Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 3 (1930)
Heft: II

Artikel: Die graphischen Methoden der Bewegungslehre (Kinematik). II. Teil
Autor: Brandenberger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-109800

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die graphischen Methoden der Bewegungslehre (Kinematik)

von Dr. Ing. **H. Brandenberger**, Zürich.

(21. I. 30.)

II. TEIL.

Die höheren Beschleunigungen.

a) Die vektoriellen Beziehungen zwischen den Beschleunigungen und den Krümmungen der Bahn eines eben bewegten Punktes.

Die Differentialrechnung nimmt an, dass die Differentiale der unabhängig Variabeln (dt) einander gleich und konstant sind, während die Differentiale der abhängig Variabeln (ds_1, $ds_2 = ds_1 + d^2s$) in den aufeinanderfolgenden gleichen Zeitelementen sich voneinander unterscheiden. In den nachfolgenden Ableitungen wird von dieser Eigenschaft in weitgehendem Masse Gebrauch gemacht.

Wir definieren die Bahnnormale in den einzelnen Lagen eines bewegten Punktes als die Senkrechte auf das vorangehende Wegelement, so dass man aus den Lagen A, A_1, A_2, ... der Bahn des Punktes, Fig. 8, die Lagen A', A_1', A_2', ... als Punkte der ersten Evolute der Kurve, daraus die Punkte A'', A_1'', A_2'', ... der zweiten Evolute usw. bestimmen kann. Stets bestimmen n Lagen eines Punktes, $n-1$ Lagen auf der ersten Evolute, $n-2$ Lagen auf der zweiten Evolute usw. Wir bezeichnen die in den gleichen aufeinander folgenden Zeitelementen zurückgelegten Wegen des Punktes A der Reihe nach mit $ds_1, ds_2, ds_3, \ldots$, die des Punktes A' mit $ds_1', ds_2', ds_3', \ldots$, die des Punktes A'' mit $ds_1'', ds_2'', \ldots$, usw. Ferner bezeichnen wir die von den Bahnnormalen in den gleichen aufeinander folgenden Zeitelementen dt zurückgelegten Winkeln mit $d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3, \ldots$ und die Krümmungsradien der Kurve bezw. der ihrer Evoluten der Reihe nach mit $r_1, r_2, r_3, \ldots$.

Die Bewegung des Punktes A nach A_1 (ds_1) kann als eine Drehung der Bahnnormalen $A'A = r_1$ um den Winkel $d\varphi_1$ aufgefasst werden. Dementsprechend ist

$$ds_1 = r_1 \cdot d\varphi_1 .$$

Ebenso kann die Bewegung des Punktes A_1 nach A_2 als eine Drehung der Bahnnormalen $A_1' - A_1$ (vektoriell gleich $r_1 + ds_1 - ds_1'$) um den Winkel $d\varphi_2$ angesehen werden. Es ist daher

$$ds_2 = (r_1 + ds_1 - ds_1') \cdot d\varphi_2 .$$

Ebenso ist

$$ds_3 = (r_1 + ds_1 + ds_2 - ds_1' - ds_2') \cdot d\varphi_3 \quad \text{usw.}$$

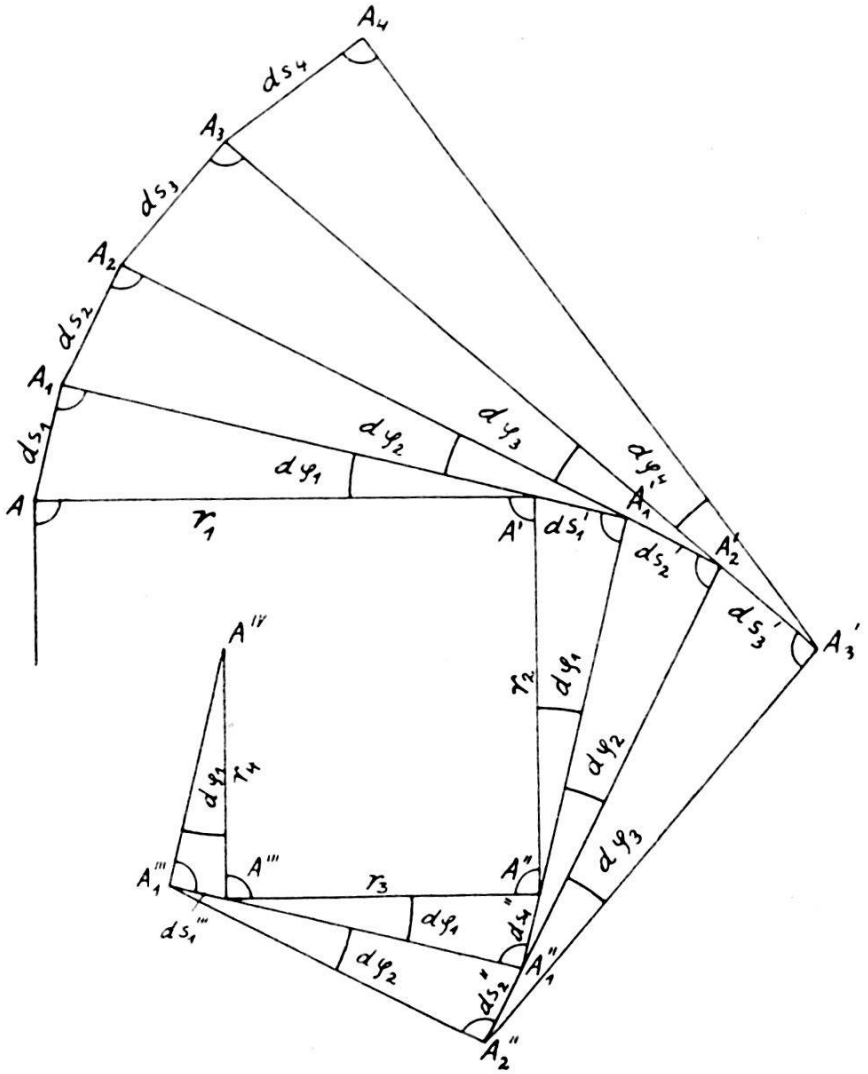

Fig. 8.

Da die Bewegung des Punktes A' nach A_1' durch eine Drehung der Strecke $A'' - A'$ um den Winkel $d\varphi_1$ erzeugt werden kann, ist

$$ds_1' = r_2 \cdot d\varphi_1 .$$

Ferner

$$ds_2' = (r_2 + ds_1' - ds_1'') \cdot d\varphi_2 \quad \text{usw.}$$

Ebenso ist

$$ds_1'' = r_3 \cdot d\varphi_1 \quad \text{usw.}$$

Setzen wir die einzelnen Werte in den vorhergehenden Gleichungen ein, so erhalten wir:

$$\frac{ds_1}{d\varphi_1} = r_1$$

$$\frac{ds_2}{d\varphi_2} = r_1(1 + d\varphi_1) - r_2 \cdot d\varphi_2$$

$$\frac{ds_3}{d\varphi_3} = r_1(1 + d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_1\, d\varphi_2) - r_2(d\varphi_1 + d\varphi_2 + 2\, d\varphi_1\, d\varphi_2)$$
$$+ r_3\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \text{ usw.}$$

Wir definieren die Geschwindigkeit des Punktes A während des ersten Zeitelementes, also beim Zurücklegen des Wegelementes ds_1 durch

$$r_1 = \frac{ds_1}{dt},$$

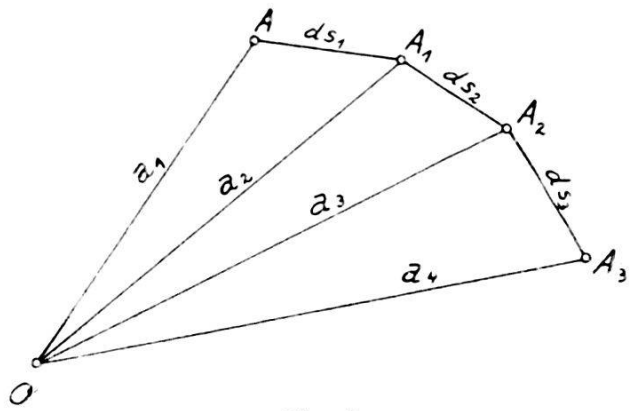

Fig. 9.

die Geschwindigkeit während des zweiten Wegelementes ds_2 durch

$$r_2 = \frac{ds_2}{dt},$$

ebenso

$$r_3 = \frac{ds_3}{dt} \text{ usw.}$$

Ähnlich wie wir den Vektor ds_1 erklären können als Differenz der Vektoren $a_2 - a_1$, Fig. 9, $ds_2 = a_3 - a_2$ usw., und dementsprechend setzen können

$$v_1 = \frac{a_2 - a_1}{dt}, \quad v_2 = \frac{a_3 - a_2}{dt} \text{ usw.,}$$

können wir die Änderungsgeschwindigkeit der Geschwindigkeit, das ist die erste Beschleunigung, definieren durch

$$b_1 = \frac{v_2 - v_1}{dt} = \frac{ds_2 - ds_1}{dt^2}$$

$$b_2 = \frac{v_3 - v_2}{dt} = \frac{ds_3 - ds_2}{dt^2} \text{ usw.}$$

Ebenso erhält man die Änderungsgeschwindigkeit der ersten Beschleunigung, das ist die zweite Beschleunigung aus

$$b_1' = \frac{b_2 - b_1}{dt} = \frac{ds_3 - 2\,ds_2 + ds_1}{dt^3}$$

$$b_2' = \frac{b_3 - b_2}{dt} = \frac{ds_4 - 2\,ds_3 + ds_2}{dt^3} \text{ usw.}$$

Die dritte Beschleunigung ist:

$$b_1'' = \frac{b_2' - b_1'}{dt} = \frac{ds_4 - 3\,ds_3 + 3\,ds_2 - ds_1}{dt^4}\,.$$

Wir definieren die Winkelgeschwindigkeit während des ersten Zeitelementes

$$w_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$$

während des zweiten Zeitelementes

$$w_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$$

ebenso

$$w_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}\,.$$

Ähnlich wie bei der Beschleunigung eines Punktes erhält man die Änderungsgeschwindigkeit der Winkelgeschwindigkeit, das ist die erste Winkelbeschleunigung aus

$$\lambda_1 = \frac{w_2 - w_1}{dt} = \frac{d\varphi_2 - d\varphi_1}{dt^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{w_3 - w_2}{dt} = \frac{d\varphi_3 - d\varphi_2}{dt^2} \text{ usw.}$$

Ebenso die zweite Winkelbeschleunigung

$$\lambda_1' = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{dt} = \frac{d\varphi_3 - 2\,d\varphi_2 + d\varphi_1}{dt^3} \text{ usw.}$$

Unter Berücksichtigung der bisher aufgestellten Gleichungen erhalten wir:

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = r_1 \cdot \frac{dq_1}{dt} = r_1 \cdot w_1 .$$

Woraus die allgemeine Formel folgt:

$$v = r_1 \cdot w \ldots . \tag{1}$$

Es ergibt sich

$$b_1 = \frac{ds_2 - ds_1}{dt^2} = \frac{r_1(1 + dq_1) \cdot dq_2}{dt^2} - \frac{r_2 \cdot dq_1\, dq_2}{dt^2} - \frac{r_1\, dq_1}{dt^2}$$

$$= r_1 \frac{dq_2 - dq_1}{dt^2} + r_1 \frac{dq_1 \cdot dq_2}{dt^2} - r_2 \frac{dq_1\, dq_2}{dt^2} = r_1 \lambda_1$$

$$+ r_1 w_1 w_2 - r_2 w_1 w_2 .$$

Setzen wir für $\lambda_1 = \lambda$ und für $w_1 = w_2 = w$, was zulässig ist, da jetzt nicht mehr die Differenzen der Winkelgeschwindigkeiten berücksichtigt werden müssen, so ist allgemein:

$$b = r_1 \lambda + r_1 w^2 - r_2 w^2 \ldots . \tag{2}$$

Ebenso erhält man

$$b_1' = \frac{ds_3 - 2\, ds_2 + ds_1}{dt^3} = r_1 \frac{1 + dq_1 + dq_2 + dq_1\, dq_2}{dt^3} \cdot dq_3$$

$$- r_2 \frac{dq_1 + dq_2 + 2\, dq_1\, dq_2}{dt^3} \cdot dq_3 + r_3 \frac{dq_1\, dq_2\, dq_3}{dt^3}$$

$$- r_1 \cdot \frac{2\,(1 + dq_1)\, dq_2}{dt^3} + 2\, r_2 \frac{dq_1\, dq_2}{dt^3} + r_1 \frac{dq_1}{dt^3}$$

$$= r_1 \cdot \frac{dq_3 - 2\, dq_2 + dq_1}{dt^3} + r_1 \frac{dq_1\, dq_3 - 2\, dq_1\, dq_2 + dq_2\, dq_3}{dt^3}$$

$$+ r_1 \frac{dq_1\, dq_2\, dq_3}{dt^3} - r_2 \frac{dq_1\, dq_3 - 2\, dq_1\, dq_2 + dq_2\, dq_3}{dt^3}$$

$$- r_2 \frac{2\, dq_1\, dq_2\, dq_3}{dt^3} + r_3 \frac{dq_1\, dq_2\, dq_3}{dt^3} = r_1 \lambda_1'$$

$$+ r_1 \left(\frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3 - dq_2}{dt^2} + \frac{dq_3 - dq_1}{dt^2} \cdot \frac{dq_2}{dt} \right) + r_1 w_1 w_2 w_3$$

$$- r_2 \left(\frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3 - dq_2}{dt^2} + \frac{dq_3 - dq_1}{dt^2} \cdot \frac{dq_2}{dt} \right) - 2\, r_1 w_1 w_2 w_3$$

$$+ r_3 \cdot w_1 w_2 w_3 .$$

Da

$$\frac{d\varphi_3 - d\varphi_1}{dt^2} = \frac{d\varphi_3 - d\varphi_2}{dt^2} + \frac{d\varphi_2 - d\varphi_1}{dt^2} = \lambda_2 + \lambda_1 ,$$

so ist

$$b_1' = r_1\lambda_1' + r_1 w_1 \lambda_1 + r_1 w_2(\lambda_1 + \lambda_2) + r_1 w_1 w_2 w_3 - r_2 w_1 \lambda_2$$
$$- r_2 w_2(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\, r_2 w_1 w_2 w_3 + r_3 w_1 w_2 w_3 .$$

Aus den gleichen Gründen wie bei der Gleichung (2) kann allgemein gesetzt werden:

$$b' = r_1\lambda' + 3\, w\lambda\,(r_1 - r_2) + w^3\,(r_1 - 2\, r_2 + r_3) \ldots . \qquad (3)$$

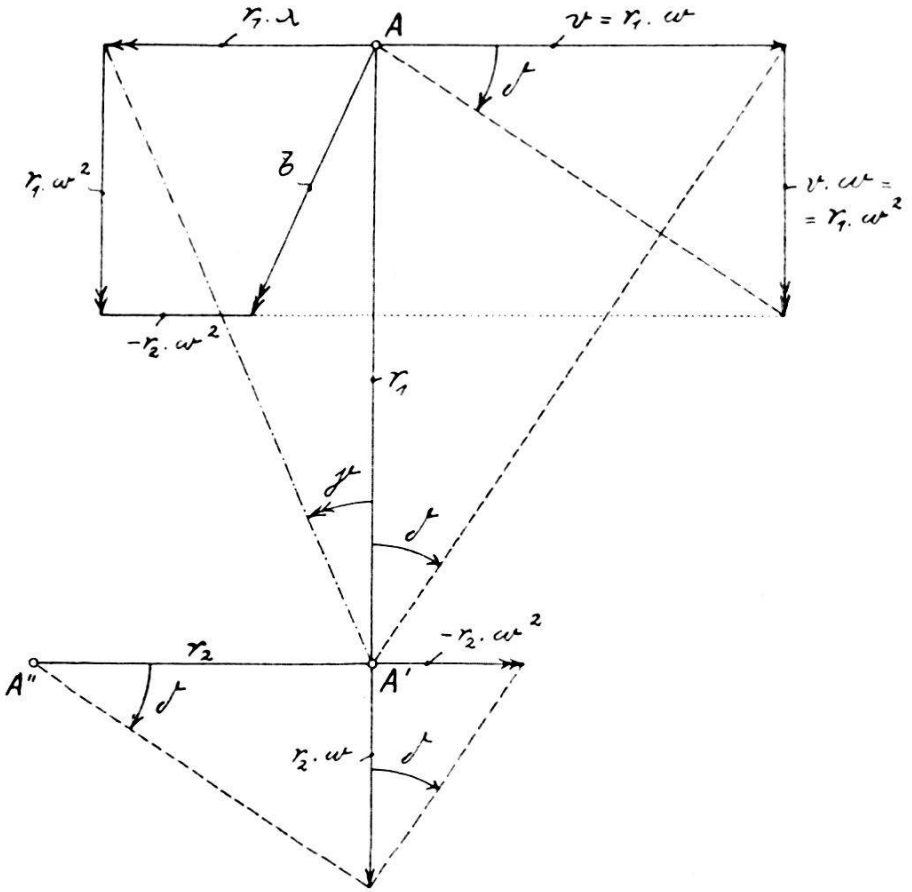

Fig. 10.

Kennt man von einem bewegten Punkte den Krümmungsradius der Bahn eines Punktes bzw. die ihrer Evoluten ($r_1, r_2, r_3, \ldots$), ferner die Winkelgeschwindigkeit $w = \operatorname{tg}\delta$ und die Winkelbeschleunigungen $\lambda = \operatorname{tg}\gamma$, $\lambda' = \operatorname{tg}\gamma'$, usw. der Bahntangente, so erhält zunächst die Geschwindigkeit $v = r_1 w = r_1 \cdot \operatorname{tg}\delta$ als Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes. Die Beschleunigung $\mathrm{b} = r_1\lambda + r_1 w^2 - r_2 w^2$ ergibt sich als die Vektorsumme dreier Beschleunigungen (siehe Fig. 10). Ebenso kann man die zweite

Beschleunigung b' mit Hilfe der Gleichung (3) graphisch leicht ermitteln.

Die Ausrechnung der höheren Beschleunigungen nach der hier entwickelten Methode ist verhältnismässig umständlich, weshalb ein schneller zum Ziele führendes Verfahren angegeben werden möge:

In Fig. 11 bedeuten wieder $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die Krümmungs-

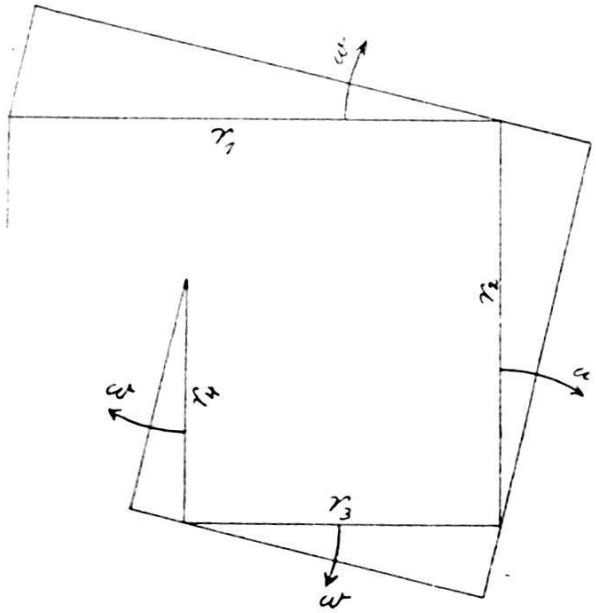

Fig. 11.

radien der Bahn bezw. der Evoluten der Bahn des Punktes. Es ist

$$v = r_1 \cdot w \ldots \tag{1}$$

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r_1 \cdot w)}{dt} = \frac{dr_1}{dt} \cdot w + r_1 \cdot \frac{dw}{dt}$$

$\frac{dr_1}{dt}$ ist die Änderungsgeschwindigkeit des Krümmungsradius r_1 welche sich zusammensetzt (siehe Fig. 12) aus der Geschwindigkeit des Punktes A und der Geschwindigkeit des Punktes A'. Es ist

$$v_A = r_1 \cdot w$$
$$v_A' = r_2 \cdot w$$

Da der Geschwindigkeitsvektor v_A' nicht am Ende des Vektors r_1 sondern an seinem Anfang angesetzt erscheint, ist er mit negativen Vorzeichen einzuführen, so dass

$$\frac{dr_1}{dt} = r_1 \cdot w - r_2 \cdot w \, .$$

Unter Berücksichtigung, dass $\frac{dw}{dt} = \lambda$ ist, ergibt sich

$$b = r_1 \lambda + r_1 w^2 - r_2 w^2 \ldots . \tag{2}$$

Die zweite Beschleunigung b' ist

$$b' = \frac{db}{dt} = \frac{dr_1}{dt} \cdot \lambda + r_1 \frac{d\lambda}{dt} + \frac{dr_1}{dt} \cdot w^2 + r_1 \frac{d(w^2)}{dt}$$
$$- \frac{dr_2}{dt} \cdot w^2 - r_2 \frac{d(w^2)}{dt} .$$

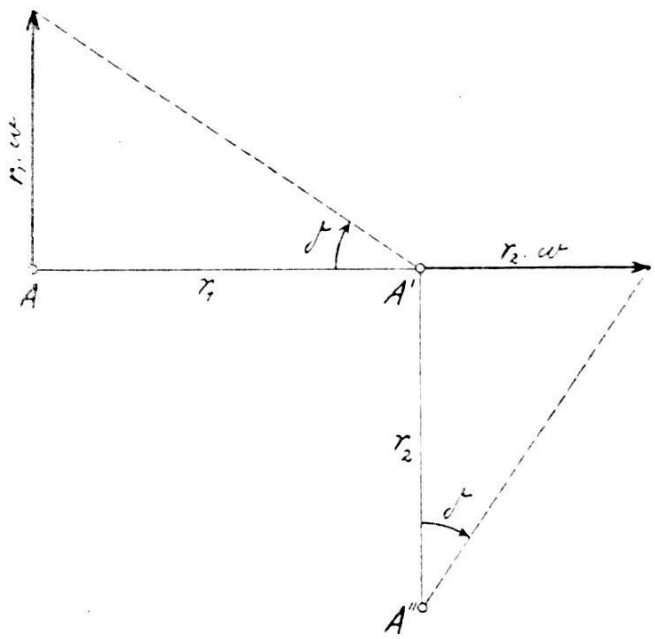

Fig. 12.

Aus den gleichen Gründen wie oben ergibt sich:

$$\frac{dr_2}{dt} = r_2 \cdot w - r_3 \cdot w , \quad \frac{d\lambda}{dt} = \lambda',$$

womit

$$b' = (r_1 w - r_2 w) \cdot \lambda + r_1 \lambda' + (r_1 w - r_2 w) \cdot w^2 + 2 r_1 w \lambda$$
$$- (r_2 w - r_3 w) w^2 - 2 r_2 w \lambda$$

oder geordnet:

$$b' = r_1 \lambda' + (r_1 - r_2) \cdot 3 w \lambda + (r_1 - 2 r_2 + r_3) \cdot w^3 \ldots . \tag{3}$$

Ebenso erhält man

$$b'' = r_1 \lambda'' + 4 (r_1 - r_2) w \lambda' + 3 (r_1 - r_2) \cdot \lambda^2 + 6 (r_1 - 2 r_2 + r_3)$$
$$\cdot w^2 \lambda + w^4 (r_1 - 3 r_2 + 3 r_3 - r_4) \ldots . \tag{4}$$

$$b''' = r_1 \lambda''' + 5 (r_1 - r_2) \cdot w \lambda'' + 10 (r_1 - r_2) \cdot \lambda \lambda'$$
$$+ 10 (r_1 - 2 r_2 + r_3) \cdot w^2 \lambda' + 15 (r_1 - 2 r_2 + r_3) w \lambda^2$$
$$+ 10 (r_1 - 3 r_2 + 3 r_3 - r_4) \cdot w^3 \cdot \lambda$$
$$+ (r_1 - 4 r_2 + 6 r_3 - 4 r_4 + r_5) \cdot w^5 \ldots . \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
b'''' = {} & r_1 \lambda'''' + 6\,(r_1 - r_2) \cdot w \lambda''' + 15\,(r_1 - r_2)\,\lambda\lambda'' + 10\,(r_1 - r_2)\,\lambda'^2 \\
& + 15\,(r_1 - 2\,r_2 + r_3) \cdot w^2 \lambda'' + 60\,(r_1 - 2\,r_2 + r_3)\,w\lambda\lambda' \\
& + 20\,(r_1 - 3\,r_2 + 3\,r_3 - r_4)\,w^3 \lambda' + 15\,(r_1 - 2\,r_2 + r_3)\,\lambda^3 \\
& + 45\,(r_1 - 3\,r_2 + 3\,r_3 - r_4) \cdot w^2 \lambda^2 + 15\,(r_1 - 4\,r_2 + 6\,r_3 - 4\,r_4 + r_5) \\
& \cdot w^4 \cdot \lambda + (r_1 - 5\,r_2 + 10\,r_3 - 10\,r_4 + 5\,r_5 - r_6) \cdot w^6 \ldots . \qquad (6)
\end{aligned}
$$

b) *Die vektoriellen Beziehungen zwischen den Polbahnen und den Polwechselbeschleunigungen.*

Jede Bewegung eines ebenen Systems kann aufgefasst werden als eine Rollung einer mit dem beweglichen System verbundenen Kurve (bewegliche Polbahn) auf einer mit dem festen System verbundenen Kurve (feste Polbahn). In Fig. 13 seien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$

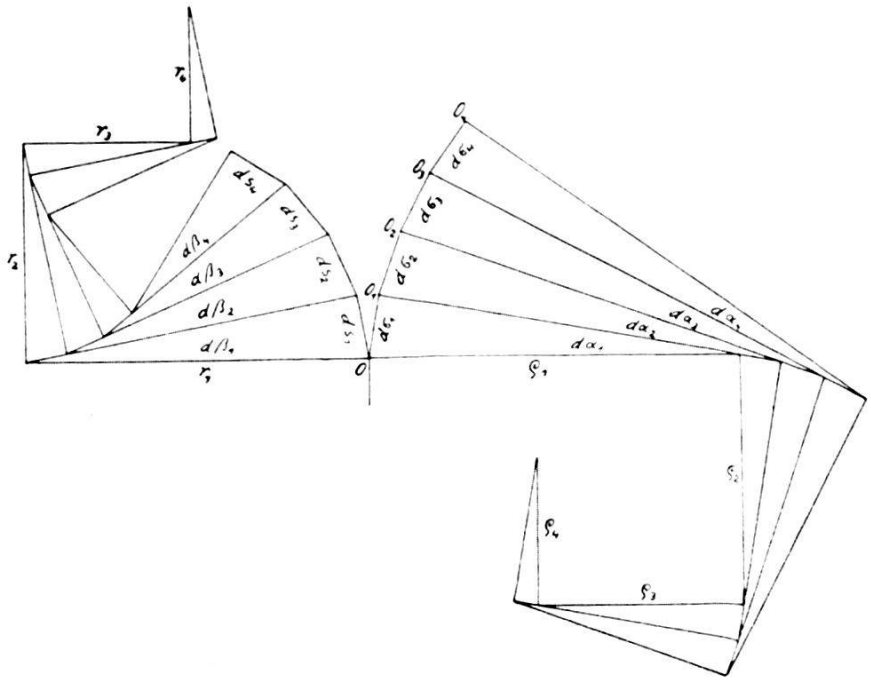

Fig. 13.

die Krümmungsradien einer festen Polbahn, $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die Krümmungsradien einer beweglichen Polbahn. Wir erteilen dem System der beweglichen Polbahn eine Bewegung $(w, \lambda, \lambda', \ldots)$ und wollen die Bewegung des Momentanzentrums 0 $(v_0, b_0, b_0', \ldots)$ feststellen. Während der Bewegung des Systems wandert der Berührungspunkt 0 längs der festen Polbahn weiter $(0, 0_1, 0_2, \ldots)$. Die in den gleichen aufeinander folgenden Zeitelementen dt zurückgelegten Wege längs der festen Polbahn $(d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots)$ sind ihrer Länge nach den Wegelementen gleich, die der Berührungspunkt 0 relativ auf der beweglichen Polbahn zurücklegt $(ds_1, ds_2, \ldots)$. Es müssen daher die tangentialen Komponenten der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen beider Bewegungen einander

gleich sein. Wir bezeichnen die Bewegungsgrössen, die die Normalstrahlen ϱ bezw. r auf ihren Systemen ausführen mit $w_\varrho, \lambda_\varrho, \lambda_\varrho', \ldots$ bezw. $w_r, \lambda_r, \lambda_r', \ldots$. Für die Bewegung des Systems selbst ist $w = w_\varrho - w_r$, $\lambda = \lambda_\varrho - \lambda_r$, $\lambda' = \lambda_\varrho' - \lambda_r', \ldots$ usw.

Die Polwechselbewegung ist nach den Gleichungen 1 usw. bestimmt durch

$$\begin{aligned} v_0 &= \varrho_1 \cdot w_\varrho \\ b_0 &= \varrho_1 \cdot \lambda_\varrho + (\varrho_1 - \varrho_2) \cdot w_\varrho^2 \\ b_0' &= \varrho_1 \lambda_\varrho' + (\varrho_1 - \varrho_2) \cdot 3\, w_\varrho \lambda_\varrho + (\varrho_1 - 2\,\varrho_2 + \varrho_3) \cdot w_\varrho^3 \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Die zu lösende Aufgabe besteht somit darin, die Winkelgrössen $w_\varrho, \lambda_\varrho, \lambda_\varrho', \ldots$ usw. zu ermitteln. Hierzu ziehen wir einerseits die Bedingungen der Gleichheit der tangentialen Komponenten der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Bewegung des Momentanpoles längs der Polbahnen und andererseits die bereits angegebenen Beziehungen der Winkelgrössen beider Normalstrahlen auf ihren Systemen zu den Winkelgrössen des Systems selbst heran.

Es ist

$$\begin{gathered} v = \varrho_1 \cdot w_\varrho = r_1 \cdot w_r \\ w_\varrho - w_r = w\,. \end{gathered}$$

Aus ihnen erhält man

$$w_\varrho = \frac{w \cdot r_1}{r_1 - \varrho_1} \quad \text{und} \quad w_r = \left.\frac{w \cdot \varrho_1}{r_1 - \varrho_1}\right\} \ldots \tag{7}$$

Aus denselben Gründen ist

$$\begin{gathered} b_t = \varrho_1 \cdot \lambda_\varrho - \varrho_2 \cdot w_\varrho^2 = r_1 \cdot \lambda_r - r_2 \cdot w_r^2 \\ \lambda_\varrho - \lambda_r = \lambda\,. \end{gathered}$$

Daraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \lambda_\varrho &= \frac{r_1\,\lambda + r_2\,w_r^2 - \varrho_2 \cdot w_\varrho^2}{r_1 - \varrho} \\ \lambda_r = \lambda_\varrho - \lambda &= \frac{\varrho \cdot \lambda + r_2 \cdot w_r^2 - \varrho_2 \cdot w_\varrho^2}{r_1 - \varrho_1} \end{aligned}\right\} \ldots \tag{8}$$

Ebenso erhält man aus

$$\begin{aligned} b_t' &= \varrho_1 \cdot \lambda_\varrho' - 3\,\varrho_2 \cdot w_\varrho \cdot \lambda_\varrho + \varrho_1 \cdot w_\varrho^3 + \varrho_3\, w_\varrho^3 \\ &= r_1 \cdot \lambda_r' - 3\, r_2\, w_r\, \lambda_r + r_1\, w_r^3 + r_3\, w_r^3 \\ &\lambda_\varrho' - \lambda_r' = \lambda'. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_\varrho'(r_1-\varrho_1) &= \lambda'\cdot r_1 - 3\,\varrho_2 w_\varrho \lambda_\varrho + \varrho_1 w_\varrho^3 + \varrho_3 w_\varrho^3 + 3\,r_2 w_r \lambda_r \\ &\qquad - (r_1+r_3)\,w_r^3 \\ \lambda_r'(r_1-\varrho_1) &= \lambda'\cdot \varrho_1 - 3\,\varrho_2 w_\varrho \lambda_\varrho + (\varrho_1+\varrho_3)\,w_\varrho^3 + 3\,r_2 w_r \lambda_r \\ &\qquad - (r_1+r_3)\cdot w_r^3 .\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Auch die Auflösungen der entsprechenden Gleichungen für die nächst höheren Beschleunigungen bieten keinerlei Schwierigkeiten. Die Werte $w_\varrho, \lambda_\varrho, \ldots$ in die Gleichungen für $v_0, b_0, \ldots$ eingesetzt, ergeben die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen der Polwechselbewegung.

c) *Die Polwechselbeschleunigungen und die Beschleunigungen des mit dem Momentanpol zusammenfallenden Systempunktes.*

Ist die ebene Bewegung eines starren Systems durch das Abrollen der beweglichen Polbahn auf der festen bekannt, und hat man die erste und die höhere Beschleunigung eines Punktes aufzusuchen, so muss man zuerst die Beschleunigungen des mit dem Momentanpol zusammenfallenden Systempunktes S ermitteln und zu dieser die Beschleunigungen addieren, die sich aus der Bewegung des Punktes A um den Punkt S ergeben.

Da der Punkt A um den Punkt S eine einfache Drehung ausführt, so sind in den Gleichungen 1 usw. des Kapitels 3a die Radien $r_1 = SA = r$, $r_2 = r_3 = r^4 = \ldots = 0$ zu setzen. Sind die Beschleunigungen des mit dem Momentanpol zusammenfallenden Systempunktes der Reihe nach mit $b_s, b_s', b_s'', \ldots$ $(v_s = 0)$ bezeichnet und ist die Bewegung des Systems bestimmt durch $w, \lambda, \lambda', \ldots$, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
v_A &= r\cdot w \\
b_A &= b_s + r(\lambda + w^2) \\
b_A' &= b_s' + r(\lambda' + 3\,w\lambda + w^3) \\
b_A'' &= b_s'' + r(\lambda'' + 4\,w\lambda' + 3\,\lambda^2 + 6\,w^2\lambda + w^4) \\
b_A''' &= b_s''' + r(\lambda''' + 5\,w\lambda'' + 10\,\lambda\lambda' + 10\,w^2\lambda' + 15\,w\lambda^2 \\
&\qquad + 10\,w^3\lambda + w^5) \\
b_A'''' &= b_s'''' + r(\lambda'''' + 6\,w\lambda''' + 10\,\lambda'^2 + 15\,\lambda\lambda'' + 15\,w^2\lambda'' \\
&\quad + 60\,w\,\lambda\lambda' + 20\,w^3\lambda' + 15\,\lambda^3 + 45\,w^2\lambda^2 + 15\,w^4\lambda + w^6) .
\end{aligned}$$

In den Fig. 14—18 sind die aufeinanderfolgenden Lagen der festen und beweglichen Polbahn zu Beginn der einzelnen Zeitelemente dargestellt. Während das Momentanzentrum seine Lage längs der festen Polbahn ändert $(0, 0_1, 0_2, \ldots)$, führt der im ersten Augenblick mit dem Momentanpol zusammenfallende Systempunkt S eine Bewegung senkrecht zur festen Polbahn

aus $(S, S_1, S_2, \ldots)$. Wir bezeichnen die Wegelemente, die der Punkt 0 ausführt, der Reihe nach mit $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots$, die des Punktes S mit $dg_1, dg_2, \ldots$, die Winkel, um die sich das System in den einzelnen Zeitelementen verdreht, mit $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots$. Auf Grund der Fig. 14—18 können unmittelbar folgende Gleichungen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} dg_1 &= 0 \\ dg_2 &= -d\sigma_1 \cdot d\varphi_2 \\ dg_3 &= (-d\sigma_1 - d\sigma_2 + dg_2) \cdot d\varphi_3 \\ dg_4 &= (-d\sigma_1 - d\sigma_2 - d\sigma_3 + dg_2 + dg_3) \cdot d\varphi_4 . \end{aligned}$$

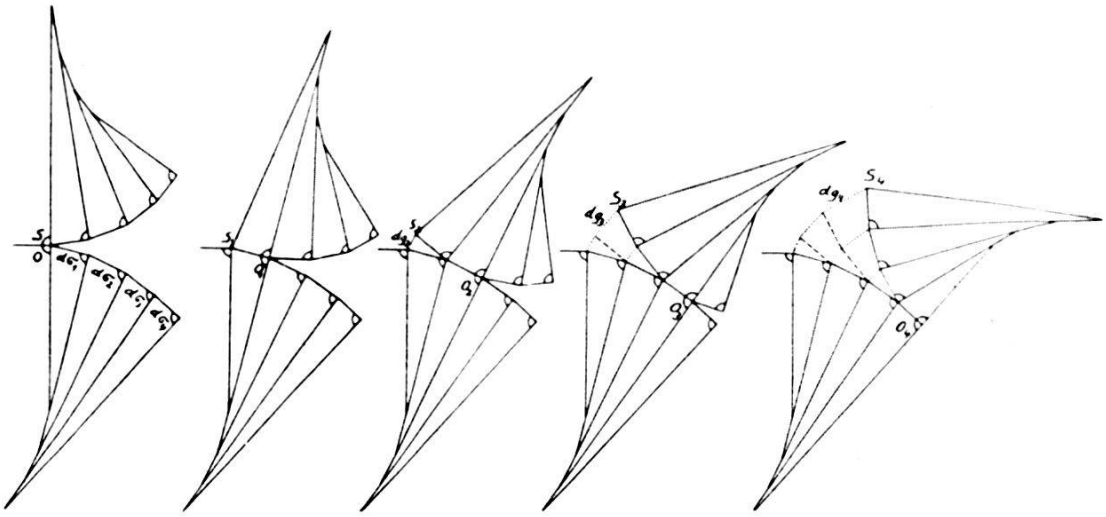

Fig. 14—18.

Ähnlich wie im Kapitel 3a kann man daraus die Bewegung des Punktes S bestimmen:

$$v_{S,1} = \frac{dg_1}{dt} = 0 \qquad v_S = 0 \ldots \tag{10}$$

$$b_{S,1} = \frac{dg_2 - dg_1}{dt^2} = \frac{-d\sigma_1 \cdot d\varphi_2}{dt^2} = -v_{0,1} \cdot w_2; \quad b_S = -v_0 \cdot w \ldots \tag{11}$$

$$b_{S,1}' = \frac{dg_3 - 2\,dg_2 + dg_1}{dt^3}$$

$$= \frac{-d\sigma_1 \cdot d\varphi_3 - d\sigma_2 \cdot d\varphi_3 - d\sigma_1 \cdot d\varphi_2 \cdot d\varphi_3 + 2\,d\sigma_1\,d\varphi_2}{dt^3}$$

da $d\varphi_3 = \lambda_2 \cdot dt^2 + d\varphi_2$, so ist

$$b_{S,1}' = -v_{0,1} \cdot w_2 \cdot w_3 - \frac{d\sigma_1}{dt} \cdot \frac{d\varphi_3 - d\varphi_2}{dt^2} - \frac{d\sigma_2 \cdot \lambda_2 \cdot dt^2}{dt^3}$$

$$- d\varphi_2 \frac{d\sigma_2 - d\sigma_1}{dt^3} = -v_{0,1} \cdot w_2 \cdot w_3 - v_{0,1} \cdot \lambda_2 - v_{0,2} \cdot \lambda_2 - b_{0,1} \cdot w_2$$

$$b_s' = -v_0 \cdot w^2 - 2\,v_0 \cdot \lambda - b_0 \cdot w \ldots \tag{12}$$

Ebenso ergibt sich aus

$$b_{S,1} = \frac{dg_4 - 3\,dg_3 + 3\,dg_2 - dg_1}{dt^4}$$

$$b_S'' = -v_0 \cdot w^3 - 4\,v_0 w \lambda - b_0 w^2 - 3\,v_0 \lambda' - 3\,b_0 \lambda - b_0' \cdot w \ldots \quad (13)$$

Wie man aus den Gleichungen entnehmen kann, ist die Geschwindigkeit des mit dem Momentanpol zusammenfallenden Punktes (weil gleich Null) unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit des Systems, die erste Beschleunigung unabhängig von der ersten Winkelbeschleunigung, die zweite Beschleunigung dieses Punktes unabhängig von der zweiten Winkelbeschleunigung usw. Dieser Punkt ist der einzige Punkt des Systems bei dem das zutrifft, die Beschleunigungen aller anderen Punkte hängen ab von der gleich hohen Winkelbeschleunigung, welche man dem System erteilt.

d) *Die höheren Coriolisbeschleunigungen.*

Wenn sich ein Punkt A auf einem System I bewegt (Relativbewegung $v_r, b_r, b_r', \ldots$), während das System I selbst sich gegen ein festes Bezugssystem 0 bloss parallel zu sich verschiebt (Führungsbewegung $v_f, b_f, b_f', \ldots$, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigungen gleich Null), so erhält man die Gesamtbewegung des Punktes A durch einfaches Addieren der Relativ- und Führungsbewegung. Es ist

$$\begin{aligned} v &= v_r + v_f \\ b &= b_r + b_f \\ b' &= b_r' + b_f' \text{ usw.} \end{aligned}$$

Führt dagegen System I gegen System 0 noch eine Drehung aus ($w, \lambda, \lambda', \ldots$), so sind, um die Gesamtbewegung des Punktes A zu ermitteln, noch zusätzliche Beschleunigungen (Coriolisbeschleunigungen) hinzu zu fügen.

Die einzelnen aufeinanderfolgenden Wegelemente der Relativbewegung des Punktes A auf dem System I (siehe Fig. 19) seien mit $dr_1, dr_2, dr_3, \ldots$ bezeichnet, die Wegelemente der Führungsbewegung mit $df_1, df_2, \ldots$, die Winkelelemente der Drehung des Systems I gegen 0 mit $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots$. Die Wegelemente der Gesamtbewegung des Punktes A ermittelt sich gemäss Fig. 19 aus

$$\begin{aligned} ds_1 &= df_1 + dr_1 + dr_1 \cdot d\varphi_1 \\ ds_1 + ds_2 &= df_1 + df_2 + dr_1 + dr_2 + (dr_1 + dr_2)\,(d\varphi_1 + d\varphi_2) \\ ds_1 + ds_2 + ds_3 &= df_1 + df_2 + df_3 + dr_1 + dr_2 + dr_3 \\ &\quad + (dr_1 + dr_2 + dr_3)\,(d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3) \\ \Sigma^4{}_1 ds &= \Sigma_1{}^4 df + \Sigma_1{}^4 dr + \Sigma_1{}^4 dr \cdot \Sigma_1{}^4 d\varphi \text{ usw.} \end{aligned}$$

Somit ist

$$ds_2 = df_2 + dr_2 + dr_1 \cdot d\varphi_2 + dr_2(d\varphi_1 + d\varphi_2)$$
$$ds_3 = df_3 + dr_3 + (dr_1 + dr_2) \cdot d\varphi_3 + dr_3(d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3)$$
$$ds_4 = df_4 + dr_4 + (dr_1 + dr_2 + dr_3) \cdot d\varphi_4 + dr_4(d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3 + d\varphi_4) \quad \text{usw.}$$

Daraus kann man die Bewegung des Punktes A folgendermassen berechnen:

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = \frac{df_1}{dt} + \frac{dr_1}{dt} + dr_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = v_{f1} + v_{r1} + dr_1 \cdot w_1 .$$

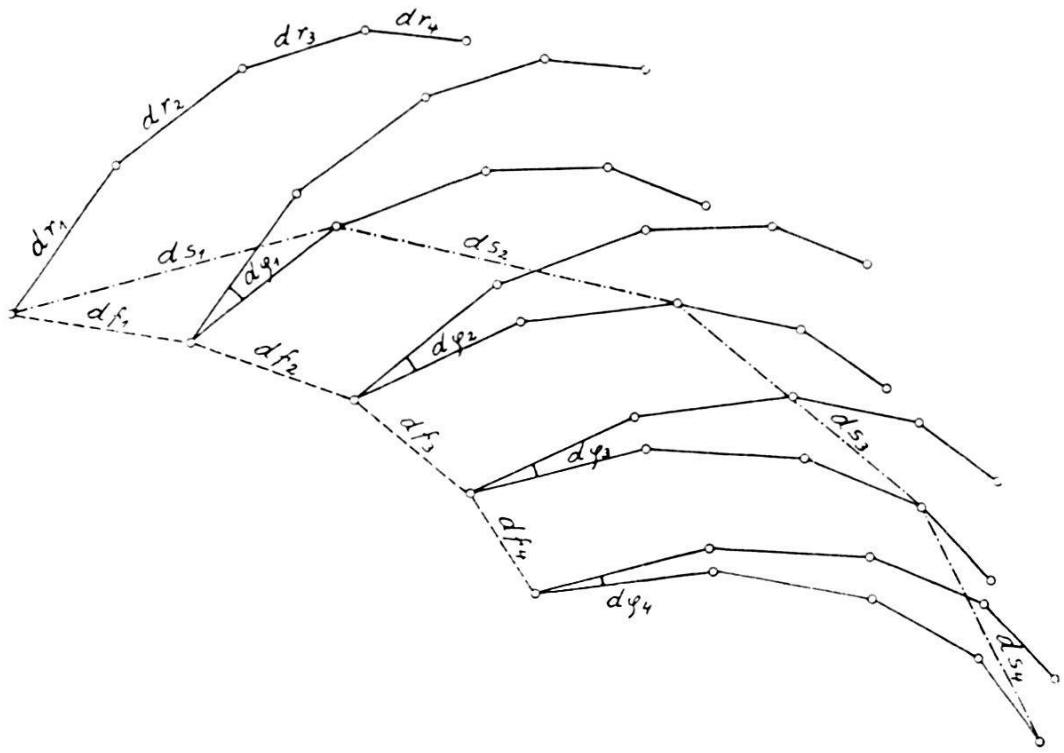

Fig. 19.

Da $dr_1 \cdot w_1$ eine unendlich kleine Grösse ist, kann gesetzt werden:

$$v = v_f + v_r \tag{14}$$

Ferner ist

$$b_1 = \frac{ds_2 - ds_1}{dt^2} = \frac{df_2 - df_1}{dt^2} + \frac{dr_2 - dr_1}{dt^2} + dr_1 \frac{d\varphi_2 - d\varphi_1}{dt^2}$$
$$+ \frac{dr_2}{dt} \cdot \frac{d\varphi_1 + d\varphi_2}{dt} = bf_1 + br_1 + dr_1 \cdot \lambda_1 + v_{r_2}(w_1 + w_2) .$$

Somit

$$b = b_f + b_r + 2\, w v_r \tag{15}$$

$$b_1' = \frac{ds_3 - 2\,ds_2 + ds_1}{dt^3} = bf_1' + br_1' + dr_1\lambda_1' + dr_2\lambda_1'$$

$$- 3\,dr_2\frac{d\varphi_1}{dt^3} + dr_3\frac{d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3}{dt^3}\,;$$

$$a = -3\,dr_2\frac{d\varphi_1}{dt^3} + dr_3\frac{d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3}{dt^3} = \frac{d\varphi_1}{dt}\cdot\frac{dr_3 - dr_2}{dt^2}$$

$$+ dr_3\frac{d\varphi_2 + d\varphi_3}{dt^3} - \frac{2\,dr_2\,d\varphi_1}{dt^3}\,.$$

Es ist

$$b_{r_2} = \frac{dr_3 - dr_2}{dt^2}$$

und

$$dr_3 = b_{r_2}\cdot dt^2 + dr_2,$$

so dass

$$a = w_1\cdot b_{r_2} + b_{r_2}(w_2 + w_3) + v_{r_2}\frac{d\varphi_3 - d\varphi_1}{dt^2} + v_{r_2}\frac{d\varphi_2 - d\varphi_1}{dt^2}\,.$$

Somit

$$b_1' = b_{f_1}' + b_{r_1}' + dr_1\lambda_1' + dr_2\cdot\lambda_1' + b_{r_2}\cdot(w_1 + w_2 + w_3)$$
$$+ v_{r_2}(\lambda_2 + \lambda_1) + v_{r_2}\cdot\lambda_1$$

$$b' = b_f' + b_r' + 3\,wb_r + 3\,\lambda v_r\,. \tag{16}$$

Ebenso ergibt sich aus

$$b_1'' = \frac{ds_4 - 3\,ds_3 + 3\,ds_2 - ds_1}{dt^4} = b_{f_1}'' + b_{r_1}'' + dr_1\,\lambda_1''$$

$$+ dr_2\,\lambda_1'' + dr_3\,\lambda_2'' + 4\,\frac{dr_2\,d\varphi_1}{dt^4} - 6\,\frac{dr_3\,d\varphi_2}{dt^4} - 2\,\frac{dr_3\cdot d\varphi_1}{dt^4}$$

$$+ \frac{dr_4}{dt^4}(d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3 + d\varphi_4)$$

nach einigen Umformungen

$$b_1'' = b_{f_1}'' + b_{r_1}'' + (dr_1 + dr_2 + dr_3)\cdot\lambda_1'' + b_{r_2}'(w_1 + w_2$$
$$+ w_3 + w_4) + b_{r_3}(4\,\lambda_2 + 2\,\lambda_3) + v_{r_2}(3\,\lambda_1 + \lambda_2')$$

$$b'' = b_f'' + b_r'' + 4\,wb_r' + 6\,\lambda b_r + 4\,v_r\lambda' \tag{17}$$

e) *Anwendungen.*

Die abgeleiteten vektoriellen Gleichungen stellen wohl die einfachste Form dar, in welcher die Beziehungen der einzelnen Grössen untereinander ausgedrückt werden können. Es ist nicht notwendig, dass die Ermittlung der einzelnen Grössen zeich

nerisch erfolgt, es ist ohne weiteres möglich, dass dieselbe rechnerisch vorgenommen wird. Es möge dies an einem Beispiel gezeigt werden:

I. Aufgabe: Von der Bewegung eines Punktes (Fig. 20) sind die Geschwindigkeit v und die 1., 2., 3. . . . Beschleunigung ($b, b', b'', \ldots$) bekannt. Es sind die Krümmungsradien $r_1, r_2, r_3, \ldots$ der Bahn des Punktes und der ihrer Evoluten, sowie die Winkel-

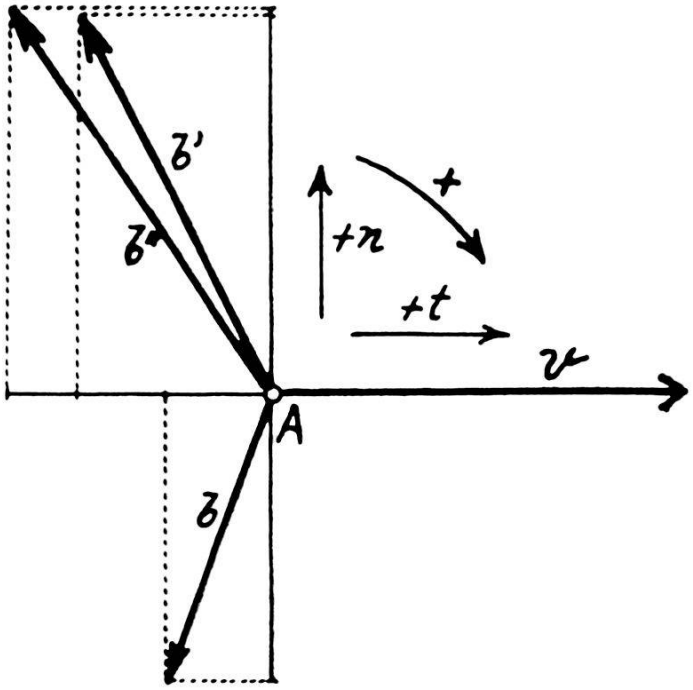

Fig. 20.

geschwindigkeit w und die Winkelbeschleunigungen $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ der Bahnnormalen aufzusuchen.

Die einzelnen Bewegungsgrössen seien gegeben durch ihre in die Tangentenrichtung (t) und in die Normalenrichtung (n) fallenden Komponenten (Werte in mm). Durch Heranziehen der Gleichungen des Kapitels 3a können diese Grössen gleichgesetzt werden:

$$v = 40^{+t} = r_1 \cdot w \tag{18}$$

$$b_n = 27^{-n} = r_1 \cdot w^2 \tag{19}$$

$$b_t = 10^{-t} = r_1 \cdot \lambda - r_2 \cdot w^2 \tag{20}$$

$$b_n' = 36^{+n} = 3\, r_1 \cdot w \cdot \lambda - 2\, r_2 \cdot w^3 \tag{21}$$

$$b_t' = 18{,}15^{-t} = r_1 \cdot \lambda' - 3\, r_2 \cdot w\lambda + r_1 \cdot w^3 + r_3 \cdot w^3 \tag{22}$$

$$b_n'' = 36{,}8^{-n} = 4\, r_1 w \lambda' + 3\, r_1 \lambda^2 - 12\, r_2 w^2 \lambda + r_1 w^4 + 3\, r_3 w^4 \tag{23}$$

$$b_t'' = 25^{-t} = r_1 \lambda'' - 4\, r_2 w \lambda' - 3\, r_2 \lambda^2 + 6(r_1 + r_3) \cdot w^2 \lambda - 3(r_2 + r_4) \cdot w^4 \tag{24}$$

Aus (18) und (19) ergibt sich

$$w = \frac{b_n}{v} = \frac{27^{-n}}{40^{+t}} = 0{,}675^{+}$$

$$r_1 = \frac{v}{w} = \frac{40^{+t}}{0{,}675^{+}} = 59{,}3^{+n}\,.$$

Aus (20) und (21):

$$r_1\,\lambda - r_2\,w^2 = b_t = 10^{-t}$$

$$3\,r_1\,\lambda - 2\,r_2\,w^2 = \frac{b_n'}{w} = \frac{36^{+n}}{0{,}675^{+}} = 53{,}3^{-t}$$

$$r_1\,\lambda = 33{,}3^{-t};\ \lambda = \frac{33{,}3^{-t}}{59{,}3^{+n}} = 0{,}561^{-}$$

$$r_2 \cdot w^2 = 23{,}3^{-t};\ r_2 = \frac{23{,}3^{-t}}{(0{,}675^{+})^2} = 51{,}2^{+t}\,.$$

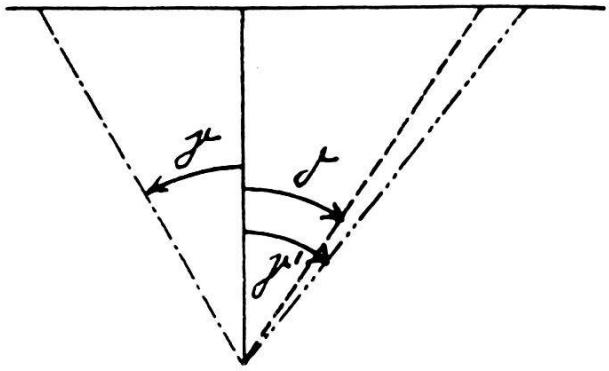

Fig. 21.

Aus (22) und (23):

$$r_1\,\lambda' + r_3\,w^3 = b_t' + 3\,r_2\,w\,\lambda - r_1\,w^3 = 58{,}1^{+t}$$

$$4\,r_1\,\lambda' + 3\,r_3\,w^3 = (b_n'' - 3\,r_1\,\lambda^2 + 12\,r_2\,w^2\lambda - r_1\,w^4):\ w = 222^{+t}$$

$$r_1\,\lambda' = 222^{+t} - 174{,}3^{+t} = 47{,}7^{+t};\ \lambda' = \frac{47{,}7^{+t}}{59{,}3^{+n}} = 0{,}803^{+}$$

$$r_3 \cdot w^3 = 58{,}1^{+t} - 47{,}7^{+t} = 10{,}4^{+t};\ r_3 = \frac{10{,}4^{+t}}{(0{,}675^{+})^3} = 33{,}8^{-n}\,.$$

Die Winkelgrössen sind in Fig. 21, die Bahn des Punktes in Fig. 22 dargestellt.

Trägt man von einem Punkte die 1., 2., 3., . . . Beschleunigungen der Punkte eines bewegten Systems auf, so erhält man den 1., 2., 3., . . . Beschleunigungsplan. Die Beschleunigungspläne

sind dem bewegten System ähnlich. Kennt man daher die Beschleunigungen zweier Punkte, so kann man mit Hilfe der Beschleunigungspläne die Beschleunigungen eines jeden dritten Punktes und weiters auch die Bahn des Punktes bestimmen.

II. Aufgabe. Von der festen und beweglichen Polbahn eines eben bewegten starren Systems sind die Krümmungsradien der Bahnen (ϱ_1, r_1) und die ihrer Evoluten $(\varrho_2, \varrho_3, \ldots; r_2, r_3, \ldots)$

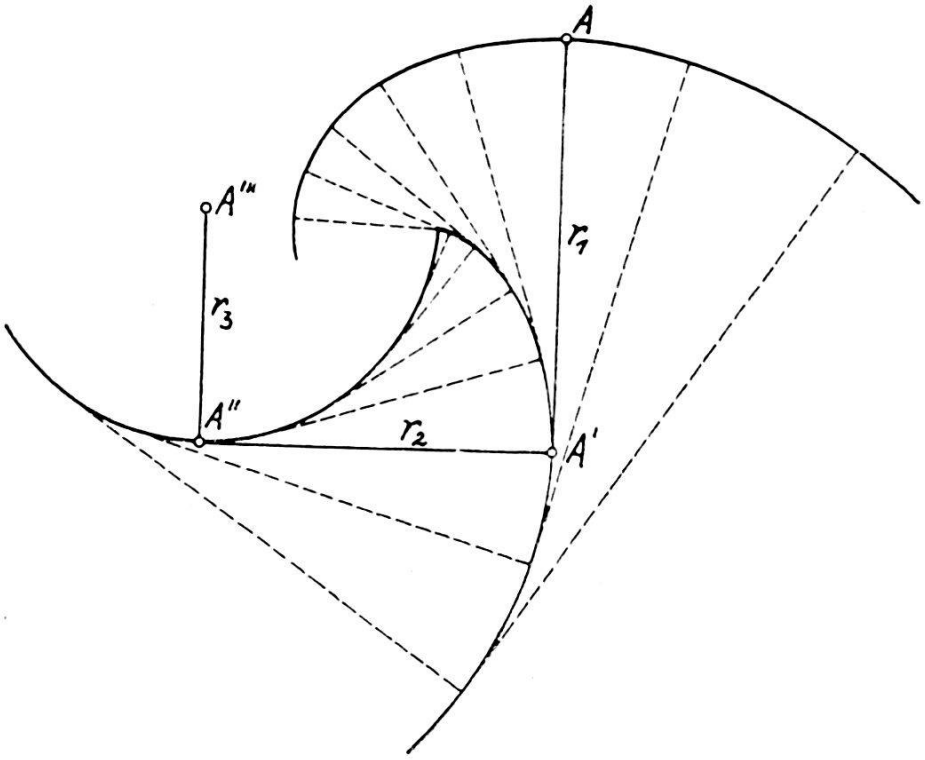

Fig. 22.

bekannt. Für einen Punkt A des bewegten Systems sollen die Krümmungsmittelpunkte $A', A'', A''', \ldots$ bestimmt werden.

Die Angaben (Werte in mm) seien (siehe Fig. 23):

$$\varrho_1 = 54^{+n} \qquad r_1 = 50^{-n}$$
$$\varrho_2 = 35^{+t} \qquad r_2 = 32^{-t}$$
$$\varrho_3 = 30^{-n} \qquad r_3 = 24{,}5^{+n}.$$

Man erteilt dem beweglichen System eine beliebige Bewegung $(w, \lambda, \lambda', \ldots)$ und sucht für diese Bewegung zunächst die Polwechselgrössen $v_0, b_0, b_0', \ldots$. Die beliebig angenommene Bewegung sei:

$$w = 1{,}2^{+}$$
$$\lambda = 1{,}0^{-}$$
$$\lambda' = 0{,}8^{+}$$

Die Polwechselgrössen ergeben sich laut den Gleichungen des Kapitels 3b aus:

$$w_\varrho = \frac{w \cdot r_1}{r_1 - \varrho_1} = 0{,}577^+$$

$$w_r = w_\varrho - w = 0{,}623^-$$

$$v_0 = \varrho_1 \cdot w_\varrho = 31{,}1^{+t}.$$

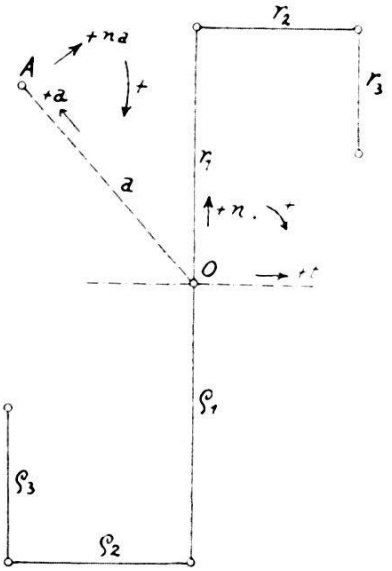

Fig. 23.

Ebenso erhält man

$$\lambda_\varrho = \frac{\lambda r_1 + r_2 w_r^2 - \varrho_2 \cdot w_\varrho^2}{r_1 - \varrho_1} = 0{,}71^-$$

$$\lambda_r = \lambda_\varrho - \lambda = 0{,}29^+$$

$$^t b_0 = \varrho_1 \lambda_\varrho - \varrho_2 w_\varrho^2 = 26{,}7^{-t}$$

$$^n b_0 = \varrho_1 \cdot w_\varrho^2 = 18^{-n}.$$

Ferner ist

$$\lambda \varrho' (r_1 - \varrho_1) = \lambda' r_1 - 3 \varrho_2 w_\varrho \lambda_\varrho + (\varrho_1 + \varrho_3) \cdot w_\varrho^3 + 3 r_2 w_r \lambda_r - (r_1 + r_3) \cdot w_r^3$$

$$\lambda_\varrho' (50^{-n} - 54^{+n}) = 98{,}8^{-t} \qquad \lambda_\varrho' = 0{,}95^+$$

$$^+b_0' = \varrho_1 \lambda_\varrho' - 3 \varrho_2 w_\varrho \cdot \lambda_\varrho + \varrho_1 w_\varrho^3 + \varrho_3 \cdot w_\varrho^3 = 3{,}7^{+t}$$

$$^n b_0' = \varrho_1 \cdot 3 w_\varrho \lambda_\varrho - 3 \varrho_2 w_\varrho^3 = 52{,}9^{+n}.$$

Allgemein ist die $n$te Beschleunigung des Punktes A gleich der $n$ten Beschleunigung des mit dem Momentanpol zusammenfallenden Systempunktes S, vermehrt um die $n$te Beschleunigung des Punktes A um diesen Punkt S.

$$b_A^{(n)} = b_S^{(n)} + b_{A \text{ um } S}^{(n)}.$$

Laut der Ableitung des Kapitels 3c ist

$$
\begin{aligned}
v_s &= 0 \\
b_s &= -v_0 \cdot w \\
b_s' &= -v_0 \cdot w^2 - 2\, v_0 \cdot \lambda - b_0 \cdot w\,.
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
b_s &= 37{,}3^{+n} \\
{}^t b_s' &= -v_0 \cdot w^2 - {}^n b_0 \cdot w = 66{,}4^{+t} \\
{}^n b_s' &= -2\, v_0 \cdot \lambda - {}^t b_0 \cdot w = 94{,}2^{-n}.
\end{aligned}
$$

Die Lage des Punktes A sei durch $0A = a = 50^{+a}$ (siehe Fig. 23) gegeben.

Die Gleichungen für die Bewegung des Punktes A um S ergeben sich aus den Gleichungen der allgemeinen Bewegung des Punktes (Gleich. 1 usw.), wenn man die Krümmungsradien der Evoluten gleich Null setzt. So ist:

$$
\begin{aligned}
v_{A\,\mathrm{um}\,S} &= a \cdot w &&= 60^{+na} = v_A \\
{}^a b_{A\,\mathrm{um}\,S} &= a \cdot w^2 &&= 72^{-a} \\
{}^{na} b_{A\,\mathrm{um}\,S} &= a \cdot \lambda &&= 50^{-na} \\
{}^a b'_{A\,\mathrm{um}\,S} &= 3\, a w \lambda &&= 180^{+a} \\
{}^{na} b_{A\,\mathrm{um}\,S} &= a\lambda' + a w^3 &&= 46{,}6^{-na}.
\end{aligned}
$$

Um von den Beschleunigungen $b_s, b_s', \ldots$ die in die Richtung a bezw. normal zu a (na) fallenden Komponenten aufzusuchen, kann entweder eine rechnerische oder graphische Ausmittlung herangezogen werden. Eine letztere (siehe Fig. 24) ergibt:

$$
\begin{aligned}
{}^a b_s &= 28^{+a} \\
{}^{na} b_s &= 24{,}5^{+na} \\
{}^a b_s' &= 115^{-a} \\
{}^{na} b_s' &= 12{,}5^{-na}.
\end{aligned}
$$

Da allgemein

$$
b_A^{(n)} = b_S^{(n)} + b_{A\,\mathrm{um}\,S}^{(n)}
$$

ist, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
{}^a b_A &= {}^a b_S + {}^a b_{A\,\mathrm{um}\,S} = 44^{-a} \\
{}^{na} b_A &= {}^{na} b_S + {}^{na} b_{A\,\mathrm{um}\,S} = 25{,}5^{-na}
\end{aligned}
$$

Ebenso erhält man

$$
\begin{aligned}
{}^a b_A' &= {}^a b_S' + {}^a b_{A\,\mathrm{um}\,S}' = 65^{+a} \\
{}^{na} b_A' &= {}^{na} b_S' + {}^{na} b_{A\,\mathrm{um}\,S}' = 59{,}1^{-na}.
\end{aligned}
$$

Man könnte nun die Bewegungsgrössen des Punktes A allein benützen, um die Krümmungsmittelpunkte der Bahn des Punktes und der ihrer Evoluten aufzusuchen. Zieht man jedoch die

Bewegung des Momentanpoles heran, so kann man bereits aus der Beschleunigung des Punktes den Krümmungsmittelpunkt der Evolute der Bahn des Punktes ermitteln. Dieser letztere Weg, die Ausdehnung der Hartmann'schen Konstruktion zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes auf die Beschleunigungen, möge nun beschritten werden.

Da wir die Bewegung der Bahnnormalen a im Punkte A heranziehen, und diese Bahnnormale auch stets die Verbindungs-

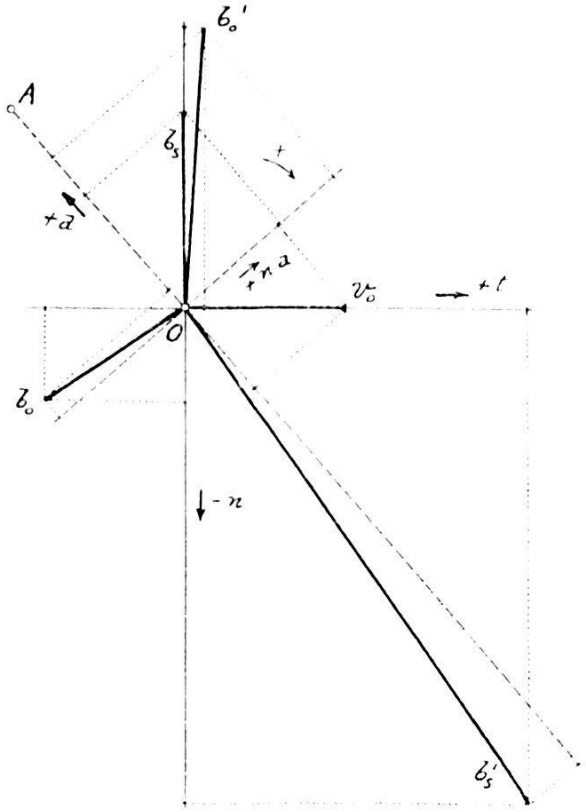

Fig. 24.

gerade des bewegten Punktes A mit dem jeweiligen Momentanpol 0 ist, so mögen vorerst auf Grund einer z. B. graphischen Ausmittlung (siehe Fig. 24) die Komponenten der Polwechselbeschleunigungen in Richtung a und na bestimmt werden. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
{}^{a}v_0 &= 20{,}5^{-a} & & \\
{}^{na}v_0 &= 24^{+na} & {}^{a}b_0' &= 37{,}5^{+a} \\
{}^{a}b_0 &= 4{,}3^{+a} & {}^{na}b_0' &= 38^{+na} \\
{}^{na}b_0 &= 32^{-na} & &
\end{aligned}
$$

Ist N der auf a liegende Punkt, der zu Beginn der Bewegung mit 0 zusammenfällt, so ist allgemein die $n$te Beschleunigung von A

$$b_A^{(n)} = b_N^{(n)} + b_{A\,\mathrm{um}\,N}^{(n)}.$$

Da die Gerade a als Bahnnormale stets durch den Punkt 0 hindurchgeht, so ist:

$$b_0^{(n)} = b_N^{(n)} + b_{0\text{ auf }a}^{(n)} + b_{0\text{ auf }a}^{(n)\text{ Coriolis}}.$$

Daher ergibt sich

$$b_A^{(n)} = b_0^{(n)} - b_{0\text{ auf }a}^{(n)} - b_{0\text{ auf }a}^{(n)\text{ Cor.}} + b_{A\text{ um }N}^{(n)}.$$

Die Bestimmungsgleichung der $n$ten Winkelbeschleunigung $\lambda_a^{(n)}$ der Bahnnormalen a lautet somit:

$${}^{n\,a}b_A^{(n)} = {}^{n\,a}b_0^{(n)} - b_{0\text{ auf }a}^{(n)\text{ Cor.}} + {}^{n\,a}b_{A\text{ um }N}^{(n)}$$

da ${}^{n\,a}b_{0\text{ auf }a}^{(n)} = 0$ und ${}^{n\,a}b_{0\text{ auf }a}^{(n)\text{ Cor.}} = b_{0\text{ auf }a}^{(n)\text{ Cor.}}$ ist.

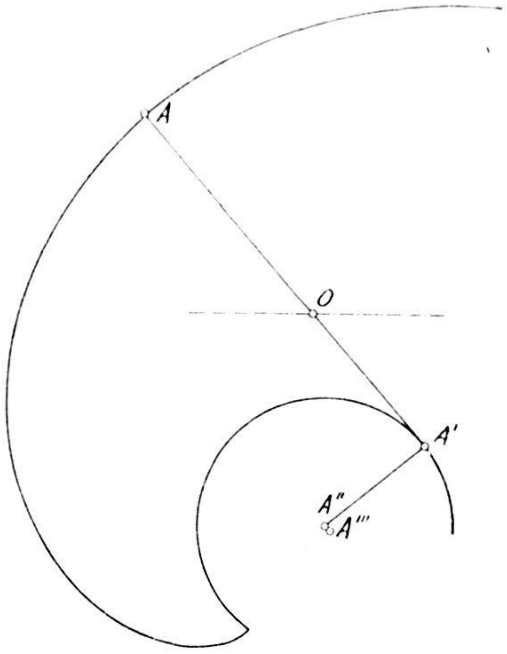

Fig. 25.

Diese Gleichungen angewendet auf die Geschwindigkeitsverhältnisse $(n) = 0$ (Hartmann'sche Konstruktion) ergeben):

$${}^{n\,a}v_A = {}^{n\,a}v_0 - 0 + a \cdot w_a$$

$$60^{+\,n\,a} = 24^{+\,n\,a} + 50^{+\,a} \cdot w_a\,; \quad w_a = 0{,}72^{+}$$

$$v_A = r_a \cdot w_a; \quad r_a = \frac{v_A}{w_a} = 83{,}4^{+\,a}.$$

Die obigen Gleichungen angewendet auf die Beschleunigungsverhältnisse $(n) = 1$ ergeben:

$${}^{n\,a}b_A = {}^{n\,a}b_0 - 2 \cdot {}^{a}v_0 \cdot w_a + a \cdot \lambda_a$$

$$25{,}5^{-\,n\,a} = 32^{-\,n\,a} - 2 \cdot 20{,}5^{-\,a} \cdot 0{,}72^{+} + 50^{+\,a} \cdot \lambda_a$$

$$\lambda_a = 0{,}46^{-}$$

$${}^{n\,a}b_A = r_a \cdot \lambda_a - r_a' \cdot w_a^2\,;$$

$$r_a' = \frac{r_a \cdot \lambda_a - {}^{na}b_A}{w_a^2} = 24{,}7^{+na}$$

$$^{a}b_A = {}^{a}b_N + {}^{a}b_{A\ \text{um}\ N}$$

$$^{a}b_N = {}^{a}b_A - {}^{a}b_{A\ \text{um}\ N} = 18{,}1^{-a},$$

da $^{a}b^{\text{Cor.}}_{0\ \text{auf}\ a} = 0$; so ist $^{a}b_{0\ \text{auf}\ a} = {}^{a}b_0 - {}^{a}b_N = 22{,}4^{+a}$.

Die obigen Gleichungen angewendet auf die zweiten Beschleunigungsverhältnisse $(n) = 2$ ergeben

$$^{na}b_A' = {}^{na}b_0' - 3\, w_a \cdot b_{0\ \text{auf}\ a} - 3\, \lambda_a r_{0\ \text{auf}\ a} + a\lambda_a' + a w_a^3$$

$$\lambda_a' = 0{,}038^{-}$$

$$^{na}b_A' = r_a \lambda_a' - 3\, w_a \lambda_a r_a' + r_a \cdot w_a^3 + r_a'' \cdot w_a^3$$

$$r_a'' = 0{,}6^{+a}.$$

Das Ergebnis ist somit:

$$r_a = 83{,}4^{+a}$$

$$r_a' = 24{,}7^{+na}$$

$$r_a'' = 0{,}6^{+a}.$$