über das Intensitätsverhältnis zwischen verschobener und unverschobener Linie sagen diese Theorien nichts aus. Wie aus Versuchen[4]) und späteren theoretischen Erörterungen[5]) hervorgeht, kann man über diese Intensitätsverteilung folgendes sagen: Unabhängig

---

[1]) P. Debye, Phys. Zsch. **28**, 135, 1927.

[2]) A. H. Compton, Phys. Rev. **21**, 483, 1923.

[3]) P. Debye, Phys. Zsch. **24**, 161, 1923.

[4]) Y. H. Woo, Phys. Rev. **27**, 119, 1926.

[5]) O. Klein, Zsch. f. Phys. **41**, 407, 1927; G. E. M. Jauncey, Phys. Rev. **29**, 757, 1927; G. E. M. Jauncey und W. D. Claus, Phys. Rev. **31**, 717, 1928; W. Gordon, Zsch. f. Phys. **40**, 117, 1927; G. Wentzel, Zsch. f. Phys. **40**, 574, 1927 und **43**, 1 u. 779, 1927; J. Waller, Nature **120**, 155, 1927, Zsch. f. Phys. **51**, 513, 1928, Phil. Mag. **4**, 1228, 1928.

von der einfallenden Wellenlänge wird für sehr kleine Streuwinkel ϑ die kohärente Linie vorherrschend sein. Geht man mit dem einfallenden Licht von kleinen zu grösseren Frequenzen, so ist zunächst die unverschobene Linie vorhanden. In dem Masse, wie die Energie $h\nu$ des einfallenden Quants die Bindungsenergie übersteigt, wächst der Anteil der verschobenen Linie, bis schliesslich für sehr kleine Wellenlängen die ganze Streustrahlung aus der verschobenen Frequenz besteht. Wie WALLER und WENTZEL (loc. cit.) aus der Behandlung des Problems nach der Wellenmechanik zeigen, bleibt für die Summe aus kohärenter und inkohärenter Strahlung das klassische Gesetz von THOMSON bestehen, mit einer Einschränkung für die kurzwelligen γ-Strahlen. Aus diesen Überlegungen wird auch verständlich, dass für die leichten Elemente die Compton-Strahlung stärker auftritt als für die schwereren.

Um nun aus den an Gasen gemessenen F-Kurven Schlüsse auf die Elektronenverteilung ziehen zu können, wird man vorteilhaft von angenommenen Atommodellen ausgehend die zugehörigen F-Kurven theoretisch bestimmen. Ein Vergleich mit den Werten des Experimentes gibt dann Aufschluss über die Richtigkeit des angenommenen Modells. Auf Grund der Wellenmechanik wurden von verschiedenen Seiten[1]) Methoden zur Verteilung der Elektronendichte im Atom gegeben. Aus dieser Dichteverteilung wird dann nach der klassischen Formel die F-Verteilung bestimmt.[2])

Das Ziel der vorliegenden Untersuchungen ist das Vorhandensein von Interferenzen bei Streuung von Röntgenstrahlen an Gasen nachzuweisen. Die erste Arbeit soll die Möglichkeit der Bestimmung der Winkelabhängigkeit der Streustrahlung nach einer neuen Messanordnung zeigen. Im zweiten Teil wird die Streuintensität unter festem Winkel bei veränderlicher Wellenlänge beobachtet. Um das Vorhandensein der Interferenzen zwischen den Atomen eines Moleküls zu prüfen, werden Gase untersucht deren mehratomige Moleküle die gleichen Atome in verschiedener Bindung enthalten.

---

[1]) D. R. HARTREE, Phil. Mag. **50**, 289, 1925; J. A. STRATTON, Helv. Phys. Acta **1**, 68, 1928; D. R. HARTREE, Proc. Cambridge Phil. Soc. **24**, 89 und 111, 1928; GAUNT, Proc. Cambridge Phil. Soc. **24**, 328, 1928; L. PAULING, Proc. Roy. Soc. **114**, 181, 1927.

[2]) z. B. R. W. JAMES, J. WALLER und D. R. HARTREE, Proc. Roy. Soc. **118**, 334, 1928.

Bestimmung der Winkelabhängigkeit der Streustrahlung.

§ 2. *Bisherige Messungen.*

Um die Winkelabhängigkeit der Streuintensität von Röntgenstrahlen an Gasen zu beobachten, sind verschiedene Versuchsanordnungen möglich. Die nächstliegende Methode ist die folgende:

Das zu untersuchende Gas wird in ein Gefäss eingeschlossen; es sind Fenster für den Primärstrahleneintritt und Ausgang, sowie für die Beobachtung der Sekundärstrahlung vorgesehen. Nach diesem Prinzip haben erstmals H. Mark und K. Schocken[1]) die Streuung von Argon und Kohlensäure gemessen. Die Intensitätsmessung erfolgte nach der Ionisationsmethode. Das zylinderförmige Streugefäss war mit der Ionisationskammer starr verbunden und das ganze System relativ zum Primärstrahlenbündel drehbar. Gemessen wurde der Winkelbereich von 30° bis 150°. Die Messpunkte lassen sich durch die klassische Thomson'sche Formel darstellen.

Ebenfalls ionometrische Messungen macht C. S. Barett[2]). Er lässt die ausgeblendeten Primärstrahlen längs eines Durchmessers durch ein zylindrisches mit Gas gefülltes Gefäss streichen, das am Umfang ein Zelluloidfenster trägt. Parallel dem Primärstrahl teilt eine Wand das Gefäss in zwei Hälften. Die Wand besitzt eine Öffnung, die als Blende für die Sekundärstrahlung dient. Die Ionisationskammer ist gegenüber dem festen System von Röntgenröhre und Zerstreuungskammer drehbar. Der Messbereich beträgt 19° bis 20°. Mit dieser Anordnung wird nur die Streuung von einem kleinen Volumen des Gases beobachtet. Man erkennt leicht, dass beim Drehen der Ionisationskammer das durch die Blende ausgesonderte Streuvolumen sich ändert. Barett verwendet einen Kunstgriff, um sich über die Grösse dieser Änderung des streuenden Volumens Klarheit zu verschaffen. Als Primärstrahlung wird die Strahlung einer Molybdänantikathode mit Strontium- und Zirkonfiltern verwendet, die eine gut monochromatische MoK_α-Strahlung gibt. Mit rein monochromatischem Licht von 0,71 Å.-E. werden keine wesentlichen Abweichungen gegenüber dem gefilterten Licht gefunden. Barett erhält für Sauerstoff und Kohlensäure ähnliche Kurven, während der Charakter der Kurve von Wasserstoff von beiden verschieden ist. Der Unterschied wird dadurch erklärt, dass bei dem leichten Element H_2 die inkohärente ComptonStrahlung stärker hervortritt, bei CO_2 und O_2 dagegen die kohärente. In keinem Falle

[1]) H. Mark und K. Schocken, Die Naturwissenschaften **139**, 1927, 15.
[2]) C. S. Barett, Phys. Rev. **32**, 1928, 22.

findet man aber die in der Einleitung erwähnten Interferenzen, die von Elektronen stammen sollen, welche sich auf Kugelschalen befinden. Die Kurven lassen sich aber auch nicht durch die Thomson-Formel darstellen. Sie zeigen gegen kleine Winkel einen starken Anstieg (sogen. Excess-Scattering).

Beiden bisher erwähnten Versuchsanordnungen haftet der Nachteil an, dass auch bei evakuierter Zerstreuungskammer ein Ionisationsstrom auftritt. Er entspricht der Wandstrahlung der Gefässe. Allgemein wird die Messgenauigkeit schlecht, wenn der eigentlich zu messende Effekt (Gasstrahlung) von der gleichen Grössenordnung ist wie die auftretenden Störungen (Wandstrahlung). Daran ändert auch die Berücksichtigung von Leeraufnahmen nichts.

Einen neuen Weg haben P. Scherrer und A. Stäger[1]) eingeschlagen. Es wird die Streuung der gefilterten Kupferstrahlung an Quecksilberdampf gemessen. Ein Quecksilberdampfstrahl aus einer Düse durchquert in vertikaler Richtung das gut ausgeblendete Primärstrahlenbündel. Der Hg-Strahl bildet die Achse einer zylindrischen Kamera, auf deren Innenwand ein lichtempfindlicher Film angebracht ist. Der Röntgenstrahl tritt radial ein. Als Streuvolumen kommt das Durchsetzungsvolumen vom Dampf- und Röntgenstrahl in Frage; es betrug etwa 1 mm^3. Der Schwärzungsverlauf am Film in der Ebene, die den Primärstrahl enthält und senkrecht auf dem Dampfstrahl steht, stellt den Intensitätsverlauf als Abhängige des Streuwinkels dar. Ein grosser Vorteil der Methode liegt in dem kleinen Streuvolumen. Die Absorption der Primär- und Streustrahlung im Gas kommt dadurch nicht in Betracht. Der Einfluss der Streuung der Luft, welche im Gefäss den Dampfstrahl umgibt, wurde durch Leeraufnahmen ohne Quecksilber bestimmt. Die Streukurve zeigt bei kleinen Winkeln einen starken Abfall, wird gegen 90^0 flacher, um von 120^0 bis 160^0 wieder etwas anzusteigen.[2])

[1]) P. Scherrer und A. Stäger, Helv. Phys. Acta I, 1928, 518.

[2]) Nach Niederschrift der vorliegenden Arbeit erschien eine Mitteilung von P. Debye, L. Bewilogue und F. Ehrhardt, Phys. Zsch. **30**, 84, 1929. Durch eine dosenförmige Zelle von 2 cm Höhe wird ein kreisförmig ausgeblendeter Strahl gesandt. Die Zelle enthält das zu untersuchende Gas und kann elektrisch geheizt werden. Beim Strahlaustritt ist die Zelle durch ein Aluminiumfenster abgeschlossen. Auf einem Film, der in einer wassergekühlten Kassette ausserhalb der Zelle liegt, wird die Streuschwärzung bis ca. 30^0 beobachtet. Für Stickstoff finden die Autoren einen monotonen Schwärzungsverlauf. Für Kohlenstofftetrachlorid zeigt der Film einen Interferenzring. Vernachlässigt man im CCl_4 die Streuung durch das Kohlenstoffatom und setzt die Chloratome in die vier Ecken eines Tetraeders, so ergibt sich nach der Theorie von Ehrenfest und Debye ein Interferenzring. Die Dimensionen der Versuchsanordnung und der Durchmesser des Ringes lassen darnach auf einen Abstand der Chloratome von 3,5 Å.-E. schliessen. Auch bei Chloroformdampf wurde ein Interferenzmaximum beobachtet.

§ 3. *Die neue Messmethode.*

Denkt man daran, nach dieser Methode auch Gase, besonders mit leichtem Atomgewicht, zu untersuchen, so stösst man auf Schwierigkeiten. Eine erste ist der grosse Gasverbrauch, um den freien Strahl zu unterhalten. Viel wichtiger ist aber, dass bei dem kleinen streuenden Volumen der beschriebenen Apparatur die nötigen Expositionszeiten (sie waren bei Hg etwa 20 Stunden) sehr lange werden. Man kommt so auf den Gedanken, das streuende Volumen zu vergrössern. Dadurch wird jedoch die Definition des Streuwinkels unscharf. Der nächste Schritt ist daher,

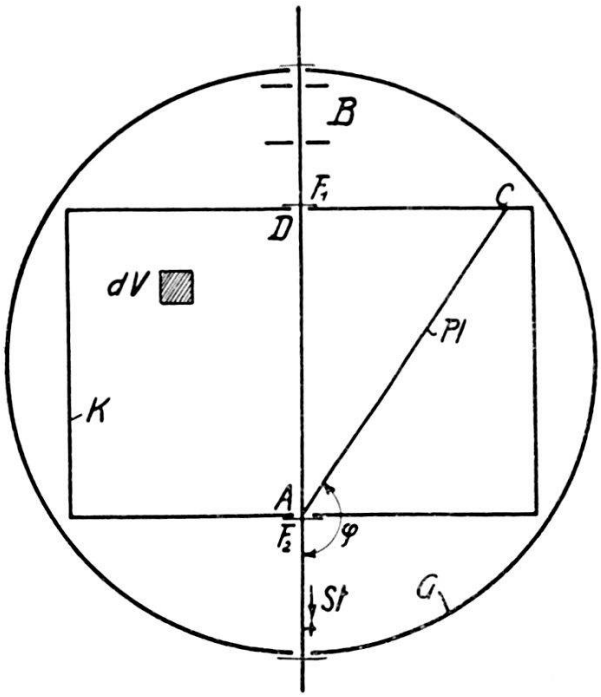

Fig. 1.

auf das punktförmige Volumen gänzlich zu verzichten. Man füllt ein Gefäss mit dem zu untersuchenden Gas und sendet einen gut ausgeblendeten Röntgenstrahl hindurch. In das Gafäss bringt man einen photographischen Film oder eine Platte. Auf dieser wird sich ein Schwärzungsverlauf zeigen. Die Frage entsteht, ob aus diesem Verlauf die Winkelabhängigkeit der Streustrahlung gefunden werden kann. Es sei vorweg der weiteren Erläuterungen mitgeteilt, dass dies möglich ist.

Die Anregung zu dieser Art der Bestimmung der Streustrahlung verdanke ich meinem sehr verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. Scherrer.

In Fig. 1 ist der schematisierte Schnitt durch die Gaskamera K gezeichnet. Beim Röntgenstrahleintritt ist das Blenden-

system B angedeutet. Die Blenden sind kreisförmig und sollen ein möglichst paralleles Röntgenbündel ausblenden. Die photographische Platte Pl ist vertikal zur Schnittebene gestellt. Sie schneidet den Röntgenstrahl im Austrittspunkt A unter einem Winkel φ. (Alle Winkel werden von der positiven Strahlrichtung aus gemessen.) Die Zweckmässigkeit dieser speziellen Anordnung wird sich bald im Verlaufe der Rechnung erweisen.

Betrachtet man einen festen Punkt der Platte Pl, so erhält er in erster Linie von jedem Volumelement des Weges, in welchem das Gas vom Primärstrahl getroffen wird, eine gewisse Energiemenge Streustrahlung. Dazu kommt aber, dass jedes beliebige Volumelement dV des Gases, das nicht im direkten Röntgenstrahl liegt, von den Gasmolekeln im Strahl St sogenannte „primär" gestreute Energie erhält. Das Volumenelement dV wird diese Primärstreuung nochmals „sekundär" streuen, so dass der betrachtete Plattenpunkt auch von jedem Volumenelement dV indirekt bestrahlt wird. Entsprechend wird diese Sekundärstrahlung wieder durch andere Volumenelemente tertiär gestreut usw. Weiter kann der Plattenpunkt Streuintensität vom Ein- und Austrittsfenster F_1 und F_2 für die Primärstrahlung sowie von den Blenden erhalten.

Vorläufig sei angenommen, dass sich die ganze Kamera in einem evakuierten Gefäss G befinde. Dadurch wird verhindert, dass in äusserem Gas entstehende Streustrahlung durch das Eintritts- und Austrittsfenster die Platte schwärzen kann. Man erreicht durch diese Beschränkung, dass der primär streuende Gasstrahl eine fest definierte Grösse erhält. Seine Länge ist durch die Ausdehnung der Kamera vom Eintritts- bis zum Austrittsfenster gegeben.

Im folgenden soll der Schwärzungsverlauf der photographischen Platte längs der sogen. Registriergeraden berechnet werden. Es ist dies die Schnittlinie der Schichtebene der photographischen Platte mit einer Ebene, die vertikal zu ihr steht und den Primärstrahl enthält. Dabei seien zunächst einige einschränkende Annahmen gemacht.

1. Das primäre Röntgenstrahlenbündel soll so eng ausgeblendet sein, dass in der Rechnung von seiner endlichen Ausdehnung senkrecht zur Strahlenrichtung abgesehen werden darf. Der Gasstrahl, welcher primär streut, darf also als unendlich dünn betrachtet werden.

2. Die sekundär, tertiär und höheren Streustrahlungen sollen in ihrer Intensität gegenüber der Primärstreustrahlung sehr klein sein. Sie werden bei der Rechnung gänzlich vernachlässigt.

3. Die Streustrahlung, hervorgerufen durch die Blenden und Fenster, sei vernachlässigbar klein.

4. Sowohl der primäre Röntgenstrahl, wie auch die durch Zerstreuung entstandenen Strahlen werden im Gase absorbiert werden. Von dieser Absorption soll abgesehen werden. Es wird also so gerechnet, wie wenn das Gas unendlich verdünnt wäre.

In wie weit diese Annahmen gerechtfertigt oder durch die Versuchsbedingungen erfüllbar sind, soll später betrachtet werden.

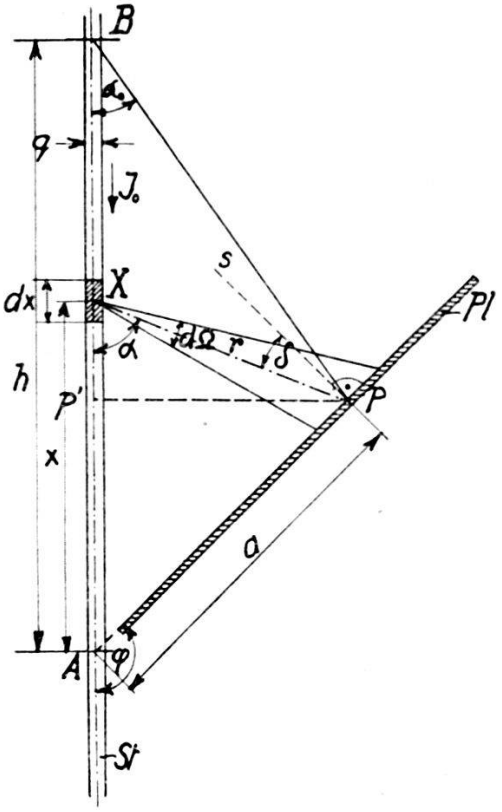

Fig. 2.

Fig. 2 stellt den Primärstrahl *St* und die Platte *Pl* dar. Wegen der früheren Annahmen darf so gerechnet werden, wie wenn nur eben im Gebiet des Primärstrahles Gas vorhanden, der übrige Raum aber evakuiert wäre. Schneidet man im Abstande x vom Punkte A aus durch zwei unendlich benachbarte Ebenen ein Längenelement dx des Strahles aus, so besitzt das so bestimmte Volumenelement die Grösse

$$dV = q \cdot dx \,, \tag{1}$$

wo q den konstanten Querschnitt des Strahles bedeute. Die Intensität des Primärstrahles sei I_0. Das Volumenelement streut nunmehr einen Teil der auffallenden Primärenergie (entsprechend

I_0) nach allen Richtungen des Raumes. Betrachtet man als Raumelement einen Kegel von unendlich kleinem Raumöffnungswinkel $d\,\Omega$, so lässt sich die Lage dieses Kegels durch die Angaben bestimmen, dass seine Achse in der Zeichenebene liegt und mit der positiven Primärstrahlrichtung den Winkel α einschliesst (Fig. 2). Die Energie, welche vom Volumen dV im Zeitelement dt in den Raum $d\,\Omega$ gestreut wird, sei dE. Phänomenologisch lässt sich aussagen, dass dE proportional ist der einfallenden Intensität I_0 und der im streuenden Volumen enthaltenen Anzahl Gasmoleküle dN. Beträgt die Molekülzahl im cm³ n, so ist

$$dN = n \cdot dV\,. \tag{2}$$

Die gestreute Energie wird ferner dem Raumwinkel $d\,\Omega$ und der Zeit dt verhältnisgleich zu setzen sein. Schliesslich hängt dE von der Lage des Raumelementes $d\,\Omega$, d. h. dem Streuwinkel α ab. Die Funktion, die diese Abhängigkeit darstellt, sei $\psi\,(\alpha)$. Damit lässt sich nun die Grösse der gestreuten Energie anschreiben. Es ist:

$$dE\,(\alpha) = n \cdot \psi\,(\alpha) \cdot I_0 \cdot dV \cdot d\,\Omega \cdot dt\,. \tag{3}$$

Die Funktion $\psi\,(\alpha)$ stellt die gesuchte Winkelabhängigkeit der Streustrahlung vom Streuwinkel α dar. Sie hängt von der Gasart und der Gasdichte ab.

Die Intensität $dI\,(\alpha, r)$ der Streustrahlung im Abstande r vom Streuvolumen dV innerhalb des betrachteten Raumwinkels $d\,\Omega$ bedeutet die auf die Flächeneinheit in der Zeiteinheit senkrecht auffallende Energiemenge. Die Gesamtfläche, auf die sich die Energie dE im Abstande r verteilt, ist $r^2 \cdot d\,\Omega$. Damit wird also die Intensität

$$d\,I\,(\alpha, r) = \frac{d\,E\,(\alpha)}{r^2\,d\,\Omega\,dt} = n \cdot \psi\,(\alpha) \cdot I_0\,\frac{d\,V}{r^2}\,. \tag{4}$$

Steht die Normale s des betrachteten Flächenelementes (photographische Platte) unter einem Winkel δ gegen die Achsenrichtung des Raumkegels geneigt, so wird die Energie $dE\,(\alpha)$ auf eine Fläche verteilt, die im Verhältnis von $\cos\delta$ grösser ist als der zur Kegelachse senkrechte Schnitt, wie er in Gl. (4) betrachtet wurde. Entsprechend wird demnach die Intensität auf einem schrägen Schnitt um den Wert von $\cos\delta$ kleiner. Diese Intensität wird auf der photographischen Platte als Schwärzung gemessen.

Bezeichnet man die Helligkeit der Platte in einem geeigneten Masse mit H, so ist

$$d\,H\,(\alpha, r) = n\,\psi\,(\alpha)\,q\,I_0 \frac{d\,x}{r^2} \cos\delta\,, \tag{5}$$

wenn für dV der Wert aus Gl. (1) eingesetzt wurde.

Der Punkt auf der Registriergeraden, dessen Helligkeit bestimmt werden soll, kann einfacher als durch α und r durch den Abstand a (Fig. 2) vom Durchstosspunkt A Platte—Primärstrahl festgelegt werden. Es gilt also dann für die Streuenergie vom Element $d\,x$ aus:

$$d\,H\,(a) = n\,q\,I_0\,\psi\,(\alpha)\,\frac{\cos\delta}{r^2}\,d\,x\,. \tag{6}$$

Die Gesamthelligkeit $H\,(a)$ im Punkte a ergibt sich durch Integration von $d\,H\,(a)$ über die ganze wirksame Länge des Primärstrahles. Durch die früheren Annahmen war diese aber fest bestimmt; sie sei h genannt. Man erhält:

$$H\,(a) = \int_{x=0}^{x=h} n\,q\,I_0\,\psi\,(\alpha)\,\frac{\cos\delta}{r^2}\,d\,x\,. \tag{7}$$

Zur Integration drückt man am besten alle Grössen durch die Variable α und die Konstanten a und φ aus. In Fig. 2 erkennt man die folgenden Beziehungen:

$$r = a\,\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\,, \tag{8}$$

$$\cos\delta = \sin\,(\varphi - \alpha)\,, \tag{9}$$

$$x = \overline{AP'} + \overline{P'X} = -a\cos\varphi + r\cos\alpha\,. \tag{10}$$

Setzt man den Wert für r aus Gl. (8) in Gl. (10) ein, so erhält man

$$x = a\,(\sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,\alpha - \cos\varphi)\,. \tag{11}$$

Differentiert man diesen Ausdruck für x partiell nach α (der Wert von a ist ein Parameter, der unabhängig von α ist), so ergibt sich:

$$d\,x = -a\sin\varphi\,\frac{d\,\alpha}{\sin^2\alpha}\,. \tag{12}$$

Unter Benützung der Gl. (8), (9) und (12) erhält man aus Gl. (7) nach leichter Umformung:

$$H(a) = \frac{n\,q\,I_0}{a \cdot \sin\varphi} \int_{x=0}^{x=h} \psi(\alpha) \sin(\alpha - \varphi)\, d\alpha\,. \tag{13}$$

Man hat nun noch die Integrationsgrenzen von der ursprünglichen Variabeln x auf die neue α zu übertragen. Für die untere Integrationsgrenze $x = 0$ gilt für alle Punkte P der Platte, also für jeden Wert des Parameters a:

$$\text{für } x = 0 \;:\; \alpha = \varphi\,. \tag{14}$$

Für die obere Grenze nimmt der Winkel α den Wert

$$\alpha = \alpha_0 \text{ für } x = h \tag{15}$$

an. Die Grösse von α_0 hängt von dem gewählten Punkt P auf der Platte ab. Aus Fig. 2 erkennt man, dass gilt

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\overline{PP'}}{\overline{BP'}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{AB} - \overline{AP'}}\;;\; \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{a\sin\varphi}{h + a\cos\varphi}\,. \tag{16}$$

Gl. (16) ordnet jedem Plattenpunktabstand a einen Grenzwinkel α_0 zu. In der neuen Schreibweise wird aus Gl. (13):

$$H(a) = \frac{n\,q\,I_0}{a\sin\varphi} \int_{\alpha=\varphi}^{\alpha=\alpha_0} \psi(\alpha) \sin(\alpha - \varphi)\, d\alpha\,. \tag{17}$$

Führt man nun einen Zerstreuungsversuch nach der beschriebenen Anordnung durch, so erhält man auf der photographischen Platte einen Schwärzungsverlauf, der die Funktion $H(a)$ von Gl. (17) darstellt.

Die Schwärzung lässt sich folgendermassen finden: Beleuchtet man ein kleines Plattenstück mit der Lichtintensität I_0, so findet man, dass diese Intensität nach Durchgang durch die Platte auf einen Betrag I abgeschwächt wurde. Die Intensitätsverminderung entspricht der Energieabsorption des Lichtes an der betreffenden Plattenstelle. Bildet man den Ausdruck

$$S = \log\frac{I}{I_0}$$

(gemeint ist der Brigg'sche Logarithmus), so wird S die absolute

Schwärzung genannt. W. Friedrich und P. P. Koch[1]) haben nachgewiesen, dass die so definierte absolute Schwärzung der Intensität der Röntgenstrahlen proportional ist, welche die Schwärzung erzeugen. Der Proportionalitätsfaktor hängt von der Wellenlänge des bestrahlenden Röntgenlichtes ab.

Durch Ausmessen der absoluten Schwärzung der Platte *Pl* mit einem Photometer[2]) erhält man also ein Mass für die Intensität der Streustrahlung längs der Registriergeraden.

Durch den Versuch ist demnach die linke Seite von Gl. (17) bestimmt. Man kann jetzt für jeden Punkt der Registriergeraden auf der Platte das Produkt aus Helligkeit $H(a)$ und Abstand a berechnen. Dieses Produkt $a \cdot H(a)$ ergebe als Funktion des

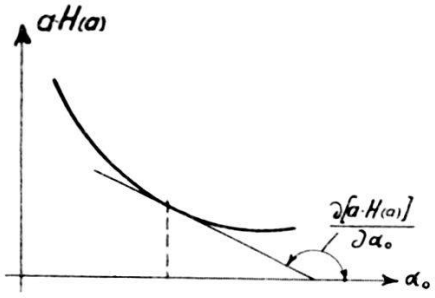

Fig. 3.

zugehörigen Winkels α_0 aufgetragen eine Kurve, wie sie in Fig. 3 angedeutet ist. Legt man in einem beliebigen Punkt der Kurve die Tangente, so ist deren Neigung durch den Ausdruck

$$\frac{\partial\,[a \cdot H_{(a)}]}{\partial\,\alpha_0}$$

gegeben. Diese Neigung lässt sich einmal aus der experimentell gefundenen Kurve messen, ein zweites Mal aus Gl. (17) berechnen. Die beiden Werte müssen einander für jeden Punkt, der durch α_0 charakterisiert ist, gleich sein.

Differentiert man Gl. (17) partiell nach α_0, so ergibt sich:

$$\frac{\sin\varphi}{n\,q\,I_0}\,\frac{\partial\,[a \cdot H_{(a)}]}{\partial\,\alpha_0} = \frac{\partial}{\partial\,\alpha_0}\int\limits_{\alpha=\varphi}^{\alpha=\alpha_0} \psi\,(\alpha)\,\sin\,(\alpha-\varphi)\,d\alpha\,. \qquad (18)$$

Die Differentiation der rechten Seite kann ausgeführt werden, da der Parameter α_0 nur in den Grenzen des Integrals, nicht aber

[1]) W. Friedrich und P. P. Koch, Ann. d. Phys. **45**, 399, 1915.
[2]) P. P. Koch, Ann. d. Phys. **39**, 705, 1913.

im Integranden vorkommt. Die Ausführung der in Gl. (18) rechts stehenden Integration ergibt:

$$\int_{\alpha=\varphi}^{\alpha=\alpha_0} \psi(\alpha) \sin(\alpha-\varphi)\, d\alpha = F(\alpha_0, \varphi) - F(\varphi)\,, \tag{19}$$

wobei die so eingeführte Funktion F von der Form von $\psi(\alpha)$ abhängt. Das Integral soll jetzt nach α_0 differenziert werden. Aus Gl. (19) ersieht man:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_0} \int_{\alpha=\varphi}^{\alpha=\alpha_0} \psi(\alpha) \sin(\alpha-\varphi)\, d\alpha = \frac{\partial F(\alpha_0, \varphi)}{\partial \alpha_0} - \frac{\partial F(\varphi)}{\partial \alpha_0}\,, \tag{20}$$

und

$$\frac{\partial F(\alpha_0, \varphi)}{\partial \alpha_0} = \psi(\alpha_0) \sin(\alpha_0 - \varphi) \tag{21}$$

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial \alpha_0} = 0\,, \tag{22}$$

da $F(\varphi)$ eine Konstante ist. Gl. (18) lässt sich unter Benützung von Gl. (19) bis (22) schreiben:

$$\frac{\sin\varphi}{n\, q\, I_0} \frac{\partial [a \cdot H_{(a)}]}{\partial \alpha_0} = \psi(\alpha_0) \sin(\alpha_0 - \varphi)\,. \tag{23}$$

Schliesslich berechnet man aus dieser letzten Gleichung die unbekannte Funktion

$$\psi(\alpha_0) = \frac{\sin\varphi}{n\, q\, I_0} \frac{1}{\sin(\alpha_0 - \varphi)} \frac{\partial [a \cdot H_{(a)}]}{\partial \alpha_0}\,. \tag{24}$$

Das gestellte Problem ist damit gelöst.

Man findet zu einem beliebigen Streuwinkel α_0 die zugehörige Streufunktion $\psi(\alpha_0)$ im wesentlichen also durch Differentiation der gemessenen Intensitätsverteilung.

Zunächst soll gezeigt werden, worin der Vorteil der speziellen Anordnung nach Fig. 1 besteht. Von vorneherein wird man nicht auf die Notwendigkeit aufmerksam, die photographische empfindliche Schicht (Platte oder Film) eben zu wählen und ausserdem die Plattenebene so zu legen, dass sie durch den einen Endpunkt des primär streuenden Gasstrahles geht. Man könnte vielmehr auch daran denken, ähnlich wie bei dem Versuch von P. Scherrer und A. Stäger (loc. cit.), den Röntgenstrahl radial durch eine zylindrische Kamera zu senden und einen photogra-

phischen Film auf den Zylindermantel zu legen (Fig. 4). Um die Helligkeit in einem Punkt P des Filmes zu rechnen, betrachtet man, entsprechend der früheren Rechnung, ein Elementarvolumen dV des Röntgenstrahles. Der Aufpunkt P wird am einfachsten durch den Zentriwinkel γ (früher der Abstand a) festgelegt. Man erhält für $H(\gamma)$ einen Ausdruck, wie in Gl. (7). Wieder lassen sich r, $\cos\delta$ und dx durch γ und a ausdrücken und Gl. (7) ergibt eine zu Gl. (13) entsprechende Formel. Hier enthält nun aber, wie eine einfache Rechnung ergibt, der Inte-

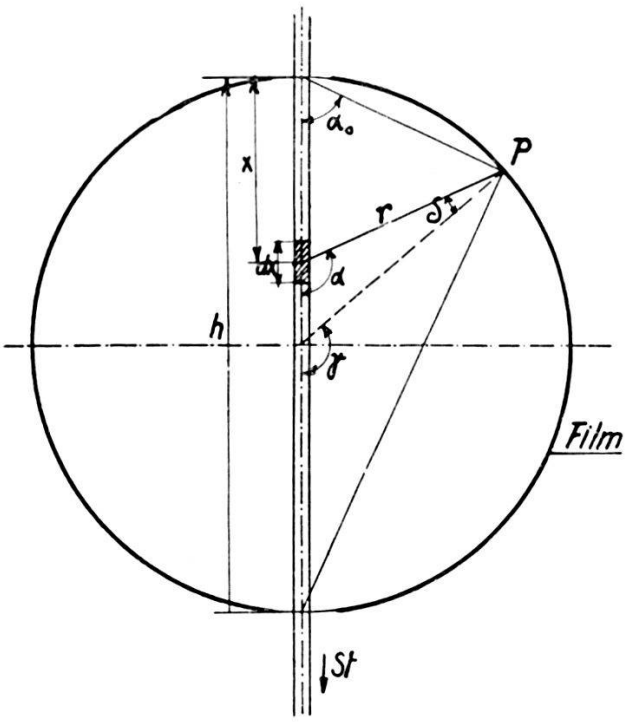

Fig. 4.

grand der rechten Seite auch den Parameter γ in der Form $\cos(a-\gamma)$. (Bei der erstbesprochenen Anordnung konnte der Parameter a vor das Integral gezogen werden, da er nur als Faktor auftrat.) Damit wird die Differentiation, die nun folgen soll, nicht mehr so einfach. Man erhält durch Differentieren eine Summe, deren erster Summand die gesuchte Funktion $\psi(a_0)$ enthält; der zweite Summand besteht wieder aus einem Integral über $\psi(a)$. Die Versuchsanordnung gestattet also nicht, die Funktion $\psi(a)$ selbst zu berechnen.

Eine dritte Anordnung besteht darin, eine photographische Platte parallel dem Primärstrahl zu stellen. Die Rechnungsdurchführung zeigt, dass die untere Integrationsgrenze in Gl. 18 keine Konstante für alle Plattenpunkte mehr bleibt; sie hängt vielmehr, wie die obere Grenze, auch von dem besonders be-

trachteten Aufpunkt ab. Bei der späteren Differentiation erhält man daher zwei Glieder, die beide die Streufunktion ψ als Faktor enthalten; das Argument der Funktion ψ ist in den beiden Summanden verschieden, so dass auch bei dieser dritten Anordnung eine Unbestimmtheit in der Berechnung der gesuchten Streufunktion ψ verbleibt.

Kehren wir also wieder zu der ursprünglichen Anordnung mit der schief zum Primärstrahl gestellten Platte zurück. Die Fig. 1 lässt erkennen, dass die möglichen Winkel α_0, für die

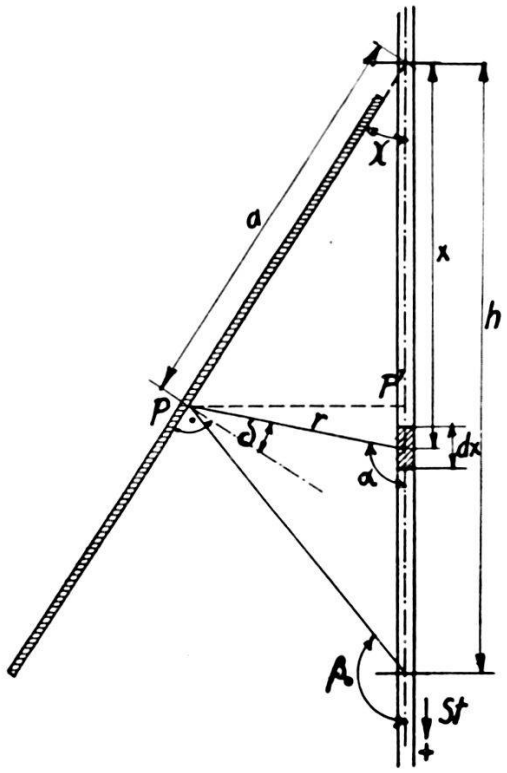

Fig. 5.

die Schwärzung der Platte eine Berechnung gestattet, den Bereich von 0^0 bis 90^0 bedecken, wobei 0^0 dem Punkte A der Platte, 90^0 dem Punkte C entspricht. Man erhält also nur die Funktion $\psi(\alpha_0)$ für die erwähnten Werte des Argumentes. Um auch die Winkelabhängigkeit für Streuwerte von 90^0 bis 180^0 zu bestimmen, stellt man eine zweite Platte in die Kamera, deren Bildebene durch den Eintrittspunkt D der Kamera geht und mit dem Primärstrahl einen Winkel χ einschliessen möge.

Für diese zweite Platte lässt sich die Schwärzung ganz analog wie für die erste berechnen. Mit den Bezeichnungen der Fig. 5 erhält man:

$$r = a \frac{\sin \chi}{\sin \alpha}, \tag{25}$$

$$\cos\delta = \sin(\alpha - \chi)\,, \tag{26}$$

$$x = a\cos\chi + r\cos(\pi - \alpha) = a(\cos\chi - \sin\chi\,\mathrm{cotg}\,\alpha)\,, \tag{27}$$

$$dx = a\sin\chi\,\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}\,. \tag{28}$$

Setzt man diese Werte in Gl. (7) ein, so entsteht

$$H(a) = \frac{n\,q\,I_0}{a\sin\chi}\int\limits_{x=0}^{x=h}\psi(\alpha)\sin(\alpha-\chi)\,d\alpha\,. \tag{29}$$

oder

$$\frac{\sin\chi}{n\,q\,I_0}\,[a\cdot H_{(a)}] = \int\limits_{\alpha=\chi}^{\alpha=\beta_0}\psi(\alpha)\sin(\alpha-\chi)\,d\alpha \tag{30}$$

und

$$\mathrm{tg}\,\beta_0 = \frac{-a\sin\chi}{h - a\cos\chi}\,. \tag{31}$$

Das Produkt $a\cdot H(a)$ wird aus dem experimentell gefundenen Schwärzungsverlauf als Funktion von β_0 berechnet. Durch Differentiation von Gl. (31) erhält man:

$$\psi(\beta_0) = \frac{\sin\chi}{n\,q\,I_0}\,\frac{1}{\sin(\beta_0-\chi)}\,\frac{\partial[a\cdot H_{(a)}]}{\partial\beta_0}\,. \tag{32}$$

Der Wertebereich von β_0 liegt zwischen 180^0 und 90^0. Es kann nunmehr durch gleichzeitige Aufnahmen auf beiden Platten die Streufunktion in ihrem ganzen Verlauf bestimmt werden. 0^0 und 180^0 selbst sind nicht messbar, da sonst die Platten an den Durchstosspunkten mit dem Primärstrahl durch den direkten Strahl geschwärzt würden.

Die Gl. (24) und (32) können dadurch vereinfacht werden, dass bei den bisherigen Messungen beide Platten unter 45^0 gegen den Primärstrahl geneigt waren, d. h. es war

$$\varphi = 135^0 \quad \text{und} \quad \chi = 45^0.$$

Damit wird

$$\psi(\alpha_0) = \frac{-1}{n\,q\,I_0}\,\frac{1}{(\sin\alpha_0 + \cos\alpha_0)}\,\frac{\partial[a\cdot H_{(a)}]}{\partial\alpha_0}\quad \text{für } 0 < \alpha_0 < \pi/2\,, \tag{33}$$

$$\psi(\beta_0) = \frac{1}{n\,q\,I_0}\,\frac{1}{(\sin\beta_0 - \cos\beta_0)}\cdot\frac{\partial[a\cdot H_{(a)}]}{\partial\beta_0}\quad \text{für } \pi/2 < \beta_0 < \pi\,. \tag{34}$$

Ein grosser Vorteil der photographischen Bestimmung der Streuintensität liegt darin, dass für alle Werte des Argumentes der Streufunktion von 0 bis π die Intensität gleichzeitig gemessen wird. Schwankungen der Intensität der Strahlenquelle sind auf die Ergebnisse ohne Einfluss. Müsste dieser Gesichtspunkt der Konstanz der Primärstrahlung nicht berücksichtigt werden, so wäre auch ein direktes Abtasten der berechneten Streuintensitäten mit der Ionisationskammer möglich.

§ 4. *Die Apparatur.*

Die bisher beschriebene Kamera hat zwei besondere Eigenschaften, die für ihre Konstruktion wegweisend sind. Sie muss

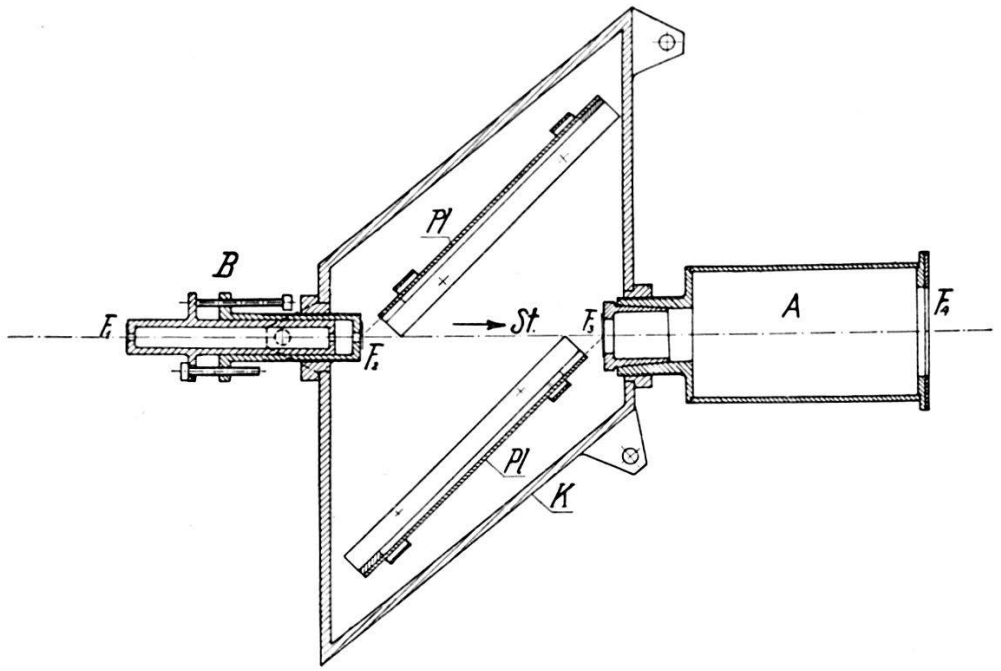

Fig. 6.

erstens lichtdicht sein, da vorgesehen war, die Platten uneingepackt zu verwenden; zweitens soll sie vakuumdicht sein, um die Gase bei verschiedenen Drucken messen zu können. Diesen Forderungen wurde entsprochen, indem die eigentliche Kamera nur lichtdicht gemacht wurde. Sie selbst wurde in ein vakuumdichtes Glasgefäss mit aufgeschliffenem Deckel gestellt. Für den Strahleneintritt besitzt das Glasgefäss eine Bohrung, die durch eine dünne Aluminiumfolie verschlossen ist.

Einen Schnitt durch die Kamera zeigt die Fig. 6. Die Röntgenstrahlen treten bei dem Fenster F_1 durch das dreifache Blenden-

system B in die Kamera K beim Fenster F_2 ein. Durch das Fenster F_3 verlassen sie die Kamera, kommen in das Austrittsgefäss A und schliesslich durch das Fenster F_4 wieder ins Freie. Ursprünglich war vorgesehen, das Blendensystem B und das Austrittsgefäss A möglichst gut zu evakuieren. Es sollte dadurch erreicht werden, dass keine Streustrahlung von äusserem Gas in die Kamera dringt, was in Fig. 1 durch das evakuierte Gefäss G erfüllt war.

Nachdem die Kamera auf Lichtdichtheit geprüft war, sollte die Annahme 3, die der früheren Berechnung zugrunde gelegt

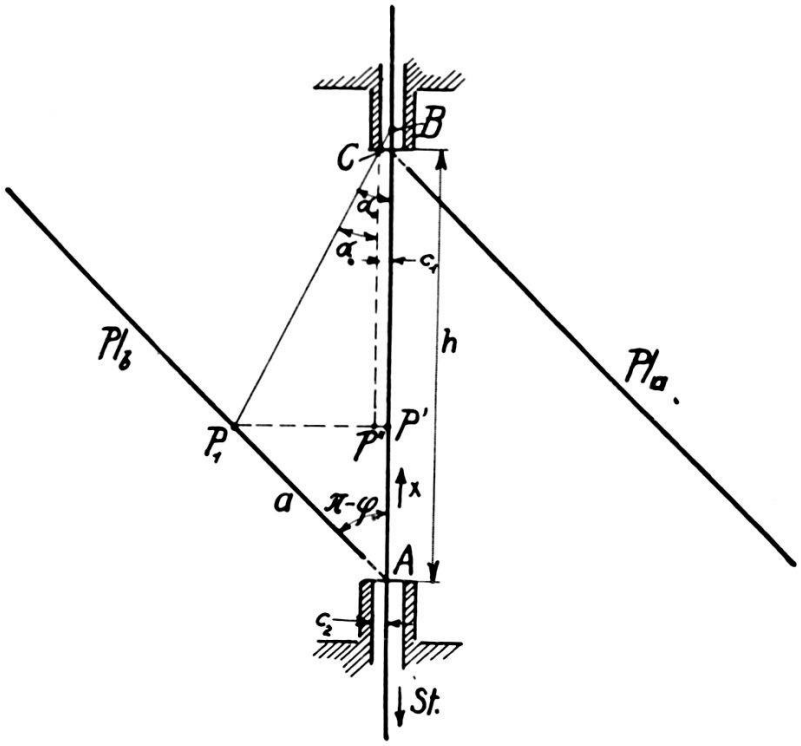

Fig. 7.

worden war, geprüft werden. Es war also nachzuweisen, dass die Streustrahlung durch Blenden und Fenster vernachlässigbar klein ist. Die Kamera wurde evakuiert und eine mehrstündige Aufnahme bei Bestrahlung mit Röntgenlicht gemacht. Das Resultat dieser Aufnahme war völlig negativ. Die Platten wurden stark geschwärzt und zeigten auch Interferenzlinien der Streuung an den Aluminiumfolien, aus denen die Fenster F_3 und F_4 bestanden. Es wurde nun versucht, die Fenster aus allen möglichen Substanzen herzustellen, um diese Schwärzung der Leeraufnahmen zu vermindern. Selbst die Verwendung von schwarzem, mit Schellack bestrichenem Papier brachte keinen genügenden

Erfolg. Schliesslich wurde die durchgreifendste Methode eingeschlagen: die Fenster F_2 und F_3 wurden ganz weggelassen; F_1 und F_4 aus dünnem, schwarzem, undurchsichtigem Papier hergestellt. Damit war aber auch auf die Möglichkeit, das Blendensystem und das Austrittsgefäss zu evakuieren, verzichtet. Eine Leeraufnahme mit dieser Anordnung zeigte absolut keine Schwärzung mehr (siehe die späteren Diagramme). Die Beseitigung der beiden Fenster wirkt aber auch auf die Rechnung zurück. Bei der Integration über die Länge des Primärstrahls waren ganz bestimmte Grenzen 0 und h angenommen worden. Diese fallen jetzt dahin.

Fig. 7 stellt die neue Anordnung dar. Für einen bestimmten Plattenbestand a eines Punktes P_1 hat die Integration über x vom Anfangspunkt A bis zu einem Punkte B zu erfolgen, dessen Lage von dem Werte a abhängt. Der äusserste Streustrahl ist nämlich durch die Bedingung festgelegt, dass er die Blende mit dem Radius c_1 im Punkte C eben noch berührt. Man erhält so eine neue Definition für die obere Integrationsgrenze. Im Dreieck $C\,P_1 P''$ berechnet sich α_0 als:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\overline{P_1 P''}}{\overline{P'' C}} = \frac{\overline{P_1 P'} - \overline{P' P''}}{h - \overline{A P'}}$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{a \sin \varphi - c_1}{h + a \cos \varphi} \tag{35}$$

und entsprechend für die andere Platte:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = - \frac{a \sin \chi - c_2}{h - a \cos \chi} \,. \tag{36}$$

Die Gl. (35) und (36) ersetzen jetzt die Gl. (16) bezw. (31) Man erkennt, dass die neuen Gleichungen für verschwindend kleine Blendenradien in die alten übergehen. Bei dieser Berechnung der Grenzen ist z. B. für die Platte b das streuende Volumen innerhalb der Austrittsblende c_2 vernachlässigt, das noch von rückwärts auf die Platte strahlen könnte. Man erkennt aus Fig. 7, dass diese Wirkung nur für sehr kleine Werte von a in Betracht kommen kann. Der Effekt darf aber unbesorgt ausser Acht bleiben, da das streuende Volumen in der Blende sehr klein ist und die Streustrahlen zudem in der dicken Glasschichte der Platte durch

Absorption sehr stark geschwächt werden bevor sie die lichtempfindliche Schichte treffen.

Das Blendensystem besteht aus drei koaxialen kreisförmigen Öffnungen (Fig. 6). Die ersten beiden Blenden von 2 mm Durchmesser haben einen festen Abstand voneinander, der so gewählt ist, dass die stets auftretende Divergenz des Strahlenbündels klein genug bleibt. Die dritte Blende der Kamera ist gegen die zweite verstellbar. Die Distanz der beiden wird so eingestellt, dass die Streustrahlung, welche vom Rande der zweiten Blende ausgeht, durch die dritte Blende auf einen möglichst engen Kegel abge-

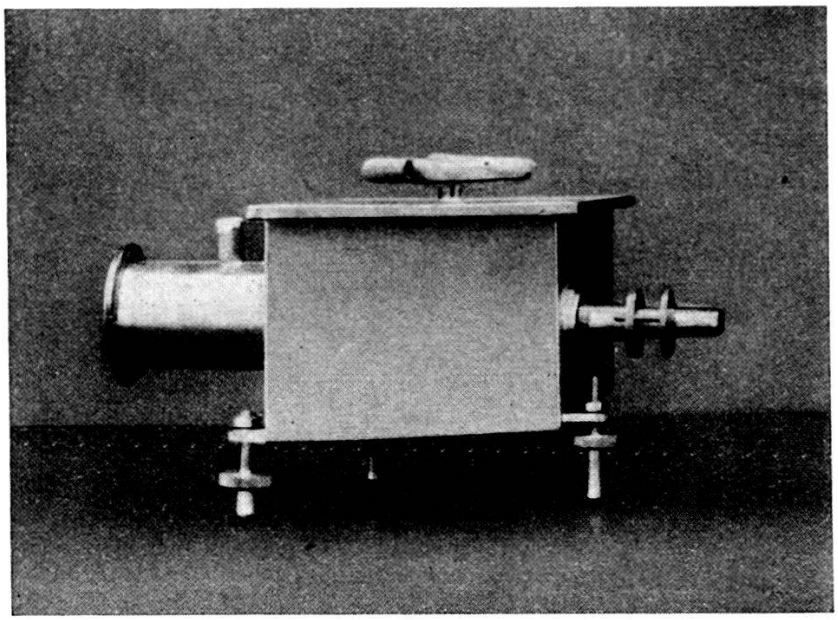

Fig. 8.

schnitten wird. Dabei darf die dritte Blende aber das direkte primäre Röntgenbündel nicht berühren, da sonst an ihr wieder Streustrahlung entstehen würde. Die Distanzverstellung und nachherige Fixierung erfolgt mit den seitlichen Schrauben (Fig. 6). Die Wirksamkeit dieser Anordnung ersieht man daraus, dass die Leeraufnahmen auch bei dreissigstündiger Belichtungszeit keine Schwärzung zeigen.

Die Gesamtanordnung der Kamera wird durch Fig. 8 dargestellt. Die Spirale am Deckel der Kamera bildet den lichtdichten Weg für den Gaseintritt. Die Kamera wird gegen den Brennfleck der Röntgenröhre möglichst gut zentriert. Evakuierung und Gaszufuhr erfolgt durch eine Leitung mit Schliff von unten her. Dort ist auch das Manometer zur Druckbestimmung der Gasfüllung angeblasen.

Die zur weiteren Berechnung nötigen Grössen der Kamera sind:

$$h = 6{,}5 \text{ cm}$$
$$c_1 = 0{,}15 \text{ cm}$$
$$c_2 = 0{,}4 \text{ cm}.$$

Die Plattenhalter sind so gebaut, dass die Platten von $6{,}5 \times 9$ cm mit der Schicht in Ebenen liegen, die stets durch die Punkte A bezw. B (Fig. 2) gehen. Die Halter tragen vor der Platte liegend, senkrecht über und unter der Registrierlinie, zwei Marken; verbindet man auf der Aufnahme die Bilder der beiden Marken durch eine Gerade, so erhält man einen Punkt der Registrierkurve, dessen Wert a bestimmt ist. Von diesem Punkt aus erfolgt die Ausmessung der Platten.

Für die äusserst sorgfältige Photometrierung der Platten möchte ich Hrn. Dr. Kuhlmann von der staatl. Universität Hamburg auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

§ 5. *Fehlerrechnung.*

Bevor die Messergebnisse mitgeteilt werden, soll die Berechtigung der vier Annahmen diskutiert werden, die der ganzen Rechnung zugrunde gelegt worden waren.

1. Der primäre Röntgenstrahl wurde als unendlich dünn betrachtet. Zur Stützung dieser Annahme soll im folgenden für die Platte ($\varphi = 135^0$), die die Vorwärtsstreustrahlung aufnimmt, die Rechnung mit endlicher Strahldicke durchgeführt werden.

Fig. 9 stellt perspektivisch ein Längenelement dx des übertrieben stark gezeichneten Primärstrahles dar, das im Abstand x vom Durchstosspunkt Platte – Strahl liegt. Im Längenelement greift man ein Volumenelement dV heraus: es sei begrenzt durch zwei Ebenen, die die Strahlachse enthalten und den Winkel ω bezw. $\omega + d\omega$ mit der Zeichenebene einschliessen. Radial liege das Element zwischen zwei Zylindern vom Radius ϱ bezw. $\varrho + d\varrho$. Es gilt also

$$dV = \varrho \, d\omega \, d\varrho \, dx \,. \tag{37}$$

Der Schwerpunktsabstand des Volumenelementes dV vom Plattenpunkt P (die Registrierlinie liegt in der Zeichenebene) sei r. Die Streuintensität im Punkte P, herrührend vom Element dV wird analog wie in Gl. (5):

$$d\,H_{(a)} = n \, \psi(\gamma) \, I_0 \, \frac{d\,V}{r^2} \cos\delta \,. \tag{38}$$

γ bedeutet den Winkel des Strahles r mit der positiven Primärstrahlrichtung. Der Winkel der Geraden R vom Strahlmittelpunkt 0 nach P heisse α. Alle auftretenden Grössen können durch a, ϱ, α, ω und den Plattenwinkel φ ausgedrückt werden.

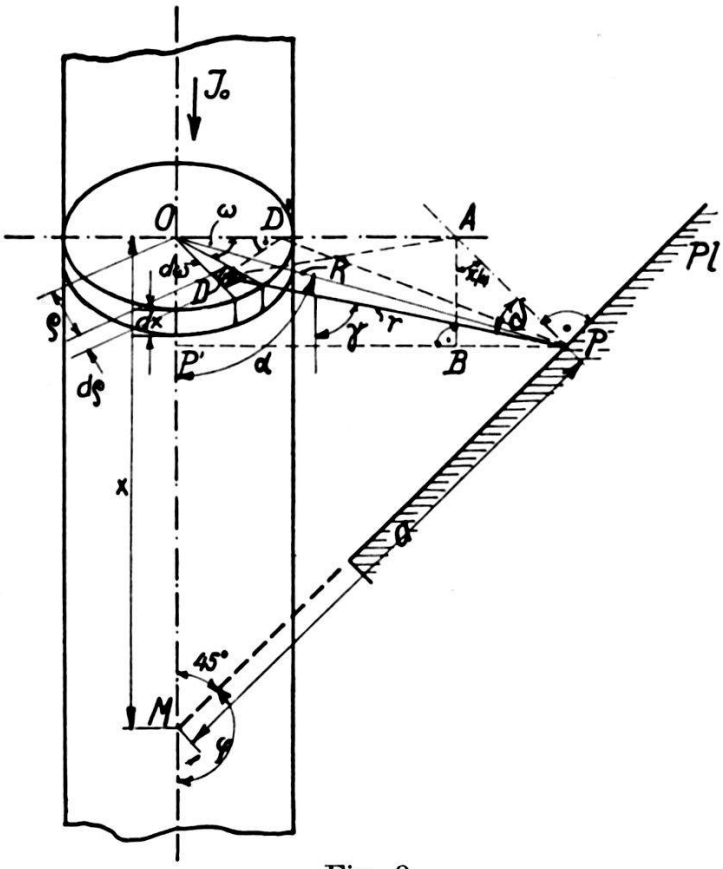

Fig. 9.

Für φ sei zur Vereinfachung gleich der Wert $\frac{3\pi}{4}$ eingesetzt, also

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\varphi\,.$$

Es wird:

$$\overline{PP'} = R\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}}\;;\quad R = \frac{a}{\sqrt{2}\sin\alpha} \tag{39}$$

$$x = \overline{MP'} + \overline{P'O} = \frac{a}{\sqrt{2}} + R\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}}(1 + \operatorname{cotg}\alpha) \tag{40}$$

$$dx = \frac{-a}{\sqrt{2}\sin^2\alpha}\,d\alpha\,. \tag{41}$$

Ist in Fig. 9 D' die normale Projektion des Schwerpunktes

von dV auf $\overline{OA}$, so erkennt man in den anzuführenden Dreiecken die Beziehungen:

$$\Delta\,(ABP):\ \overline{PB} = \overline{AB} = \overline{OM} - \overline{P'M}$$

$$\overline{PB} = x - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\overline{OA} = \overline{P'B} = \overline{P'P} - \overline{PB} = \frac{a}{\sqrt{2}} (1 - \operatorname{cotg} \alpha)$$

$$\Delta\,(ABP):\ \overline{AP} = \frac{\overline{PB}}{\cos \pi/4} = a \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\Delta\,(ODD');\ (\perp \sphericalangle \text{ bei } D'):\ \overline{OD'} = \varrho \cos \omega;\ \ \overline{DD'} = \varrho \sin \omega$$

$$\Delta\,(OD'P):\ \overline{D'P}^2 = R^2 + \overline{OD'}^2 - 2\,R\,\overline{OD'} \cos (\pi/2 - \alpha)$$

$$\overline{D'P}^2 = \frac{a^2}{2 \sin^2 \alpha} + \varrho^2 \cos^2 \omega - \sqrt{2}\, a\, \varrho \cos \omega$$

$$\Delta\,(DD'P);\ (\perp \sphericalangle \text{ bei } D'):\ r^2 = \overline{DD'}^2 + \overline{D'P}^2 = \frac{a^2}{2 \sin^2 \alpha} + \varrho^2 - \sqrt{2}\, a\, \varrho \cos \omega$$

$$\Delta\,(ODA):\ \overline{DA}^2 = \varrho^2 + \frac{a^2}{2} (1 - \operatorname{cotg} \alpha)^2 - \sqrt{2}\, a\, \varrho\, (1 - \operatorname{cotg} \alpha) \cos \omega$$

$$\Delta\,(ADP):\ \overline{DA}^2 = r^2 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha - 2\, r\, a \operatorname{cotg} \alpha \cos \delta.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen setzt man die rechten Seiten einander gleich und kann daraus mit dem berechneten Wert von r^2 nach leichter Umformung finden:

$$2\, r \cos \delta = a\,(1 + \operatorname{cotg} \alpha) - \sqrt{2}\, \varrho \cos \omega$$

und schliesslich

$$\frac{\cos \delta}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{a\,(1 + \operatorname{cotg} \alpha) - \sqrt{2}\, \varrho \cos \omega}{\left[\dfrac{a^2}{2 \sin^2 \alpha} + \varrho^2 - \sqrt{2}\, a\, \varrho \cos \omega\right]^{3/2}}\,. \tag{42}$$

Dieser Ausdruck und der Wert dV aus Gl. (37), sowie dx aus Gl. (41) werden in Gl. (38) eingesetzt:

$$d\,H_{(a)} = -\frac{n\, I_0}{2\,\sqrt{2}} \frac{a}{\sin^2 \alpha}\, \psi\,(\gamma)\, \frac{[a\,(1 + \operatorname{cotg} \alpha) - \sqrt{2}\, \varrho \cos \omega]}{\left[\dfrac{a^2}{2 \sin^2 \alpha} + \varrho^2 - \sqrt{2}\, a\, \varrho \cos \omega\right]^{3/2}}\, \varrho\, d\omega\, d\varphi\, d\alpha. \tag{43}$$

Um die Gesamthelligkeit $H\,(a)$ im Punkte P zu erhalten, muss die Summierung über alle Volumenelemente dV des Primär-

strahles vorgenommen werden. Man erhält also für $H(a)$ ein dreifaches Integral, das sich folgendermassen schreiben lässt:

$$H_{(a)} = -\frac{n\,I_0}{2\sqrt{2}} \int\limits_{\alpha=\varphi}^{\alpha=\alpha_0} \int\limits_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \int\limits_{\varrho=0}^{\varrho=\Delta} a\,\psi(\gamma)\,\varrho\,\frac{g\,(\alpha,\,\omega,\,\varrho)}{\sin^2\alpha}\,d\alpha\,d\varrho\,d\omega \tag{44}$$

mit der Abkürzung

$$g\,(\alpha,\,\omega,\,\varrho) = \frac{a\,(1+\operatorname{cotg}\alpha)-\sqrt{2}\,\varrho\cos\omega}{\left[\dfrac{a^2}{2\sin^2\alpha}+\varrho^2-\sqrt{2}\,a\,\varrho\cos\omega\right]^{3/2}}\,. \tag{45}$$

Die angegebenen Grenzen der drei Integrale sind nach den früheren Bezeichnungen verständlich; Δ bedeutet den Primärstrahlradius. Die folgenden Rechnungen beziehen sich auf die Auswertung der dreifachen Integration.

Zunächst soll der Ausdruck für die Funktion g umgeformt werden. Klammert man im Zähler a, im Nenner

$$\left[\frac{a^2}{2\sin^2\alpha}\right]^{3/2}$$

aus, so geht Gl. (45) über in:

$$g\,(\alpha,\,\omega,\,\varrho) = \frac{\left[1+\operatorname{cotg}\alpha-\sqrt{2}\left(\dfrac{\varrho}{a}\right)\cos\omega\right]}{\left[1+2\sin^2\alpha\left(\dfrac{\varrho}{a}\right)^2-2\sqrt{2}\cos\omega\sin^2\alpha\left(\dfrac{\varrho}{a}\right)\right]^{3/2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sin^3\alpha}{a^2}\,. \tag{46}$$

In Gl. (46) kommt ϱ nur in der Verbindung $\frac{\varrho}{a}$ vor. Es sei abkürzend gesetzt:

$$\frac{\varrho}{a} = z \quad \text{und damit } d\varrho = a\,dz\,. \tag{47}$$

Für ein gut ausgeblendetes Strahlenbündel wird z schon für mässig grosse Werte von a klein werden. Man wird daher in Gl. (46) eine Reihenentwicklung nach z vornehmen, bei der Glieder höherer Ordnung als z^3 vernachlässigt werden sollen. Diese Reihenentwicklung behält für alle Punkte der Registrierlinie Gültigkeit, mit Ausnahme der ganz nahe am Durchstosspunkt mit dem Röntgenstrahl gelegenen.

Führt man die Entwicklung durch, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$g(\alpha, \omega, \varrho) = \frac{2\sqrt{2}\sin^3\alpha}{a^2}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3)\,, \tag{48}$$

welcher in Gl. (44) eingesetzt ergibt:

$$H_{(a)} = -n I_0 a \int\limits_{\alpha=\varphi}^{\alpha_0} \int\limits_{\omega=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{z_1} \psi(\gamma) \sin \alpha z\,(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3)\, d\alpha\, d\omega\, dz$$

$$\text{mit } z_1 = \frac{\Delta}{a}\,. \tag{49}$$

Um die Integration durchführen zu können, soll die Annahme gemacht werden:

$$\psi(\gamma) \cong \psi(\alpha)\,. \tag{50}$$

Damit macht man die Annäherung, dass für alle Volumenelemente eines Normalschnittes durch den Primärstrahl die Abweichung der Streufunktion vom Werte für den Strahlmittelpunkt klein angenommen wird. Da die Streufunktion einen stetigen Verlauf hat und ausserdem der Primärstrahl eng ist, wird der so gemachte Fehler klein sein. Die Vereinfachung ist umso mehr gestattet, als diese Rechnung den Einfluss der endlichen Strahldicke nur grössenordnungsmässig zu ergeben braucht.

Durch die Einführung von Gl. (50) in Gl. (49) kann die innerste Integration über z ausgeführt werden; sie liefert

$$H_{(a)} = -n I_0 a \int\limits_{\alpha=\varphi}^{\alpha_0} \int\limits_{\omega=0}^{2\pi} \psi(\alpha) \sin \alpha \left(\frac{a_0}{2} z_1^{\,2} + \frac{a_1}{3} z_1^{\,3} + \frac{a_2}{4} z_1^{\,4} + \frac{a_3}{5} z_1^{\,5} \right) d\alpha\, d\omega \tag{51}$$

mit den Koëffizienten:

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= 1 + \operatorname{cotg} \alpha \\
a_1 &= \cos\omega\,[3\sqrt{2}\sin^2\alpha\,(1 + \operatorname{cotg}\alpha) - \sqrt{2}] \\
a_2 &= -3\sin^2\alpha\,(1 + \operatorname{cotg}\alpha) + \cos^2\omega\,[-6\sin^2\alpha + 15\sin^4\alpha \\
&\quad (1 + \operatorname{cotg}\alpha)] \\
a_3 &= \cos\omega\,[3\sqrt{2}\sin^2\alpha - 15\sqrt{2}\sin^4\alpha\,(1 + \operatorname{cotg.}\alpha)] + \\
&\quad + \cos^3\omega\,[-15\sqrt{2}\sin^4\alpha + 35\sqrt{2}\sin^6\alpha\,(1 + \operatorname{cotg}\alpha)].
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Die Koëffizienten a_0 bis a_3 sind nach Potenzen von $\cos\omega$ geordnet. Man kann somit in Gl. (51) die Integration über ω durchführen. Dabei treten bestimmte Integrale folgender Form auf:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\,\omega = 2\,\pi \\
&\int_0^{2\pi} \cos\omega\, d\,\omega = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \cos^2\omega\, d\,\omega = \pi \\
&\int_0^{2\pi} \cos^3\omega\, d\,\omega = 0\ .
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Man kann also mit Rücksicht auf die darauffolgende Integration über ω alle Summanden des Gleichungssystems (52) weglassen, die $\cos\omega$ oder $\cos^3\omega$ als Faktor enthalten, und erhält:

$$H_{(a)} = -\,n\,I_0\,a\,\pi\,z_1^2 \int_{\alpha=\varphi}^{\alpha=\alpha_0} \psi(\alpha)\sin\alpha \Big\{(1+\operatorname{cotg}\alpha) + \\ + \frac{3}{4}\,z_1^2\,[5\sin^4\alpha\,(1+\operatorname{cotg}\alpha) - 2\sin^2\alpha\,(2+\operatorname{cotg}\alpha)]\Big\}\,d\alpha\,.$$

Multipliziert man $\sin\alpha$ in den Ausdruck der geschweiften Klammer und setzt für $z_1 = \frac{\Delta}{a}$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{a\cdot H_{(a)}}{n\,I_0\,(\pi\,\Delta^2)} = -\int_{\alpha=\varphi}^{\alpha=\alpha_0} \psi(\alpha)\Big\{(\sin\alpha+\cos\alpha) + \frac{3\,\Delta^2}{4}\,\frac{1}{a^2}\,[5\sin^4\alpha\,(\sin\alpha + \\ + \cos\alpha) - 2\sin^2\alpha\,(2\sin\alpha+\cos\alpha)]\Big\}\,d\alpha\,. \tag{54}$$

Die Grösse $(\pi\Delta^2)$ auf der linken Seite dieser Gleichung bedeutet den Querschnitt q des Primärstrahles.

Entsprechend der Rechnung bei unendlich dünnem Strahl soll jetzt Gl. (54) partiell nach α_0 differentiert werden. Zu diesem Zweck spaltet man das Integral der rechten Seite in die Teilintegrale der beiden Summanden in der geschweiften Klammer. Die Ableitung des ersten Summanden liefert wie früher

$$\psi(\alpha_0)\,(\sin\alpha_0 + \cos\alpha_0)\,. \tag{55}$$

Der zweite Summand lautet bis auf den konstanten Faktor $\frac{3\Delta^2}{4}$:

$$\frac{1}{a^2}\int\limits_{\alpha=\varphi}^{\alpha=\alpha_0} \psi(\alpha)\,[5\sin^4\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)-2\sin^2\alpha\,(2\sin\alpha+\cos\alpha)]\,d\alpha\,. \quad (56)$$

Da der Wert a eine Funktion von α_0 ist, muss der Ausdruck Gl. (56) bei der Ableitung nach α_0 als Produkt behandelt werden. Man erhält:

$$\frac{1}{a^2}\,\psi(\alpha_0)\,[5\sin^4\alpha_0\,(\sin\alpha_0+\cos\alpha_0)-2\sin^2\alpha_0\,(2\sin\alpha_0+\cos\alpha_0)]-$$
$$-\frac{2}{a^3}\,\frac{d\,a}{d\,\alpha_0}\int\limits_{\alpha=\varphi}^{\alpha=\alpha_0}\psi(\alpha)\,[5\sin^4\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)-$$
$$-2\sin^2\alpha\,(2\sin\alpha+\cos\alpha]\,d\alpha\,. \quad (57)$$

a kann aus Gl. (35) berechnet werden; für den speziellen Fall

$$\varphi=\frac{3\pi}{4}$$

ergibt sich:

$$a=\frac{c_1\cos\alpha_0+h\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0+\sin\alpha_0}\sqrt{2} \quad (58)$$

$$\frac{d\,a}{d\,\alpha_0}=\frac{\sqrt{2}\,(h-c_1)}{(\cos\alpha_0+\sin\alpha_0)^2}\,. \quad (59)$$

Das bestimmte Integral im zweiten Summanden des Ausdruckes Gl. (57) wäre lösbar, wenn man die Funktion $\psi(\alpha)$ kennen würde. Diese Funktion soll nun aber gerade berechnet werden. Nachdem — wie sich später zeigen wird — die Korrektur für die Berücksichtigung der endlichen Strahldicke recht klein wird, kann man in guter Annäherung in dem bestimmten Integral $\psi(\alpha)$ durch einen konstanten mittleren Wert ersetzen und vor das Integral ziehen. Man wird den wirklichen Verhältnissen nahe kommen, wenn man für diese Annäherung setzt:

$$\psi(\alpha)\sim\psi(\alpha_0)\,.$$

Damit wird das ausgeführte Integral in Gl. (57):

$$\psi(\alpha_0)\left\{\sin^5\alpha_0-\sin^4\alpha_0\cos\alpha_0-\frac{2}{3}\sin^3\alpha_0-\frac{1}{6\sqrt{2}}\right\}. \quad (60)$$

Unter Verwendung der Ausdrücke Gl. (54) bis (60) erhält man für die Ableitung von Gl. (54) nach α_0:

$$\frac{1}{n\,q\,I_0}\,\frac{\partial\,[a\cdot H_{(a)}]}{\partial\,\alpha_0} = -\,\psi\,(\alpha_0)\Big\{(\sin\alpha_0+\cos\alpha_0)+$$

$$+\,\frac{3}{4}\left(\frac{\varDelta}{a}\right)^2[5\sin^4\alpha_0\,(\sin\alpha_0+\cos\alpha_0)-2\sin^2\alpha_0\,(2\sin\alpha_0+\cos\alpha_0)]-$$

$$-\,\frac{3}{2\sqrt{2}\,a}\left(\frac{\varDelta}{a}\right)^2\frac{(h-c_1)}{(\cos\alpha_0+\sin\alpha_0)^2}\Big[\sin^5\alpha_0-\sin^4\alpha_0\cos\alpha_0-$$

$$-\,\frac{2}{3}\sin^3\alpha_0-\frac{1}{6\sqrt{2}}\Big]\Big\}\,. \tag{61}$$

Zum Vergleich sei die entsprechende Gl. (23) für den unendlich dünnen Strahl mit $\varphi=\frac{3\,\pi}{4}$ angeschrieben:

$$\frac{1}{n\,q\,I_0}\,\frac{\partial\,[a\cdot H_{(a)}]}{\partial\,\alpha_0} = -\,\psi\,(\alpha_0)\,(\sin\alpha_0+\cos\alpha_0)\,. \tag{62}$$

Man erkennt, dass Gl. (61) für den Grenzfall $\varDelta \longrightarrow 0$ in Gl. (62) übergeht. Um den Einfluss der endlichen Primärstrahldimensionen anschaulich zu zeigen, ist in Fig. 10 einerseits der erste

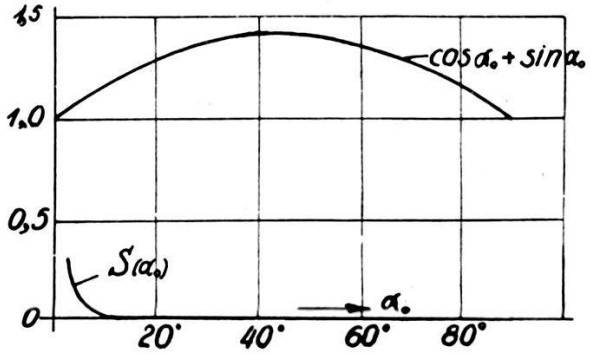

Fig. 10.

Summand $(\sin\alpha_0+\cos\alpha_0)$ als Funktion von α_0 aufgetragen, anderseits die beiden übrig bleibenden Summanden der geschweiften Klammer in Gl. (61). Sie stellen die Störung $S\,(\alpha_0)$ durch die endliche Strahlendicke dar. Der Wert von $\varDelta$ ist in der Rechnung als 0,2 cm angenommen mit Rücksicht auf die Divergenz des Strahlenbündels (Blendenradius 0,1 mm).

Fig. 10 zeigt, dass die Grösse der Störung $S\,(\alpha_0)$ im Ausdruck von ψ_0 Gl. (61) gegenüber dem Faktor in Gl. (62) schon

bei einem Streuwinkel von 10^0 unter zwei Prozent liegt und für grössere Werte α_0 rasch verschwindet. Dem Winkel $\alpha_0 = 10^0$ entspricht ein Plattenabstand a von ungefähr 15 Millimetern. Näher als 15 mm kann die Platte auch deswegen nicht zum Strahl gerückt werden, damit sie keine direkte Belichtung erhält.

Aus diesen Berechnungen ergibt sich, dass die Vernachlässigung der endlichen Strahldicke zulässig ist.

Die vierte Annahme, die gemacht wurde, um die Streufunktion in Form der Gl. (33) und (34) zu erhalten, bezog sich auf die Absorption der Primär- und Streustrahlen im Streugase selbst. Bei der bisherigen Berechnung wurde die Absorption vernachlässigt. Diese Annahme soll jetzt näher begründet werden.

Die Gleichung nach der die Röntgenstrahlen längs ihres Weges absorbiert werden, war schon in dem Einleitungsabschnitt als Gl. (2), § 1 abgeleitet worden. Wendet man diese Gleichung auf das vorliegende Problem an, so wird man folgendermassen vorgehen (die Rechnung soll für die Platte $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ausgeführt werden):

Die Intensität der einfallenden Röntgenstrahlen sei beim Eintritt in die Zerstreuungskammer I_0. Der Gesamtweg vom Eintrittsfenster bis zum Punkte A (Schnittpunkt Primärstrahl-Platte in Fig. 1) sei L. Betrachtet man eine Stelle x (von A aus gerechnet) des Primärstrahls, so ist der bis dorthin durch die einfallende Welle zurückgelegte Weg $(L—x)$. Die Primärintensität I_x an der Stelle x ist also nach Gl. (2), (§ 1):

$$I_x = I_0 \, e^{-\mu (L-x)}. \tag{63}$$

Diesen Wert I_x hat man an Stelle von I_0 in Gl. (6) einzusetzen. Von einem Volumenelement dV an der Stelle x (Fig. 2) geht nun Streustrahlung aus. Deren Intensität wird längs des Weges r um den Faktor $e^{-\mu r}$ geschwächt. Man erhält also die Helligkeit $dH(a)$ an einem Plattenpunkte a, wenn man den Ausdruck für $dH(a)$ ohne Berücksichtigung der Absorption in Gl. (6) mit diesem Faktor multipliziert:

$$d\,H_{(a)} = n\,q\,I_0\,e^{-\mu (L-x)}\,\psi(a)\,e^{-\mu r}\,\frac{\cos\delta}{r^2}\,dx =$$

$$= n\,q\,I_0\,e^{-\mu L}\,\psi(a)\,e^{\mu (x-r)}\,\frac{\cos\delta}{r^2}\,dx\,. \tag{64}$$

Die Grössen x, r, dx und $\cos\delta$ sind in Gl. (8), (9), (11) und (12)

als Abhängige von α berechnet. Setzt man sie in Gl. (64) ein, so ergibt sich:

$$\frac{d\,H_{(\alpha)}}{n\,q\,I_0\,e^{-\mu L}} = -\frac{\psi(\alpha)}{a}(\sin\alpha + \cos\alpha)\,e^{\mu\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)}{\sin\alpha}}\,d\alpha. \quad (65)$$

Den Absorptionskoëffizienten μ kann man durch den atomaren μ_a und die Atomzahl (bezw. Molekülzahl) n pro cm³ ausdrücken. Es ist definitionsgemäss

$$\mu = n\,\mu_a\,.$$

Wählt man den Gasdruck in der Kammer hinreichend klein, so kann man erreichen, dass n und damit μ so klein wird, dass die Exponentialfunktion in Gl. (65) durch ihre Reihenentwicklung angenähert werden darf, die mit dem linearen Glied abbricht. Es wird also aus Gl. (65) bei gleichzeitiger Integration:

$$\frac{a \cdot H_{(\alpha)}}{n\,q\,I_0\,e^{-\mu L}} =$$

$$= -\int_{\alpha=\frac{3\pi}{4}}^{\alpha=\alpha_0} \psi(\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)\left[1 + \frac{\mu\,a}{\sqrt{2}}\frac{(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)}{\sin\alpha}\right]d\alpha\,. \quad (66)$$

Gl. (66) zeigt einen analogen Aufbau wie Gl. (54). Das Integral besteht aus einem Summanden der nur α enthält und einem zweiten mit a und α. Differentiert man Gl. (66) nach α_0, so liefert der erste Summand:

$$\psi(\alpha_0)(\sin\alpha_0 + \cos\alpha_0) \quad (67)$$

und der zweite, abgesehen vom Faktor $\frac{\mu}{\sqrt{2}}$,

$$a\,\psi(\alpha_0)(\sin\alpha_0 + \cos\alpha_0)\frac{(\cos\alpha_0 + \sin\alpha_0 - 1)}{\sin\alpha_0} +$$

$$+ \frac{\partial a}{\partial \alpha_0}\int_{\alpha=\frac{3\pi}{4}}^{\alpha=\alpha_0} \psi(\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)\frac{(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)}{\sin\alpha}\,d\alpha\,. \quad (68)$$

Das Integral in Gl. (68) lässt sich bestimmen, wenn wir wie früher für $\psi(\alpha)$ den Annäherungswert $\psi(\alpha_0)$ setzen. Den Wert von a

und $\frac{\partial a}{\partial \alpha_0}$ kann man Gl. (58) und (59) entnehmen. Bei der Berechnung des Integrals führt man vorteilhaft den halben Winkel $\frac{\alpha}{2}$ ein und erhält aus Gl. (68):

$$\sqrt{2}\,\psi(\alpha_0)\left\{(c_1 \cos \alpha_0 + h \sin \alpha_0)\,\frac{(\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 - 1)}{\sin \alpha_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{(h - c_1)}{(\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0)^2}\,(2 \sin \alpha_0 - 2\,ln \cos \frac{\alpha_0}{2} - \alpha_0 - k)\right\}, \qquad (69)$$

wo

$$k = \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4} - 2\,ln \cos \frac{3\pi}{8} = 0{,}98\,.$$

Der Winkel α_0 durchläuft den Wertebereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Entwickelt man $\sin \alpha_0$ und $\cos \alpha_0$ für kleine Winkel α_0 nach Potenzen von α_0, so erkennt man, dass für $\alpha_0 = 0$ der Faktor

$$\left[\frac{\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 - 1}{\sin \alpha_0}\right]_{\alpha_0 = 0} = 1$$

wird.

Der Klammerausdruck in Gl. (69) verhält sich also für das fragliche Gebiet von α_0 regulär.

Durch Einfügen der erhaltenen Werte Gl. (67) bis (69) in Gl. (66) findet man:

$$\frac{1}{n\,q\,I_0\,e^{-\mu L}}\,\frac{\partial\,[a \cdot H_{(a)}]}{\partial\,\alpha_0} = -\,\psi(\alpha_0)\left\{(\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0) + \right.$$

$$+ \mu\left[(c_1 \cos \alpha_0 + h \sin \alpha_0)\,\frac{(\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 - 1)}{\sin \alpha_0} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{(h - c_1)}{(\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0)^2}\,(2 \sin \alpha_0 - 2\,ln \cos \frac{\alpha_0}{2} - \alpha_0 - 0{,}98)\right]\right\}. \qquad (70)$$

Setzt man für den Ausdruck der eckigen Klammer abkürzend $f(\alpha_0)$, so ergibt sich schliesslich:

$$\psi(\alpha_0) = \frac{-1}{n\,q\,I_0\,e^{-\mu L}}\,\frac{1}{[(\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 + \mu\,f_{(\alpha_0)}]}\,\frac{\partial\,[a \cdot H_{(a)}]}{\partial\,\alpha_0}\,. \qquad (71)$$

Für den besonderen Wert $\mu = 0$ geht Gl. (71) in den alten Wert ohne Absorption nach Gl. (62) über.

In Fig. 11 wurde die Grösse $\mu f(\alpha_0)$ als Funktion von α_0 aufgetragen. Der verwendete Wert $\mu = 0{,}012$ entspricht dem Absorptionskoëffizienten der Cu_α-Strahlung in Argon vom Drucke $p = 42$ mm Hg. Im gleichen Masstab ist auch $(\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0)$ aufgezeichnet. Man erkennt, dass in dem gerechneten Beispiel die Störung durch Absorption im Mittel etwa 3% beträgt.

Dieser Absorptionseinfluss kann aber beliebig klein gemacht werden, wenn die verwendeten Gasdrucke entsprechend ver-

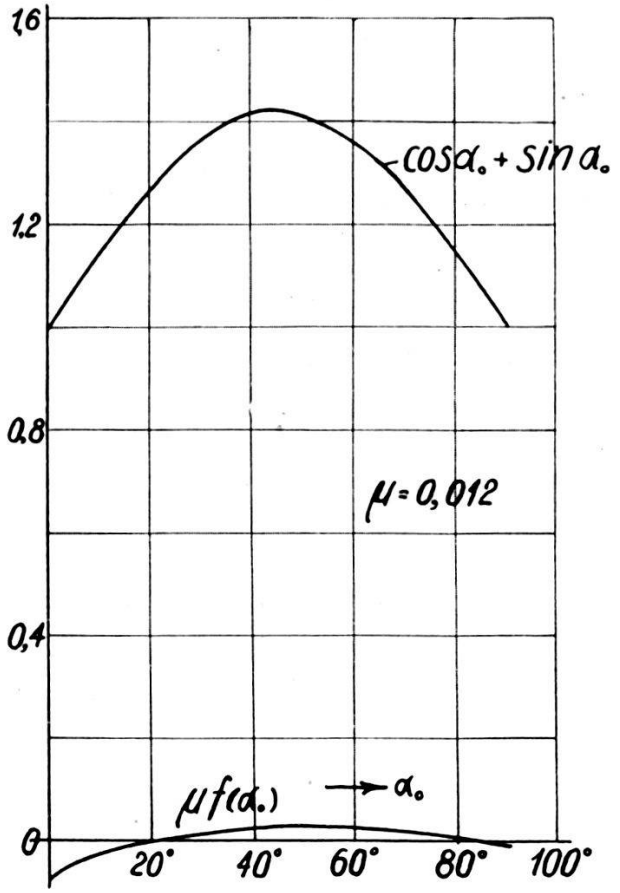

Fig. 11.

ringert werden. Eine Grenze für die Druckverringerung setzt das gleichzeitige Abnehmen der Gesamtintensität der Streustrahlung.

Mit der Ausführung dieser Absorptionsrechnung ist die Berechtigung der vierten Rechnungsannahme sichergestellt.

Gleichzeitig ist aber auch die zweite Annahme über die Vernachlässigung der sekundären und höheren Streustrahlung begründet. Nach dem Energieprinzip kann nämlich nur solche Energie als höhere Streustrahlung auftreten, die von der Energie der primären Streustrahlung absorbiert wurde. Von dieser Absorption wurde aber oben gezeigt, dass sie unter geeigneten Versuchs-

bedingungen klein gemacht werden kann. Das gleiche gilt also auch von der Streuung höherer Ordnung.

Den Einfluss der Absorption oder der wiederholten Streuung kann man sich qualitativ auch folgendermassen anschaulich überlegen: die gesamte, nach allen Richtungen primär gestreute Energie E_{s1} wird (abgesehen von den Interferenzerscheinungen) proportional der Primärenergie E_p und einem Volumenfaktor k_{s1} sein, der von der Grösse und Form des streuenden Gasstrahles abhängt. Sie ist ferner der Atomzahl pro cm³ oder anders gesagt dem Gasdruck p verhältnisgleich; also

$$E_{s1} = k_{s1} E_p p \,. \tag{72}$$

Wird nun diese Energie E_{s1} zum zweiten Male gestreut, aber diesmal im Gesamtvolumen der ganzen Kamera, so bleibt der Streumechanismus derselbe. An Stelle von E_p tritt jetzt E_{s1} und an Stelle von k_{s1} der neue Volumenfaktor k_{s2}. Die sekundär gestreute Energie wird also:

$$E_{s2} = k_{s2} E_{s1} p = k_{s1} k_{s2} E_p p^2 \,. \tag{73}$$

Man erkennt also, dass E_{s2} dem Quadrate des Druckes proportional ist, während E_{s1} linear mit p zusammenhängt. *Bei abnehmendem Drucke kann man demnach zu Werten kommen, wo die sekundär gestreute Energie gegenüber der primär gestreuten vernachlässigbar klein wird.*

Schliesslich bleibt noch der Beweis für die Gültigkeit der dritten Annahme, nach der die Streuung durch die Blenden und Fenster vernachlässigbar sein soll. Hierüber wurde schon früher bei der Besprechung der Konstruktion der Blenden Mitteilung gemacht. Die Berechtigung der Annahme wird vollauf durch die später wiedergegebenen Photometrierungen der Leeraufnahmen ($p = 0$) gezeigt.

§ 6. *Die Ergebnisse.*

Die bisherigen Messungen wurden an Argon ausgeführt. Für diese Wahl waren mehrere Gründe bestimmend. Es sollte, um die Intensitätsschwierigkeiten gering zu halten, kein zu leichtes Atom verwendet werden. Anderseits würde die Verwendung eines schweren Dampfes oder Gases deswegen die Versuchsbedingungen erschweren, weil die Absorption der Röntgenstrahlen mit der dritten Potenz der Ordnungszahl anwächst. Bei dem einatomigen Argon sind ferner selbsttätig Interferenzen zwischen

Atomen eines Moleküls ausgeschaltet. Die gemessene Intensität der Streustrahlung stellt also, auf kleine Gasdrucke extrapoliert, die Strahlung des einzelnen Atoms dar, die charakteristisch ist für die Elektronenanordnung im Atom. Durch die Wahl von Argon sollte weiter erreicht werden, dass die Compton-Strahlung gegenüber der Streuung der unverschobenen Linie nicht zu stark auftritt.

Aus dem gleichen Grunde wurde zur Bestrahlung die Cu_α-Linie verwendet. Sie wurde von einer Hadding-Röntgenröhre mit Kupfer-Antikathode geliefert. Die Röhre war mit 35 Kilovolt Spannung und 10 Milliampère Stromstärke betrieben. Das Röntgenlicht wurde durch eine Nickelfolie so gefiltert, dass die Intensität der Cu_α-Linie noch 60%, die der Cu_β-Linie dagegen nur 7% ihrer Werte vor dem Filter betrug. Die Strahlung kann also angenähert als homogen betrachtet werden.

Da die einstrahlende Wellenlänge kürzer ist als die Absorptionskante des Argons, musste mit dem Auftreten der charakteristischen Argonstrahlung von ungefähr 4 Å.-E. gerechnet werden. Um darüber Anhaltspunkte zu gewinnen, wurde bei einer Aufnahme eine Platte verwendet, die in Aluminiumfolie eingepackt war. Die Folie war so gefaltet, dass die Platte an verschiedenen Stellen mit Aluminiumstärken von 0,01 bis 0,05 mm bedeckt war. Die Schwärzung wurde ausphotometriert und aus dem für Aluminium bekannten Absorptionskoëffizienten die Wellenlänge der schwärzenden Strahlung bestimmt. Es zeigte sich, dass ohne Filter sehr starke Fluoreszenzstrahlung wirkt. Mit 0,02 mm Aluminium konnte jedoch diese störende Strahlung auf praktisch vernachlässigbare Werte absorbiert werden. Die Aufnahmen, von denen weiter berichtet wird, wurden demnach sämtliche mit Platten durchgeführt, die in 0,02 mm Aluminium eingeschlagen waren. Eine Kontrollaufnahme mit 0,04 mm Aluminiumfilter zeigte keine anderen Resultate, womit bewiesen war, dass die verwendeten Filter genügten.

Die Anordnung der Platten bringt den Nachteil mit sich, dass für kleine Werte a (Abstand vom Primärstrahldurchstosspunkt mit der Platte) die Schwärzungen stark werden, während für grosse a nur schwache Schwärzungen auftreten. Will man diese geringen Intensitäten gegenüber dem stets vorhandenen Plattenschleier noch gross erhalten, so muss man zu langen Expositionszeiten übergehen. Damit wird aber die Schwärzung am Plattenanfang so stark, dass dort die Photometrierung versagt, da die absolute Schwärzung die Einheit nicht überschreiten soll. Es wurde daher die gleiche Aufnahme zweimal mit verschiedenen

Belichtungszeiten ausgeführt. Von jeder Platte wurde dann nur der günstige Teil verwendet.

Fig. 12 stellt die Reproduktion der Photometerkurve einer Argonaufnahme bei 93 mm Druck (Q.S.) und 7 Stunden Belichtung dar. Am Rande der Platte sind mit Zahlen Helligkeits-

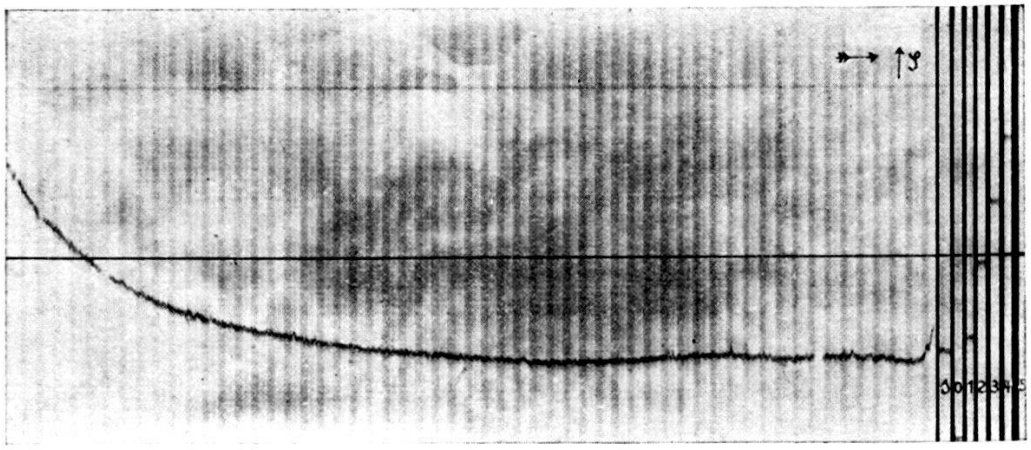

Fig. 12.

marken angegeben, deren absolute Schwärzung bekannt ist. Mit Hilfe dieser Marken wurde die Schwärzungskurve auf absolute Intensitätswerte H' umgerechnet und in Fig. 13 über a aufgetragen. An einer Stelle der Platte wurde die Schleierschwärzung

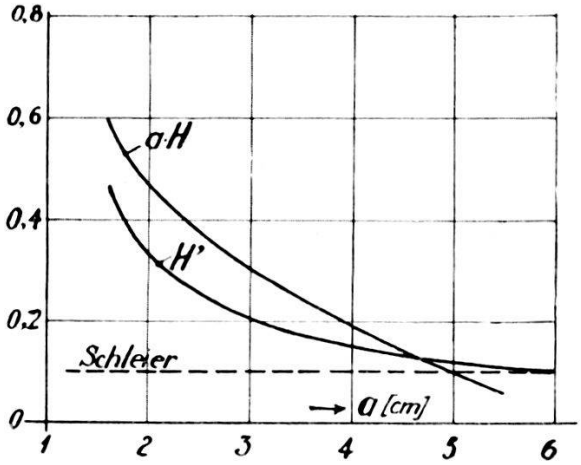

Fig. 13.

gemessen; sie ist vor den Marken in Fig. 12 mit s bezeichnet und in Fig. 13 als Parallele zur Abszissenachse eingetragen. Die eigentliche Schwärzung H wird durch die Differenz der H'-Werte und dem Schleier dargestellt. Nach Gl. (33) sind diese Intensitäten mit dem zugehörigen Abstand a zu multiplizieren. Man

erhält so in Fig. 13 die Kurve $a \cdot H$. Diese Werte trägt man über den Winkeln α_0 auf, die man nach Gl. (35) aus den a-Werten berechnen kann. Schliesslich zeichnet man Tangenten an die $a \cdot H$-Kurve und bestimmt deren Neigungswinkel, also die Grösse $\frac{\partial (a \cdot H)}{\partial \alpha_0}$. Bildet man das Produkt von $\frac{\partial (a \cdot H)}{\partial \alpha_0}$ und $\frac{1}{\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0}$, so

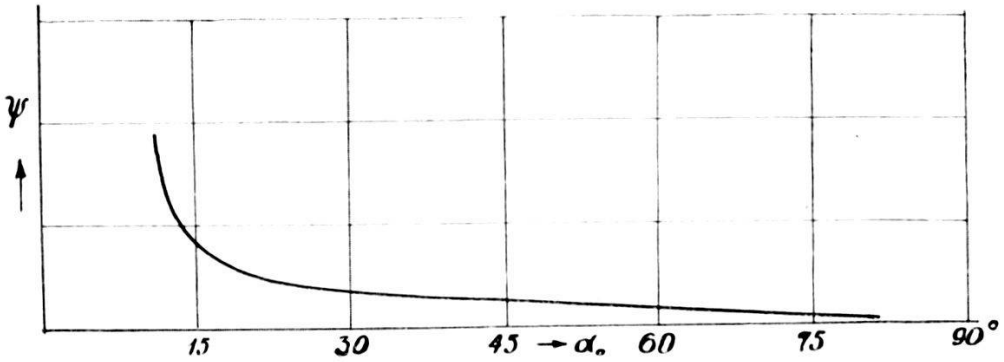

Fig. 14.

erhält man bis auf konstante Faktoren die gesuchten ψ-Werte. (Fig. 14.)

Fig. 15a und b veranschaulichen die Photometerkurven für eine Leeraufnahme (evakuierte Kamera) bei 26stündiger

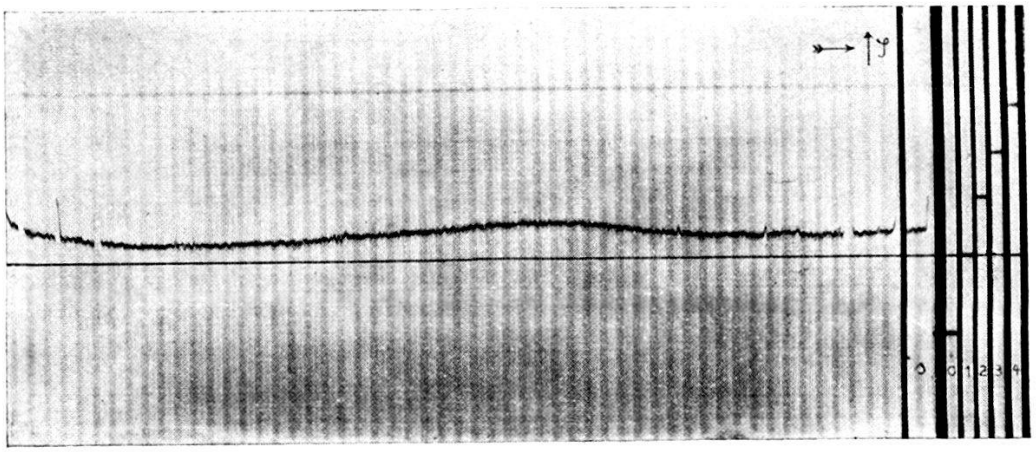

Fig. 15a.

Belichtung. Bild 15a entspricht den Streuwinkeln von 0° bis 90°, Aufnahme 15b von 90° bis 180°. Aus der Marke für die Schleierschwärzung erkennt man, dass die Photometerkurve in engen Grenzen um diese Schleierschwärzung schwankt. Am Rande der Platten ist ein kleiner Intensitätsanstieg. Er lässt sich durch

den stets vorhandenen Randschleier erklären, der auch bei unbelichteten Platten nicht ganz zu vermeiden ist. Es kann also festgestellt werden, dass die Leeraufnahmen so gut sind, dass eine Korrektur der Gasaufnahmen nicht notwendig erscheint.

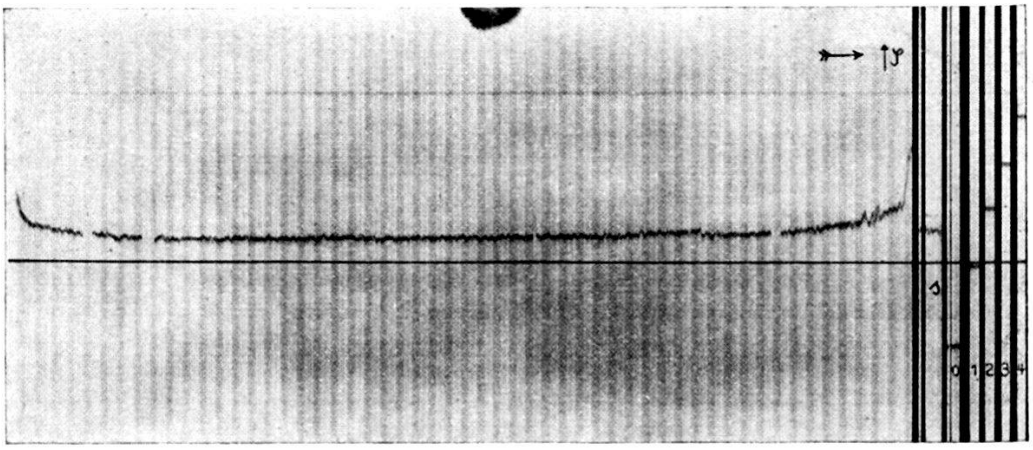

Fig. 15b.

In Fig. 16 ist die zu Fig. 12 entsprechende Aufnahme dargestellt, bei der die Belichtungszeit 65 Stunden betrug. Der Argondruck war wieder 93 mm Q.S. Die Kurve wird entsprechend umgerechnet, wie das oben angegeben wurde. Die erhaltenen

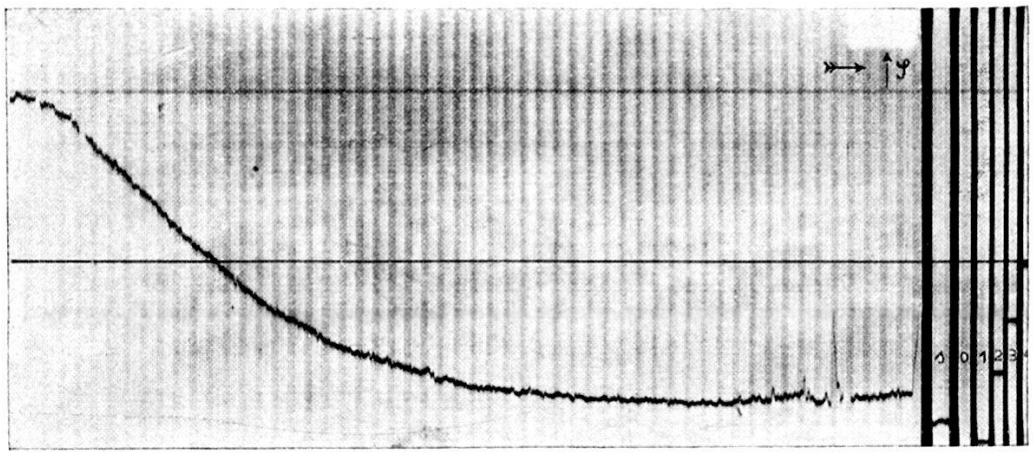

Fig. 16.

ψ-Werte wurden so verkleinert, dass bei $a_0 = 50^0$ Übereinstimmung mit dem Wert der kurzbelichteten Aufnahme eintrat, und die Kurve in Fig. 14 eingetragen. Diese Abbildung stellt also für die Winkel bis 50^0 die Ergebnisse der 7stündigen, über 50^0 die der 65stündigen Aufnahme dar.

Die entsprechenden ψ-Werte der beiden zweiten Platten für die Winkel über 90° sind in Fig. 17 eingezeichnet. Merkwürdigerweise zeigte sich über 150° wieder ein Abfallen der ψ-Kurve, das allerdings noch fraglich erscheint. Dieser Teil der Kurve wurde daher nur punktiert eingetragen. Wegen der besseren Deutlich-

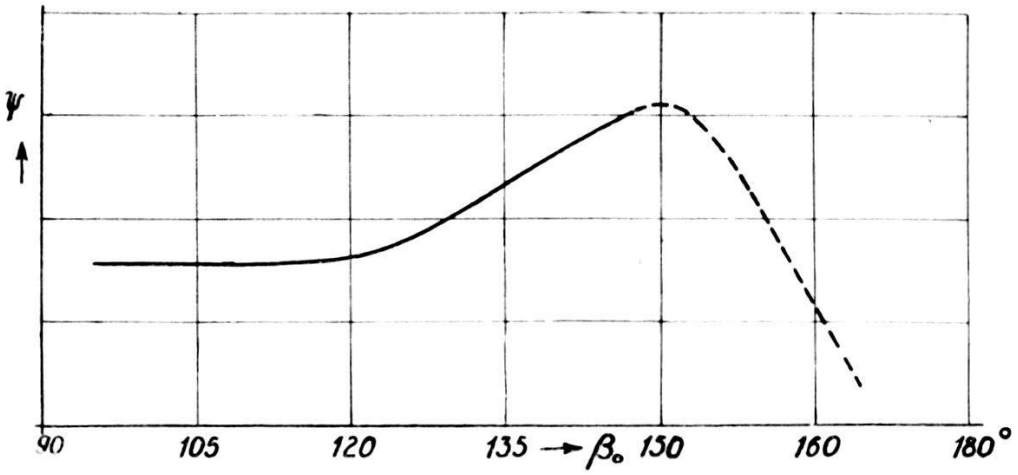

Fig. 17.

keit ist der Ordinatenmasstab in Fig. 17 grösser gewählt als in Fig. 14.

Um die beiden Kurven 14 und 17 zu einer zu vereinen, wurden die ψ-Kurven beider Darstellungen bis 90° extrapoliert. Ver-

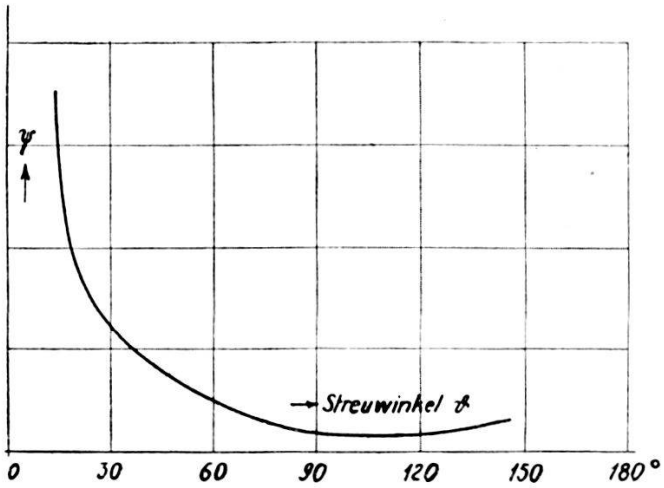

Fig. 18.

mindert man dann den Masstab in Fig. 17 so, dass die extrapolierten Werte gleich werden, so erhält man schliesslich eine einheitliche ψ-Kurve für den ganzen Winkelbereich (Fig. 18).

Ein direkter Vergleich der gefundenen Werte mit den Messungen von Barett ist wegen des starken Unterschiedes in der

Primärwellenlänge nicht möglich. Jedoch besteht insofern Übereinstimmung, als die F-Funktion einen flachen Verlauf ohne Maxima und Minima zeigt.

Bei der Berechnung der ψ-Werte wurde der Polarisationsfaktor $1 + \cos^2 \delta$ (s. Einleitung) nicht gesondert eingeführt. Will

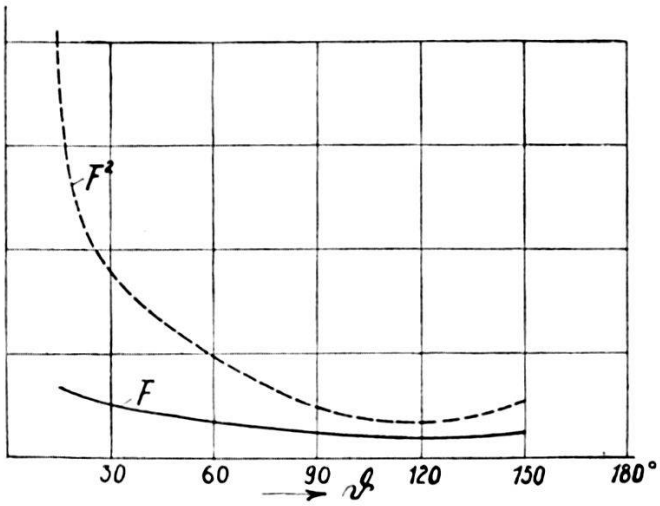

Fig. 19.

man daher zu der üblichen Darstellungsweise der Streuung gelangen, so hat man die ψ-Werte durch die entsprechenden Grössen des Polarisationsfaktors zu teilen. Man erhält so die Streuintensität, die — entsprechend den Messungen an Kristallen — mit F^2 bezeichnet sei. Die Streuamplitude F ergibt sich daraus

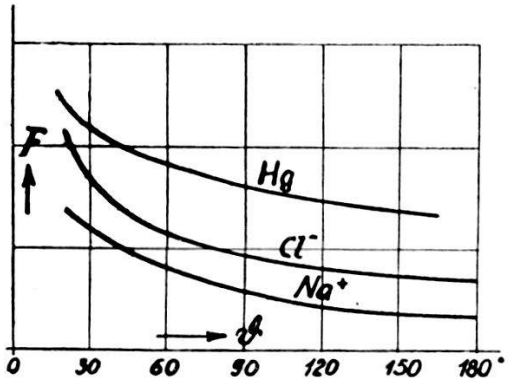

Fig. 20.

durch Wurzelausziehen. Beide Kurven sind (in verschiedenem Masstab) in Fig. 19 eingezeichnet.

Zum Vergleich mit den eigenen Messungen sind in Fig. 20 der Arbeit von Scherrer und Stäger die F-Kurve für Hg und die F-Kurven nach James und Firth für Cl^- und Na^+ entnommen. Ein Vergleich mit Fig. 19 zeigt die Ähnlichkeit des Verlaufs der

F-Kurven, trotzdem zwei derselben durch Reflexion an Kristallen gewonnen wurden.

Es mag noch erwähnt werden, dass beabsichtigt ist, die Kamera so abzuändern, dass der jetzt feste Plattenwinkel veränderlich wird. Man kann so für die Intensitätsbestimmung der grossen a-Werte die Platten näher an den Strahl stellen, wodurch die Flächenhelligkeit grösser, die Belichtungszeit also kleiner wird.

Herrn Prof. Dr. Scherrer möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für sein stetes Interesse am Fortgang derselben und seine wertvolle Unterstützung und Ratschläge auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.