Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 3 (1930)
Heft: I

Artikel: Die graphischen Methoden der Bewegungslehre (Kinematik). I. Teil
Autor: Brandenberger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-109798

Die graphischen Methoden der Bewegungslehre (Kinematik)[1]

von Dr. Ing. **H. Brandenberger**, Zürich.

(21. I. 30.)

Inhalt: Die Bewegungslehre (Kinematik) führt, soferne sie den Weg eines Punktes oder die Hüllbahn einer Kurve untersucht zur Geometrie, soweit sie die bei einer Bewegung auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen feststellt, zur Mechanik. Zunächst werden die Bahnen und Bewegungen mit Hilfe der Geschwindigkeiten und ersten Beschleunigungen untersucht. Dann werden systematisch die vektoriellen Beziehungsgleichungen zwischen den Evoluten der Punkt-, Hüll- und Wälzpolbahnen einerseits, und den höheren Punkt-, Polwechsel- und Winkelbeschleunigungen andererseits abgeleitet. An verschiedenen Problemen der Bewegungslehre wird gezeigt, wie die vektoriellen Beziehungsgleichungen sowohl eine rechnerische als auch eine graphische Lösung der Aufgaben ermöglichen. Alle in der Abhandlung vorkommenden Grössen sind Vektoren, so dass sich eine besondere Schreibweise dafür erübrigt.

I. TEIL.

Die Geschwindigkeitsverhältnisse.

Kennt man von einer Kurve die Konstruktion eines Punktes, so kann man durch Heranziehen der Geschwindigkeiten der Konstruktionsgeraden die Tangente an die Kurve konstruieren. Fig. 1 zeigt die Anwendung dieses Satzes auf die Konstruktion der Kurve $z = \frac{y}{x} \cdot a$, falls $y = f(x)$ als Kurve gegeben ist. Das Aufsuchen eines Punktes A' der Kurve z aus einem Punkte A der Kurve y ist in Fig. 1. dargestellt.

Erteilt man dem Punkte A der Kurve $y = f(x)$ eine Geschwindigkeit v_A, dann dreht sich der Strahl $0A$ mit der Winkelgeschwindigkeit $w = \operatorname{tg} \delta$, wobei die Komponente $v_A^{\perp 0A} = 0A \cdot \operatorname{tg} \delta$ ist. Der Punkt B bewegt sich auf der Geraden $x = a$ mit einer Geschwindigkeit v_B, wobei die Komponente $v_B^{\perp 0B} = 0B \cdot \operatorname{tg} \delta$. Da AA' und BA' bei der Bewegung des Punktes A nur Parallelverschiebungen ausführen, sind die, in die x bezw. y Richtung fallenden Komponenten v_A^x bezw. v_B^y der Punkte A bezw. B, mit den in diese Richtung fallenden Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes A' gleich, so dass $v_A^x = v_A'^x$ und $v_B^y =$

---

[1]) Teilweise Erweiterung nach meiner Vorlesung über Getriebelehre an der Eidg. Techn. Hochschule, Zürich.

$v_A{}'^{y} \cdot v_{C'}$ ist die Tangente an die Kurve z im Punkte $C = C'$ für $x = a$.

Dem obigen Satz lässt sich ein dualer gegenüber stellen: Kennt man von eine Kurve die Konstruktion einer Tangente, so kann man mit Hilfe der Geschwindigkeitsverhältnisse der Kon-

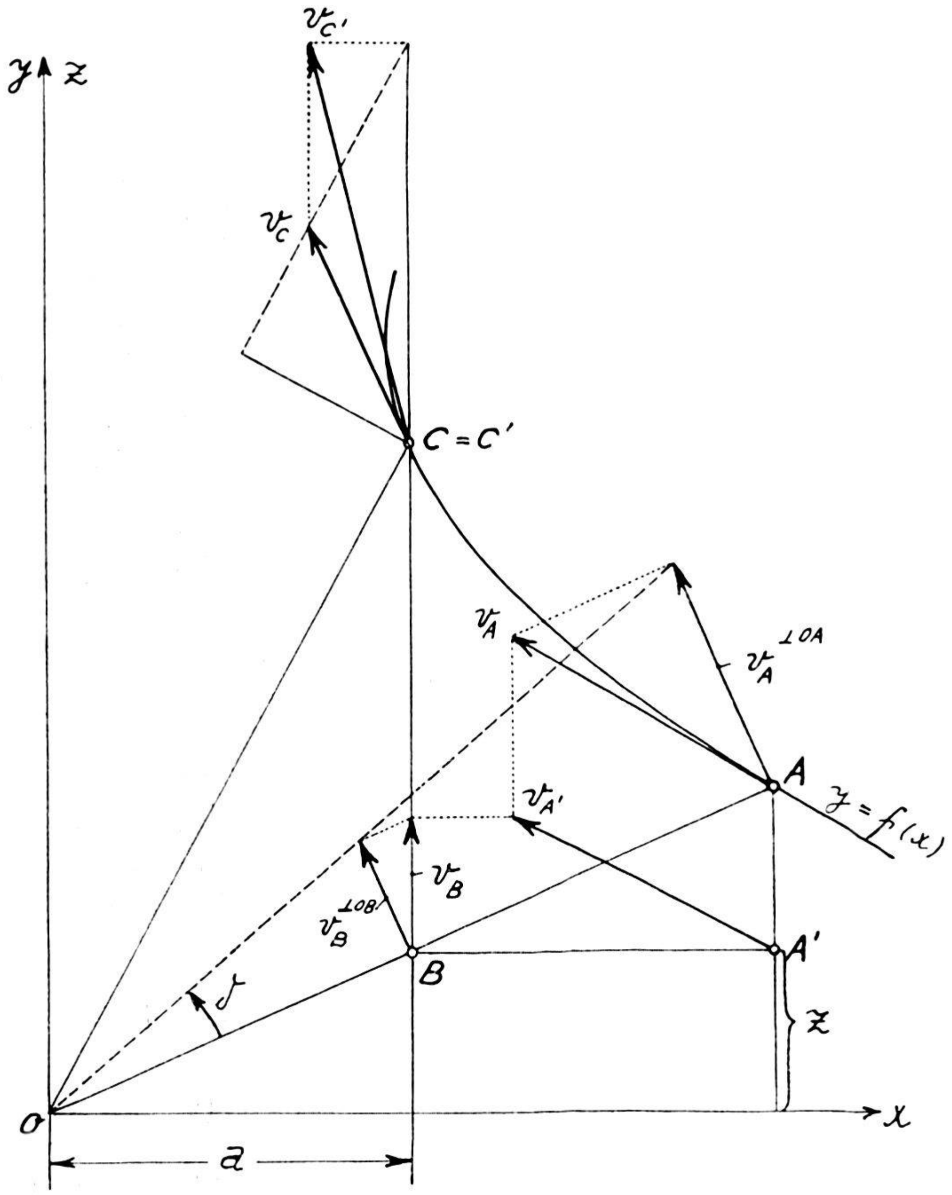

Fig. 1.

struktionsgeraden auch den Berührungspunkt an die Kurve konstruieren. Der Berührungspunkt ergibt sich als Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Lagen der Tangente als derjenige Punkt der Geraden, dessen Geschwindigkeit senkrecht zur Geraden Null ist (Gleitpunkt).

Durch die Anwendung der Geschwindigkeitsverhältnisse auf ein Gebilde kann man also stets eine weitere unendlich benachbarte Lage bestimmen. Da die Bobillier'sche Konstruktion gestattet, die dreipunktigen Lagen der Punkte eines bewegten starren Systems durch eine einfache Lagenbeziehung anzugeben, ist es möglich, durch die Anwendung der Geschwindigkeitsverhältnisse auf die Konstruktionsgeraden der Bobillier'schen Konstruktion die vierpunktigen Lagen der Punkte eines bewegten starren Systems zu erfassen.

Wir wollen eine diesbezügliche Aufgabe stellen und zur Lösung bringen. Zwei Kurven eines bewegten ebenen Systems

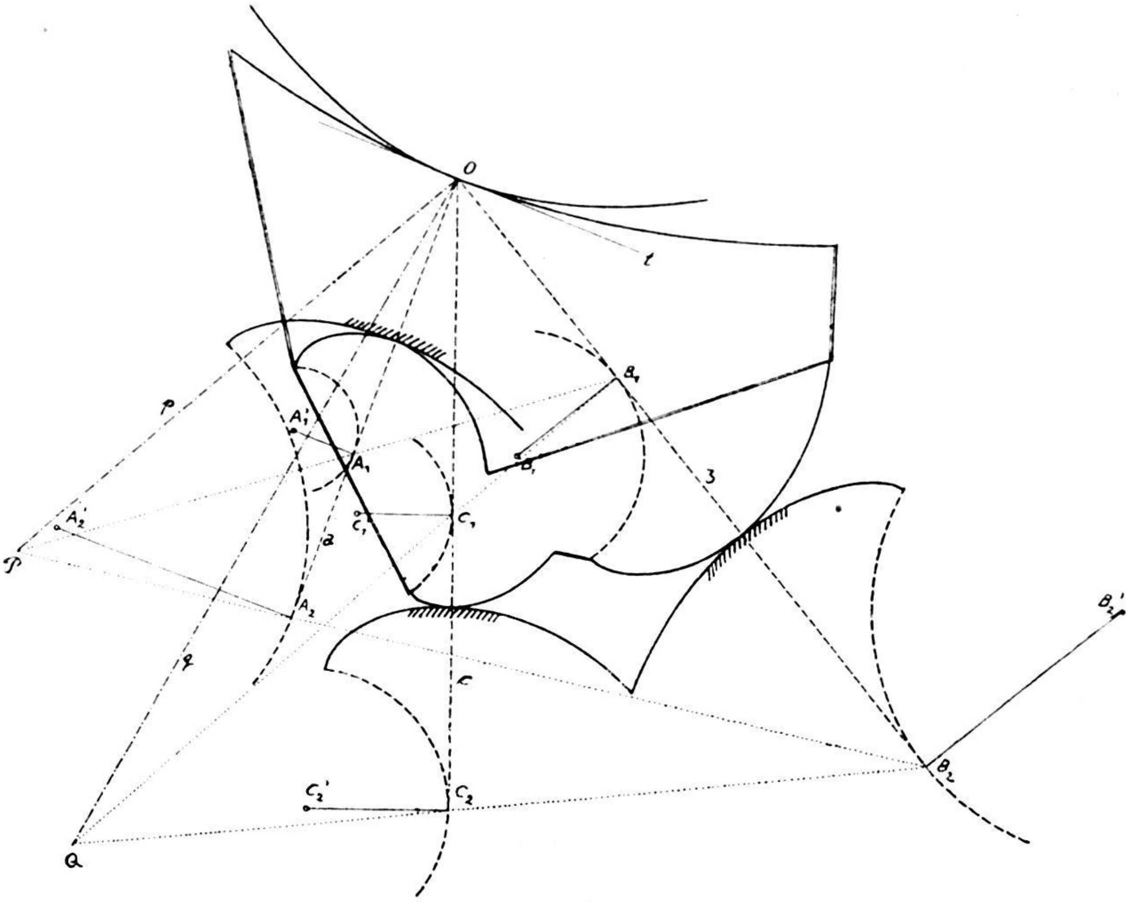

Fig. 2.

mit den Krümmungsmittelpunkten A_1 bezw. B_1 (Fig. 2) und den Krümmungsmittelpunkten A_1' bezw. B_1' ihrer Evoluten gleiten auf festen Kurven (A_2, A_2') bezw. (B_2, B_2'). Für eine Kurve (C_1, C_1') des bewegten Systems ist die Hüllbahn (C_2, C_2') aufzusuchen.[2])

Die mit den Krümmungsmittelpunkten A_1, B_1, C_1 zusammenfallenden Systempunkte beschreiben Bahnen, deren Krümmungsmittelpunkte in die Krümmungsmittelpunkte A_2, B_2, C_2 der Hüllbahnen fallen. Bezeichnen wir die Kollineationsachse, die sich als Verbindungsgerade des Schnittpunktes P der Geraden A_1—B_1

[2]) Diese Aufgabe wird im III. Teil auch noch mit Hilfe der höheren Savary'schen Gleichungen gelöst.

und A_2—B_2 mit dem Momentanpol 0 ergibt, mit p, die Kollineationsachse, die sich als Verbindungsgerade des Schnittpunktes Q der Geraden C_1—B_1 und B_2—C_2 mit dem Momentanpol 0 ergibt, (wobei der Punkt C_2 noch unbekannt ist) mit q, ferner die Normalstrahlen A_1—A_2, B_1—B_2, C_1—C_2 der Reihe nach mit a, b, c, so ergibt sich aus der Folgerung des Bobillier'schen Satzes, dass Winkel pq gleich ist Winkel ac. Daraus lässt sich unmittelbar der Krümmungsmittelpunkt C_2 der zu suchenden Hüllbahn aufsuchen.

Erteilt man dem beweglichen System eine Geschwindigkeit (Fig. 3), so muss die eben besprochene Lagenbeziehung der Krüm-

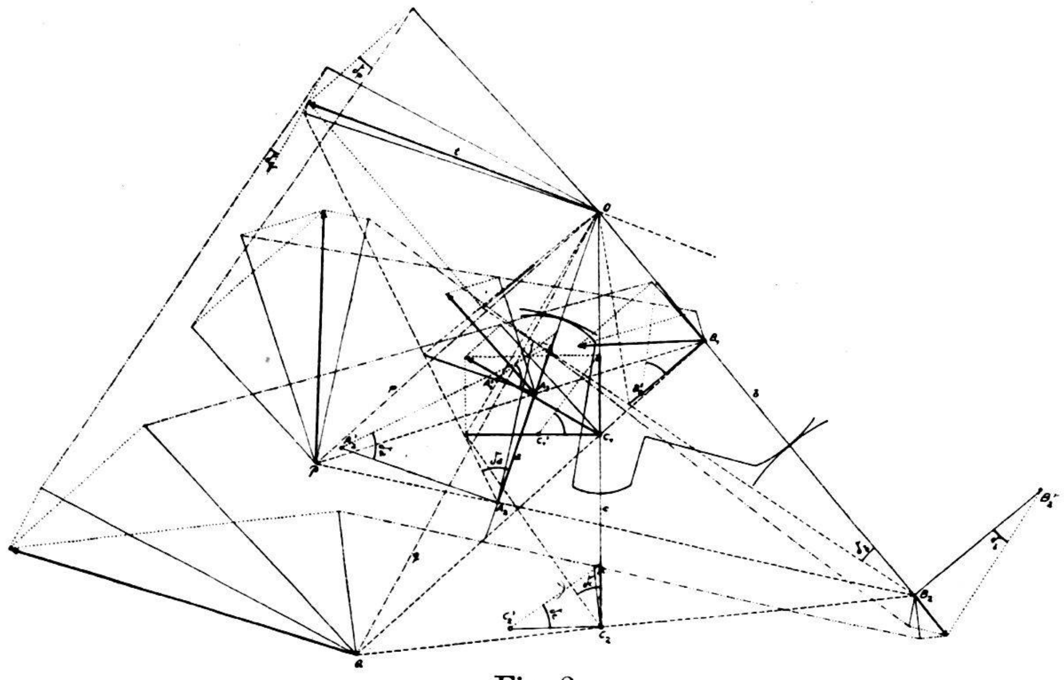

Fig. 3.

mungsmittelpunkte der bewegten Kurven und der ihrer Hüllbahnen erhalten bleiben. Denkt man sich die Geraden a, b, c mit den Berührungspunkten der aufeinander gleitenden Kurven fest verbunden, dann rollen diese Geraden auf den Evoluten der festen Hüllbahnen bei A_2, B_2, C_2 ab (Fig. 2). Der Momentanpol 0 ergibt sich stets als Schnittpunkt der Geraden a und b, so dass durch die Bewegung dieser Geraden die feste Polbahn erzeugt wird.

Die Evoluten des bewegten Systems rollen bei A_1, B_1, C_1 auf den Geraden a, b, c ab, wodurch die Punkte A_1, B_1, C_1 als Krümmungsmittelpunkte der jeweiligen Berührungspunkte beider Kurven (Punkte der Bobillier'schen Konstruktion) eine Bewegung ausführen, welche sich zusammensetzt aus der Bewegung der mit A_1, B_1, C_1 zusammenfallenden Punkten der Geraden a, b, c und einer Bewegung der Evoluten auf diesen Geraden. Die mit A_1, B_1, C_1 zusammenfallenden Punkte des bewegten Systems haben senkrecht zu den Geraden a, b, c die gleichen Geschwindigkeitskomponenten wie die Punkte A_1, B_1, C_1 als Punkte der Bobillier'schen Konstruktion bezw. der Geraden a, b, c. Durch Gleichsetzen dieser zu a und b senkrecht stehenden Komponenten der Geschwindigkeiten der Punkte A_1 bezw. B_1, kann man nach Annahme der Winkelgeschwindigkeit $w = \mathrm{tg}\,\vartheta$ des bewegten Systems, die Winkelgeschwindigkeiten $w_a = \mathrm{tg}\,\delta_a$ und $w_b = \mathrm{tg}\,\delta_b$ der Strahlen a und b bestimmen.

Es ist (siehe Fig. 3) $0A_1 \cdot \mathrm{tg}\,\delta = A_2A_1 \cdot \mathrm{tg}\,\delta_a$ und $0B_1 \cdot \mathrm{tg}\,\delta = B_2B_1 \cdot \mathrm{tg}\,\delta_b$. Die Geschwindigkeit v_0 des Punktes 0 ergibt sich aus $v_0^{\perp a} = A_2 0 \cdot \mathrm{tg}\,\delta_a$ und $v_0^{\perp b} = B_2 0 \cdot \mathrm{tg}\,\delta_b$. Die Winkelgeschwin-

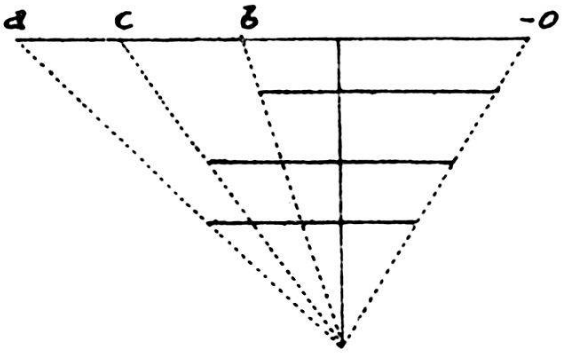

Fig. 4.

digkeit, mit welcher sich die Geraden a, b, c auf den Evoluten bei A_1, B_1, C_1 abrollen, ergibt sich als Differenz der Winkelgeschwindigkeiten der Strahlen a, b, c und des Systems. Da diese Winkelgeschwindigkeiten verschiedene Vorzeichen haben, so sind ihre absoluten Werte zu addieren. (Siehe Fig. 4.)

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Gerade a auf der Evolute bei A_1 abrollt, ergibt sich aus

$$v_{A_1}{}^a = A_1'A_1 \cdot (\mathrm{tg}\,\delta_a - \mathrm{tg}\,\delta)\,.$$

Ebenso ist

$$v_{B_1}{}^b = B_1'B_1 \cdot (\mathrm{tg}\,\delta_b - \mathrm{tg}\,\delta)$$

und

$$v_{C_1}{}^c = C_1'C_1 \cdot (\mathrm{tg}\,\delta_c - \mathrm{tg}\,\delta)\,.$$

Die Punkte A_2, B_2, C_2 als Punkte der Bobillier'schen Konstruktion bewegen sich infolge der Abrollung der Geraden a, b, c auf den Evoluten der Hüllbahnen. Man erhält ihre Geschwindigkeiten aus:

$$v_{A_2} = A_2'A_2 \cdot \mathrm{tg}\,\delta_a\,, \quad v_{B_2} = B_2'B_2 \cdot \mathrm{tg}\,\delta_b\,, \quad v_{C_2} = C_2'C_2 \cdot \mathrm{tg}\,\delta_c\,.$$