

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 3 (1930)  
**Heft:** VII

**Artikel:** Beitrag zur Optik trüber Schichten  
**Autor:** Gruner, P. / Grütter, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-109814>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Beitrag zur Optik trüber Schichten

von P. Gruner und M. Grütter.

(16. X. 30.)

Inhaltsangabe: Der in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> berechnete Einfluss einer homogenen planparallelen Schicht eines trüben Mediums auf das zurückgeworfene Licht wird hier für das durchgehende Licht berechnet und eingehend diskutiert. Die aufgestellten Formeln geben die Möglichkeit zu beurteilen, in welcher Weise die reine Schichtwirkung die Lichtzerstreuung an einem einzigen Teilchen abändert.

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> wurde die Beleuchtung einer homogenen trüben Schicht untersucht für den Fall des zurückgeworfenen Lichtes. Im folgenden soll der wesentlich kompliziertere Fall des *durchgehenden Lichtes* in ähnlicher Weise behandelt werden. Herr Max Grütter hat diese Aufgabe in sinnreicher Weise gelöst; wir geben hier nur die Hauptgedanken und die Resultate seiner Berechnungen und seiner Figuren.

Eine homogene, isotrope, trübe Schicht, die von parallelen Ebenen begrenzt ist, werde mit parallel einfallendem, unpolarisiertem, monochromatischem Licht beleuchtet. Wie verhält sich die Intensität  $J$  des durchgehenden Lichtes zur Intensität  $J_0 = 1$  des einfallenden Lichtes?

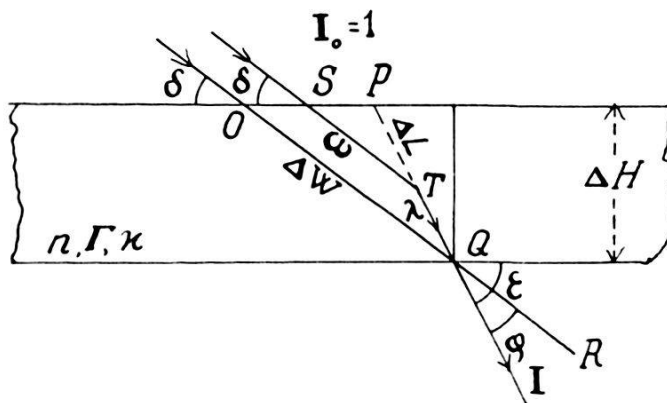


Fig. 1.

Die Schicht von der Dicke  $\Delta H$  (Fig. 1) sei durch drei Konstante charakterisiert:

$n$  = Zahl der suspendierten Teilchen pro Volumeneinheit;

$\kappa$  = Auslöschungskoeffizient pro Längeneinheit;

$\Gamma$  = Zerstreungskoeffizient der einzelnen Teilchen.

<sup>1)</sup> P. GRUNER, Über die Beleuchtung trüber Medien. Helv. phys. acta I, 1, 1928.

$\Gamma$  ist eine Funktion des Zerstreuungswinkels  $\varphi$  (zwischen der Richtung des einfallenden Strahles  $OR$  und des zerstreuten Strahles, der sog. Blickrichtung  $PQ$ ). Es ist  $\varphi = \varepsilon - \delta$ , wenn der Einfallswinkel  $= 90 - \delta$ , der Blickwinkel  $90 - \varepsilon$  ist.

Hat das einfallende Licht beim Eintritt in die Schicht die Intensität  $J_0 = 1$ , so wird ein in  $S$  einfallendes Parallelstrahlenbündel, das an Teilchen bei  $T$  zerstreut wird, in der Blickrichtung einen Anteil liefern, der pro Strecke  $d\lambda$  derselben den Betrag

$$dJ = \Gamma \cdot e^{-\kappa(\omega+\lambda)} \cdot n \cdot d\lambda$$

ausmacht, wobei  $ST = \omega$ ,  $TQ = \lambda$ ,  $OQ = \Delta W$ ,  $PQ = \Delta L$ .

Die Intensität  $J$  (in  $Q$ ) des in die Blickrichtung zerstreuten Lichtes ist dann:

$$J = n \cdot \Gamma \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Delta L} e^{-\kappa(\omega+\lambda)} \cdot d\lambda,$$

was ergibt, da hier

$$\omega + \lambda = \Delta W + \frac{\Delta L - \Delta W}{\Delta L} \lambda:$$

$$J = \frac{n \cdot \Gamma}{\kappa} \frac{\Delta L}{\Delta L - \Delta W} e^{-\kappa \Delta W} (1 - e^{-\kappa(\Delta L - \Delta W)}). \quad (1)$$

Es entspricht dies der Gleichung (1) der früheren Arbeit, wenn  $\delta$  durch  $-\delta$ , also  $\Delta W$  durch  $-\Delta W$  ersetzt wird; jedoch kommt hier noch der Faktor  $e^{-\kappa \Delta W}$  hinzu, der die Erscheinung wesentlich komplizierter gestaltet.

Vermittelst nachfolgender Substitutionen:

$$\kappa \Delta H = h, \quad \kappa \Delta W = \frac{h}{\sin \delta} = h\xi = x, \quad \kappa \Delta L = \frac{h}{\sin \varepsilon} = h\eta = y,$$

$$h \zeta = z = x - y = h \left( \frac{1}{\sin \delta} - \frac{1}{\sin \varepsilon} \right), \quad \underline{J = \frac{n \Gamma}{\kappa} \cdot G},$$

wird:

$$G(\delta, \varepsilon, h) = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon - \sin \delta} \cdot e^{-\frac{h}{\sin \varepsilon}} \left( 1 - e^{-h \left( \frac{1}{\sin \delta} - \frac{1}{\sin \varepsilon} \right)} \right) \quad (2)$$

bzw.

$$G(x, y) = \frac{y}{x-y} (e^{-y} - e^{-x}) \quad (3)$$

bzw.

$$G(y, z) = y \cdot e^{-y} \cdot \frac{1 - e^{-z}}{z} = A(y) \cdot B(z). \quad (4)$$

Diese Funktion  $G$  ist massgebend für die Intensität des durchgehenden Lichtes in Abhängigkeit von der Einfallsrichtung  $\delta$ , der Blickrichtung  $\varepsilon$  und der Dicke  $\Delta H$  der Schicht und ihres Auslöschungskoeffizienten  $\kappa$  ( $h = \kappa \cdot \Delta H$ ), während der andere Faktor  $\frac{nF}{z}$  in  $J$  nur durch die Natur der Teilchen und ihre Zahl bedingt ist.

Die unabhängigen Variablen liegen zwischen folgenden Grenzen:  $0 < h < \infty$ ;  $-\infty < z < +\infty$ ; ferner:

$$\begin{array}{ll} 0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} & 0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \\ \infty \geq x \geq h & \infty \geq y \geq h \\ \infty \geq \xi \geq 1 & \infty \geq \eta \geq 1 \end{array}$$

### A. Die Funktion $G$ .

#### 1. Diskussion der Funktion $G = AB$ ,

wo

$$A(y) = y \cdot e^{-y}, \quad B(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z}.$$

Variiert nur  $\delta$ , also nur  $x$ , so ist das Verhalten von  $G$  durch  $B(z)$  gegeben, wobei in  $z = x - y$  das  $y$  konstant bleibt. Für  $B(z)$  bestehen Tabellen<sup>1)</sup>, der Verlauf ist übrigens einfach: für  $z = -\infty$  ist  $B = +\infty$ , nimmt dann stetig ab, für  $z = 0$  ist  $B = +1$ , für  $z = \infty$  geht  $B$  asymptotisch zu 0.

In Abhängigkeit von  $x$  erhält man  $B(x)$  durch einfache Verschiebung der  $B(z)$ -Kurve um die Abszisse  $+y$ . Durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor  $y \cdot e^{-y}$  erhält man  $G(x)$  bzw.  $G(\delta)$  bei gegebenem  $\varepsilon$  und  $h$ .

Variiert nur  $\varepsilon$ , also nur  $y$ , so nimmt  $G(y)$  vom Wert 0 (für  $y = 0$ ) stetig zu bis zu einem Maximum für  $y = y_m$ , sinkt dann

<sup>1)</sup> L. V. KING, Philos. Transaction London, A 212, 375, 1913.

wieder stetig und erreicht asymptotisch für  $y = \infty$  den Wert  $e^{-x}$ . Die Lage  $y_m$  des Maximums, sowie sein Wert  $G_m$ , lassen sich nicht in einfacher Weise angeben. Aber für ein vorgeschriebenes  $x$  findet man das zugehörige  $y_m$  als Lösung der Gleichung

$$\frac{dG}{dy} = 0:$$

$$\Phi(x, y) = y(y - x)e^{-y} - x(e^{-y} - e^{-x}) = 0 \quad (5)$$

Die dadurch bestimmte Kurve verläuft einfach: für  $x = 0$  ist  $y = +\infty$ , die Kurve sinkt stetig, für  $x = 2$  wird auch  $y = 2$ , für  $x = \infty$  erreicht die Kurve asymptotisch den Wert  $y = +1$ . Aus dem gefundenen  $y_m$  ergibt sich dann  $G_m$ .

## 2. Übergang zu $\delta$ und $\varepsilon$ ; Abhängigkeit von $h$ .

Zur weiteren Diskussion sind die Substitutionsvariablen  $x, y, z$  bzw.  $\xi, \eta, \zeta$  wieder durch  $\delta, \varepsilon, h$  zu ersetzen, gemäss

$$x = \xi h = \frac{h}{\sin \delta}, \quad y = \eta h = \frac{h}{\sin \varepsilon}, \quad z = x - y;$$

also

$$\frac{\partial G}{\partial \delta} = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\delta}, \quad \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\varepsilon}.$$

Die Abhängigkeit der Variablen  $\xi$  (bzw.  $\eta$ ) von  $\delta$  (bzw.  $\varepsilon$ ) ist einfach: Von  $\xi = \infty$  (für  $\delta = 0$ ) sinkt  $\xi$  mit wachsendem  $\delta$  stetig und erreicht für  $\delta = \frac{\pi}{2}$  den Wert  $\xi = 1$ , mit

$$\frac{d\xi}{d\delta} = 0.$$

Ferner ist

$$\frac{dx}{d\delta} = -h \frac{\cos \delta}{\sin^2 \delta}, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = -h \frac{\cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon}.$$

Variiert nur  $h$ , so nimmt  $G(h)$  vom Wert 0 (für  $h = 0$ ) stetig zu bis zu einem Maximum für  $h = h_m$ , sinkt dann wieder stetig, hat bei  $h_w = 2h_m$  einen Wendepunkt und erreicht asymptotisch für  $h = \infty$  den Wert 0. Hierbei ist

$$h_m = \frac{\lg \sin \varepsilon - \lg \sin \delta}{\frac{1}{\sin \delta} - \frac{1}{\sin \varepsilon}}. \quad (6)$$

Dieser Wert ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{dG}{dh} = 0,$$

die in die einfache Form gebracht werden kann:

$$A(y) = A(x). \quad (7)$$

Die dadurch bestimmte Kurve gibt für  $x = 0: y = \infty$ ; sie sinkt dann stetig, es wird  $y = 1$  für  $x = 1$ ; sie erreicht asymptotisch den Wert  $y = 0$  für  $x = \infty$ .

### 3. Diskussion der Kurvenschar $G(\varepsilon)$ mit Parameter $\delta$ .

Bei gegebenem  $h$  ist der Verlauf von  $G$  als Funktion von  $\varepsilon$  für irgendein  $\delta$  durch  $G(y)$ , s. S. 479, charakterisiert, sofern man  $x, y, z$  durch  $\delta, \varepsilon, h$  ausdrückt. Demnach fangen alle  $G(\varepsilon)$ -Kurven für  $\varepsilon = 0$  mit dem Wert

$$e^{-\frac{h}{\sin \delta}}$$

an, wobei die Neigung der Kurve durch

$$\left| \frac{dG}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{\sin \delta} \cdot e^{-\frac{h}{\sin \delta}}$$

gegeben ist, und alle hören für  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$  mit einem grösseren oder kleineren positiven Wert von  $G$  auf, wobei die Kurve mit horizontaler Tangente ausläuft (s. Fig. 2).

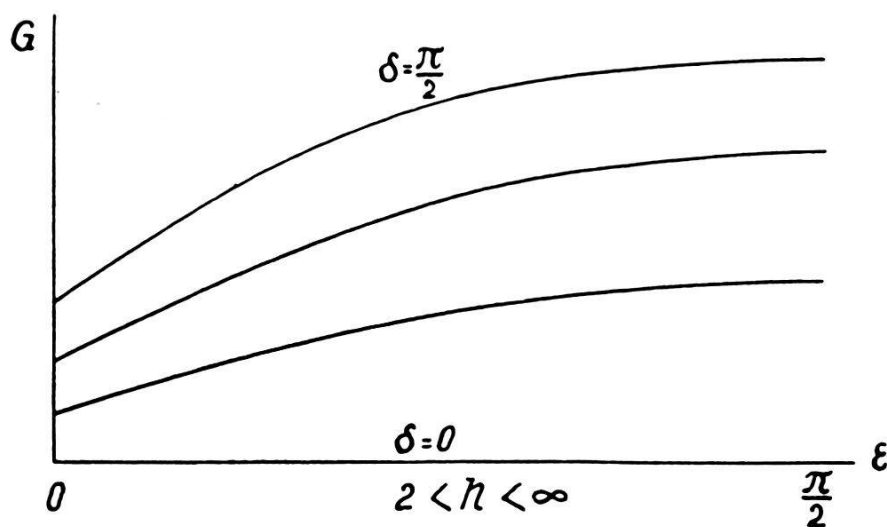


Fig. 2 a.

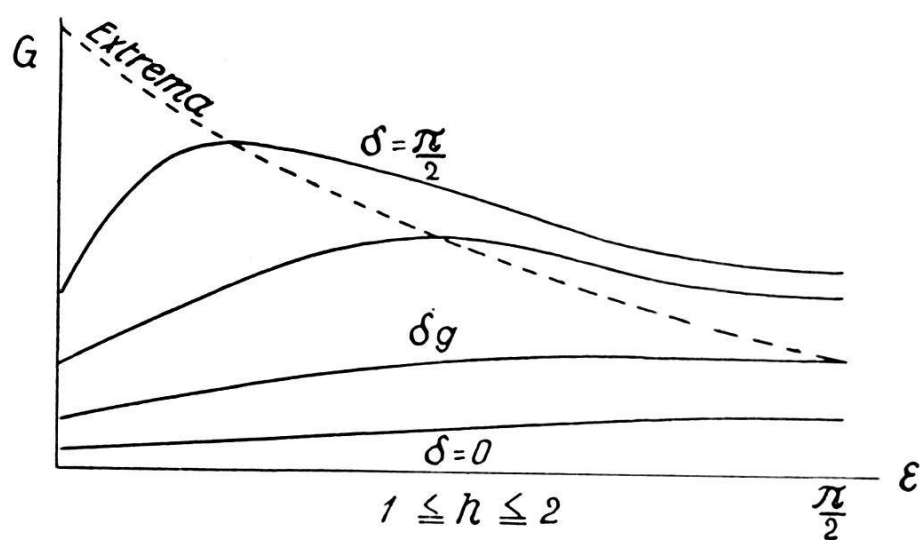


Fig. 2 b.

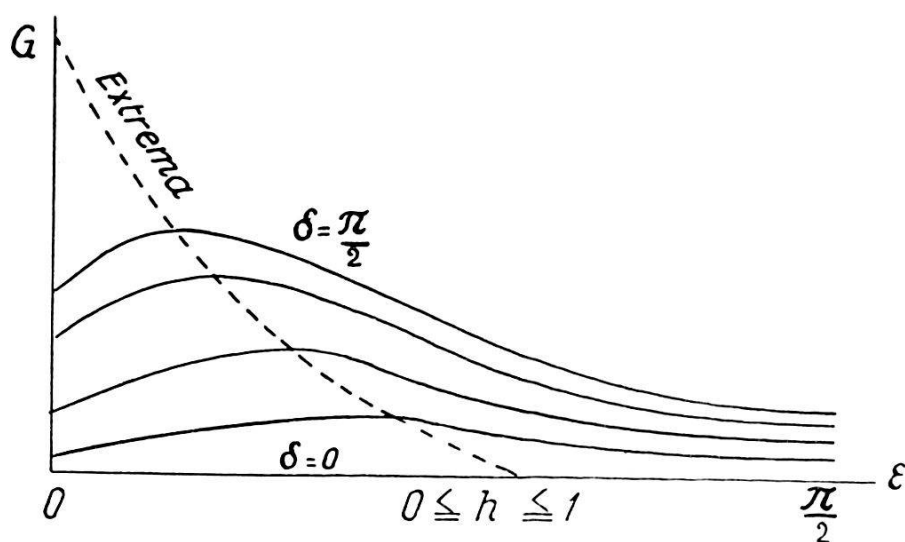


Fig. 2 c.

Diese Kurven können ein Maximum haben, oder aber sie steigen stetig von  $\varepsilon = 0$  bis  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ . Die Lage des Maximums von  $G$  ist bestimmt durch

$$\varepsilon_m = \arcsin \left( \frac{h}{y_m} \right),$$

wobei  $y_m$  sich aus der Gleichung (5):  $\Phi(x y_m) = 0$  für das jeweiligen gegebene

$$x = \frac{h}{\sin \delta}$$

bestimmt. Offenbar muss

$$0 \leq \varepsilon_m \leq \frac{\pi}{2}$$

sein, also  $0 \leq h \leq y_m$ ; nur unter dieser Bedingung weisen die Kurven ein Maximum auf. Somit gibt  $y_m \geq h$  die Grenze für die Kurven mit Maximum. Nun kann umgekehrt zu jedem  $y_m = h$  aus  $\Phi(x_g h) = 0$  ein zugehöriger Grenzwert  $x_g$  und daraus

$$\delta_g = \arcsin \frac{h}{x_g}$$

bestimmt werden, so dass die Kurven mit Maximum nur auftreten für  $x \leq x_g$ , also für  $\delta \geq \delta_g$ .

Mit wachsendem Parameter  $\delta$  verhalten sich die Kurven der Schar  $G(\varepsilon)$  folgendermassen: Für  $\delta = 0$  wird  $G(\varepsilon) = 0$ ,  $G$  liegt ganz in der Abszissenaxe. Bei wachsendem  $\delta$  nehmen alle Ordinaten stetig zu, die Kurven der Schar erheben sich immer höher über der Abszissenaxe ohne sich zu schneiden, die oberste Kurve ist die für  $\delta = \frac{\pi}{2}$ .

Dabei werden diese Kurven, je nach dem Wert von  $h$ , Maxima aufweisen oder nicht, entsprechend den Bedingungen:  $y_m \geq h$ ,  $\delta \geq \delta_g$ .

Für  $\delta = 0$  ist  $x = \infty$ ,  $y_m = 1$  (nach Gleichung [5]), also treten hier Maxima auf für  $h \leq 1$ .

Für  $\delta = \frac{\pi}{2}$  ist  $x = h$ , also treten Maxima auf für  $y_m \geq x$ ; aber aus der Kurve  $\Phi(xy) = 0$  ist ersichtlich, dass  $y = x = 2$  wird, und dass  $y > x$  nur möglich ist, wenn  $x < 2$ . Da aber  $x = h$  ist, so treten hier Maxima auf für  $h \leq 2$ .

Resultat: Für  $0 \leq h \leq 1$  haben alle  $G(\varepsilon)$ -Kurven für jeden Parameterwert  $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$  ein Maximum bei der Abszisse

$$\varepsilon_m = \arcsin \frac{h}{y_m}.$$

Für  $2 < h < \infty$  hat keine  $G(\varepsilon)$ -Kurve ein Maximum. Für  $1 \leq h \leq 2$  haben nur diejenigen  $G(\varepsilon)$ -Kurven ein Maximum, für welche  $\delta \geq \delta_g$ .

Die Maxima  $\varepsilon_m$  wandern mit wachsendem Parameter  $\delta$  zu immer kleineren  $\varepsilon$ , ihre Werte  $G_m$  nehmen beständig zu (s. Fig. 2).

#### 4. Diskussion der Kurvenschar $G(\varepsilon)$ mit Parameter $h$ .

Bei gegebenem  $\delta$  ist der Verlauf von  $G(\varepsilon)$  mit veränderlichem Parameter  $h$  folgender: Für  $h = 0$  fällt ein Teil der  $G(\varepsilon)$ -Kurve in die Ordinatenaxe, von  $G = 0$  bis  $G = 1$ , der andere Teil in



die Abszissenaxe, von  $\varepsilon = 0$  bis  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ . Mit wachsendem  $h$  löst sich die  $G$ -Kurve ab; ihre Ordinate

$$e^{-\frac{h}{\sin \delta}}$$

für  $\varepsilon = 0$  sinkt mit wachsendem  $h$  von 1 bis 0. Für  $\varepsilon > 0$  steigt die  $G$ -Kurve an und erreicht bei  $\varepsilon_m$  ihr Maximum, um dann wieder für  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$  zu einem positiven Wert mit horizontaler Tangente zu gelangen.

Solange  $h \leq 1$  treten immer Maxima auf, ihre Lage  $\varepsilon_m$  verschiebt sich bei wachsendem  $h$  zu immer grösseren  $\varepsilon$ , die Maxima

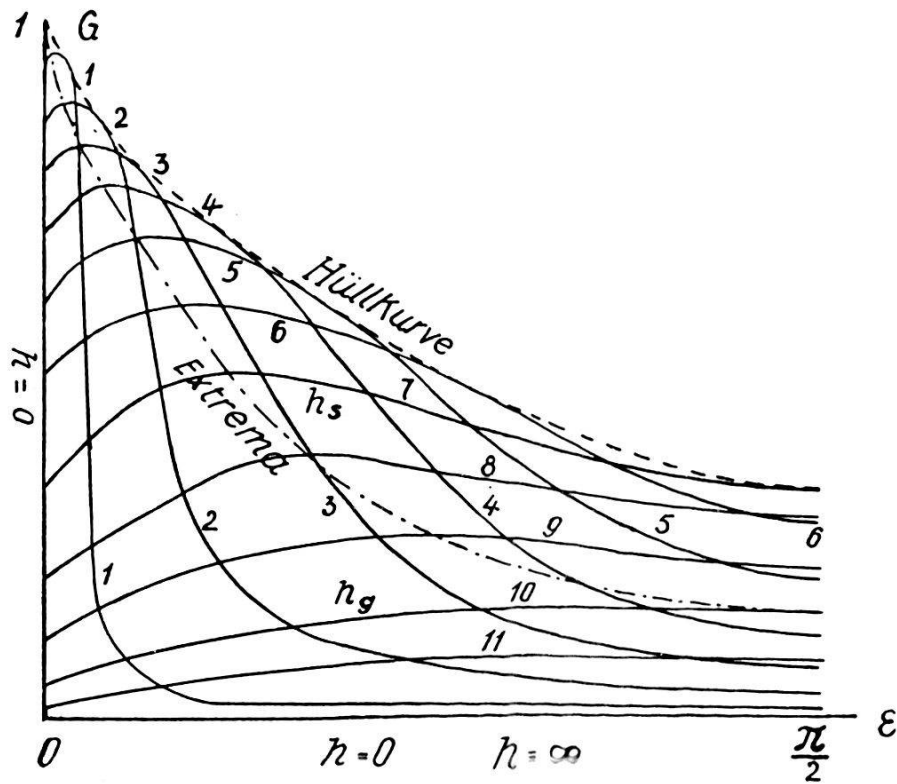


Fig. 3.

selber nehmen immer ab. Offenbar schneiden sich die Nachbar-kurven; die Ordinate  $\varepsilon_s$  eines solchen Schnittpunktes ist aus der Gleichung

$$\frac{dG}{dh} = 0,$$

d. h. aus der Gleichung (7):  $A(x) = A(y)$  zu bestimmen, in ähnlicher Weise wie  $\varepsilon_m$  aus (5). Es zeigt sich, dass  $\varepsilon_s > \varepsilon_m$ , d. h. die Schnittpunkte liegen immer auf dem fallenden Stück der  $G(\varepsilon)$ -Kurve. Mit wachsendem  $h$  schiebt sich  $\varepsilon_s$  zu wachsenden  $\varepsilon$ .

Das Sichüberschneiden hört auf, sobald  $\varepsilon_s > \frac{\pi}{2}$  wird (also noch bevor  $\varepsilon_m = \frac{\pi}{2}$ ), d. h. für einen bestimmten Wert von

$$h = h_s = \frac{\lg n \sin \delta}{1 - \frac{1}{\sin \delta}},$$

wobei  $0 \leq h_s \leq 1$ . Diese zu  $h_s$  gehörende Kurve (s. Fig. 3) grenzt also die oberen, sich überschneidenden  $G(\varepsilon)$ -Kurven von den unteren ab; sie hat für  $\varepsilon = 0$  und  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$  denselben  $G$ -Wert:

$$e^{-\frac{h}{\sin \delta}};$$

die Kurven für  $h < h_s$  (Kurven 1—6 in Fig. 3) haben bei  $\varepsilon = 0$  eine grössere Ordinate als bei  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ , umgekehrt die Kurven für  $h > h_s$  (Kurven 8—11 in Fig. 3).

Für  $h_s \leq h \leq 1$  sinken mit wachsendem  $h$  alle Ordinaten  $G$ , haben aber immer noch ein Maximum für ein nach wachsenden  $\varepsilon$  rückendes  $\varepsilon_m$ .

Sobald  $h > 1$ , können die Maxima nur für bestimmte  $\delta > \delta_g$  auftreten, d. h. bis  $\varepsilon_m > \frac{\pi}{2}$  wird. Dies tritt, bei gegebenem  $\delta$ , für ein bestimmtes  $h = h_g$  ein; die Rechnung zeigt, dass stets  $1 \leq h_g \leq 2$ , also immer  $h_g > h_s$ .

Die zu  $h_g$  gehörende Kurve grenzt die  $G$ -Kurven mit Maxima von den darunter liegenden Kurven ab, die ohne Maximum stetig mit  $\varepsilon$  anwachsen. Mit wachsendem  $h$  sinken diese Kurven immer tiefer; für  $h = \infty$  wird  $G(\varepsilon) = 0$ .

Aus  $A(x) = A(y)$  lässt sich auch die Hüllkurve der ganzen Kurvenschar (s. Fig. 3) bestimmen.

### 5. Diskussion der Kurvenscharen $G(\delta)$ mit Parameter $\varepsilon$ .

Bei gegebenem  $h$  ist der Verlauf von  $G$  als Funktion von  $\delta$  für irgendein  $\varepsilon$  durch  $G(x)$ , s. S. 479, charakterisiert, sofern man  $x, y, z$  durch  $\delta, \varepsilon, h$  ausdrückt. Alle  $G(\delta)$ -Kurven fangen für  $\delta = 0$  mit  $G = 0$  an; mit zunehmendem  $\delta$  wachsen alle Ordinaten stetig und erreichen, ohne ein Maximum oder Minimum zu bilden, für  $\delta = \frac{\pi}{2}$  einen grösseren oder kleineren positiven Wert (s. Fig. 4).

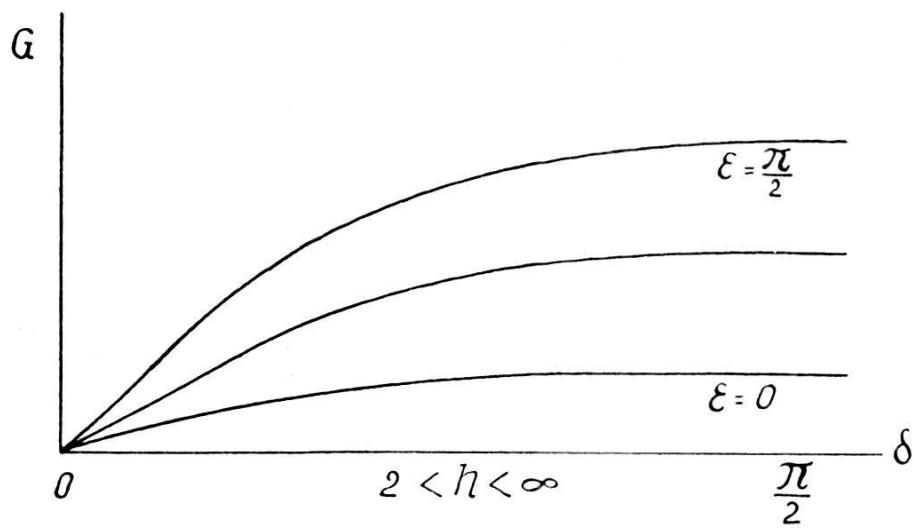


Fig. 4a.

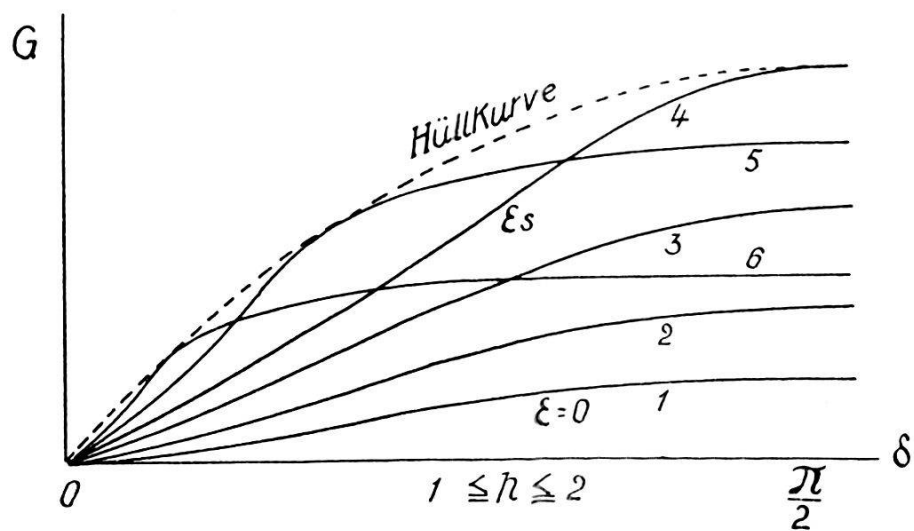


Fig. 4b.

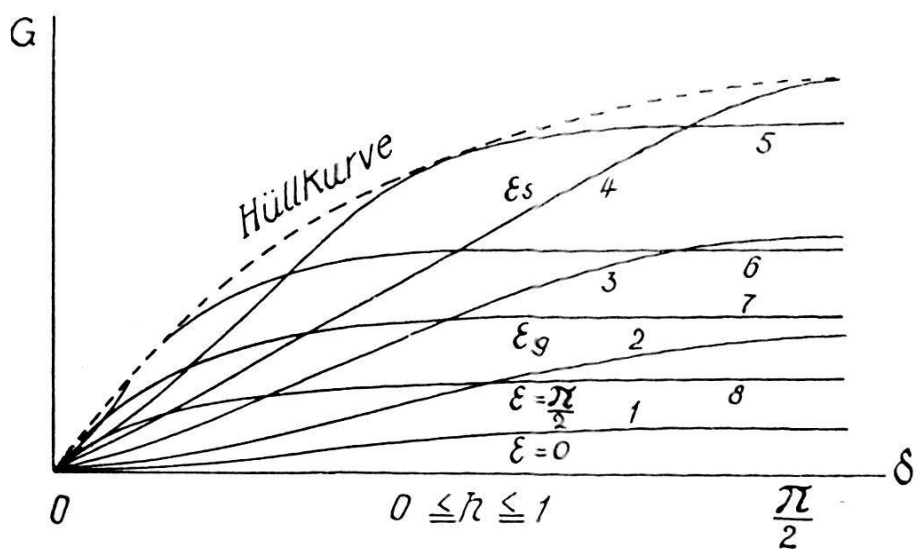


Fig. 4c.

Für  $\varepsilon = 0$  wird

$$G(\delta) = e^{-\frac{h}{\sin \delta}},$$

eine Kurve, die erst langsam (unter spitzem Winkel) ansteigt, dann einen Wendepunkt erreicht und für  $\delta = \frac{\pi}{2}$  mit horizontaler Tangente im Wert  $e^{-h}$  endigt. Wächst der Parameter  $\varepsilon$ , so wachsen alle Ordinaten, die  $G$ -Kurven steigen ohne sich zu schneiden und behalten ihre Form (Wendepunkt, kein Maximum).

Bei einer bestimmten Grenze  $\varepsilon_s$  (bei geeignetem  $h$ ) beginnt ein Überschneiden der Kurven: zwei benachbarte Kurven schneiden sich im Punkt

$$\frac{dG}{d\varepsilon} = 0, \text{ also } \frac{dG}{d\delta} = 0;$$

d. h. die Gleichung (5):  $\Phi(x_s, y) = 0$  gibt für den betreffenden Parameter

$$\varepsilon = \arcsin \left| \frac{y}{h} \right|$$

ein zugehöriges  $x_s$ , bzw.

$$\delta_s = \arcsin \left( \frac{h}{x_s} \right),$$

das die Abszisse des betreffenden Überschneidungspunktes gibt. Eine solche Überschneidung tritt also auf für  $\delta_s \leq \frac{\pi}{2}$ , also  $x_s \geq h$ . Diesem Grenzfall,  $x_s = h$ , gehört aus  $\Phi(x_s, y) = 0$  ein bestimmtes  $y_s$  zu, also ein Grenzparameter

$$\varepsilon_s = \arcsin \left( \frac{h}{y_s} \right).$$

Für  $\varepsilon = \varepsilon_s$  entsteht demnach eine Grenzkurve  $G_s(\delta)$  mit  $\delta_s = \frac{\pi}{2}$ ; erst für  $\varepsilon > \varepsilon_s$  beginnen die Nachbarkurven der Schar sich zu schneiden; die Abszisse  $\delta_s$  des Schnittpunktes rückt mit wachsendem  $\varepsilon$  zu kleineren  $\delta$ . Bei sehr kleiner Änderung von  $\varepsilon$  wachsen die Ordinaten  $G(\delta)$  für  $\delta < \delta_s$  und nehmen ab für  $\delta > \delta_s$ ; im allgemeinen sinken sie mit  $\delta$ .

Für  $\varepsilon_g = \arcsin h$ , d. h. für  $y_g = 1$ ,  $x = \infty$  wird  $\delta_s = 0$ ; hier verschwinden wieder die Überschneidungen; mit wachsendem  $\varepsilon > \varepsilon_g$  (es ist stets  $\varepsilon_g \geq \varepsilon_s$ ) sinken alle Ordinaten von  $G(\delta)$  stetig, ohne Wendepunkt, bis zum positiven Endwert

$$G\left(\varepsilon = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \delta}{1 - \sin \delta} \left( e^{-h} - e^{-\frac{h}{\sin \delta}} \right).$$

Die ganze Kurvenschar besitzt eine leicht anzugebende Hüllkurve (s. Fig. 4).

Das eben geschilderte Verhalten gilt für  $0 \leq h \leq 1$ .

Für  $h \geq 2$  ändert sich die Sachlage: da  $\delta_s \leq \frac{\pi}{2}$  sein soll,  $x_s \geq h$ , so wird  $x_s \geq 2$ ; aber aus (5) folgt für das zugehörige  $y_s \leq 2$ , somit  $\varepsilon_s \geq \frac{\pi}{2}$ ; da  $\varepsilon_s \leq \frac{\pi}{2}$  sein muss, so folgt, dass für  $h > 2$  die Überschneidungen aufhören. Für  $2 < h < \infty$  wachsen alle  $G(\delta)$ -Kurven mit wachsendem  $\delta$  stetig.

Im Zwischengebiet:  $1 \leq h \leq 2$  wird  $\varepsilon_g = \arcsin h \geq \frac{\pi}{2}$ , d. h. diese Grenzkurve fällt mit der Endkurve für  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$  zusammen; folglich überschneiden sich alle Kurven, für welche  $\varepsilon_s \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$ .

### 6. Diskussion der Kurvenscharen $G(\delta)$ mit Parameter $h$ .

Bei gegebenem  $\varepsilon$  ist der Verlauf von  $G(\delta)$  mit veränderlichem Parameter  $h$  folgender: Für  $h = 0$  ist  $G = 0$ ; mit wachsendem  $h$

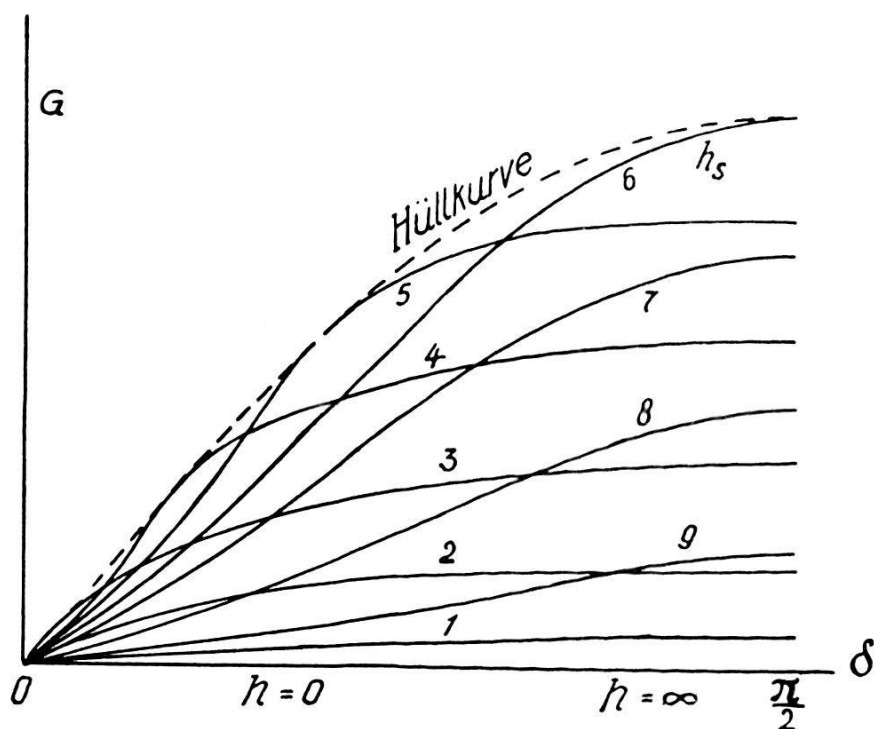


Fig. 5.

wachsen alle Ordinaten (ausser für  $\delta = 0$ , wofür stets  $G = 0$ ), aber so, dass sich benachbarte Kurven im Punkt mit der Abszisse  $\delta_s$  schneiden. Dieser Schnittpunkt geht mit zunehmendem  $h$  zu

grösseren  $\delta$ . Ist  $\delta_s = \frac{\pi}{2}$  geworden, was für einen bestimmten Wert

$$h = h_s = \frac{\lg \sin \varepsilon}{1 - \frac{1}{\sin \varepsilon}}$$

eintritt, so hören die Überschneidungen auf; die Kurve mit Parameter  $h_s$  bildet eine Grenzkurve; wächst  $h > h_s$ , so nehmen die  $G(\delta)$ -Kurven wieder ab, ohne dass sie sich schneiden. Für  $h = \infty$  geht  $G = 0$  in die Abszissenaxe über (s. Fig. 5).

**B. Die Funktion  $R = \frac{1}{G} \cdot \frac{dG}{d\varphi}$ .**

1. Die Zerlegung von  $R(\delta) = \frac{1}{G} \cdot \frac{dG}{d\delta}$ .

Es wird später (s. S. 499) auf die Bedeutung dieser Funktion

$$R = \frac{1}{G} \frac{dG}{d\varphi}$$

hingewiesen; vorläufig soll nur ihr analytischer Verlauf besprochen werden. Da  $\varphi = \varepsilon - \delta$ , kann entweder

$$R(\delta) = \frac{1}{G} \frac{dG}{d\delta},$$

worin  $\varepsilon$  als Parameter auftritt, oder

$$R(\varepsilon) = \frac{1}{G} \cdot \frac{dG}{d\varepsilon},$$

mit Parameter  $\delta$ , untersucht werden.

Zunächst werde  $R(\delta)$ , das naturgemäss immer das entgegengesetzte Zeichen wie  $R$  hat, behandelt.

Es ist zweckmässig, dieses  $R$  nach zwei verschiedenen Gesichtspunkten in zwei Faktoren zu zerlegen:

$$R(\delta) = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{z}{e^z - 1}\right) \frac{\cos \delta}{\sin^2 \delta} h = \left(1 - \frac{z}{e^z - 1}\right) \frac{\cotg \delta}{\sin \varepsilon - \sin \delta} \sin \varepsilon, \tag{8}$$

$$R(\delta) = U(\delta, h) \cdot V(z), \tag{9a}$$

$$R(\delta) = S(\delta, \varepsilon) \cdot K(z), \tag{9b}$$

worin

$$\left. \begin{aligned} U(\delta, h) &= h \frac{\cos \delta}{\sin^2 \delta}; \quad S(\delta, \varepsilon) = \frac{\cotg \delta}{\sin \varepsilon - \sin \delta} \sin \varepsilon; \\ K(z) &= 1 - \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{B(-z)}; \quad V(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} K(z). \end{aligned} \right\} (10)$$

Der Verlauf dieser vier Funktionen sei nur kurz angedeutet, wobei zunächst noch auf die Grenzwerte der Variablen hingewiesen wird: wenn  $\delta$  die Werte  $0, \varepsilon, \frac{\pi}{2}$  annimmt, geht  $z$  von  $+\infty$  zu  $0$  und zu einem negativen Wert:

$$-z_\varepsilon = -h \frac{1 - \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon}.$$

$U(\delta)$  ist immer positiv,  $\frac{dU}{d\delta}$  immer negativ; wenn  $\delta$  von  $0$  bis  $\frac{\pi}{2}$  wächst, fällt  $U$  stetig von  $+\infty$  zu  $0$  ab. Für  $h = 0$  schmiegt sich die  $U(\delta)$ -Kurve der Ordinaten- und Abszissenaxe an, für wachsende  $h$  löst sie sich immer mehr, für  $h = \infty$  wird sie zur Vertikalen in  $\delta = \frac{\pi}{2}$ .

$S(\delta)$  besteht aus zwei Ästen; für  $\delta = 0$  ist

$$S = +\infty, \quad \frac{dS}{d\delta} = -\infty;$$

die Kurve sinkt mit wachsendem  $\delta$  aus dem  $\infty$  herunter, bleibt aber immer positiv, erreicht bei einer Abszisse  $\delta_m$  ein Minimum und steigt dann wieder ins  $\infty$ , wenn  $\delta = \varepsilon$  (Parameter) wird; dabei ist also stets  $\delta_m \leq \varepsilon$ . Für  $\delta = \varepsilon$  wird

$$S = \pm \infty, \quad \frac{dS}{d\delta} = \pm \infty;$$

die Vertikale  $\delta = \varepsilon$  ist eine Asymptote,  $S$  springt dort von  $+\infty$  nach  $-\infty$  und nimmt nun mit wachsendem  $\delta > \delta_m$  negativ ab und erreicht für  $\delta = \frac{\pi}{2}$  die Abszissenaxe unter einem spitzen Winkel

$$\left( S = 0, \quad \frac{dS}{d\delta} = + \frac{\sin \varepsilon}{1 - \sin \varepsilon} \right).$$

Die Extrema von  $S$ , speziell  $\delta_m$ , ergeben sich aus der Gleichung:  $\sin \varepsilon = \sin \delta(2 - \sin^2 \delta)$ .  $S$  hängt nicht von  $h$  ab.

$K(z)$  kommt für  $z = -\infty$  aus dem negativen Unendlichen, hat bei

$$-z_\varepsilon \left( \delta = \frac{\pi}{2} \right)$$

einen negativen Wert, nimmt mit wachsendem  $z$  negativ ab, erreicht für  $z = 0$  ( $\delta = \varepsilon$ ) den Wert 0 und steigt bei wachsendem  $z$  positiv langsam an und erreicht für  $z = +\infty$  ( $\delta = 0$ ) asymptotisch den Wert +1.

$V(z) = \frac{1}{z} K(z)$  ist immer positiv,  $\frac{dV}{dz}$  immer negativ. Für  $z = -\infty$  hat  $V$  asymptotisch den Wert +1, sinkt dann stetig mit wachsendem  $z$ , hat bei  $-z_\varepsilon$  einen positiven Wert  $> \frac{1}{2}$ , wird bei  $z = 0$  ( $\delta = \varepsilon$ ) gleich  $+\frac{1}{2}$  und erreicht bei  $z = +\infty$  ( $\delta = 0$ ) asymptotisch den Wert Null.

Aus diesen Angaben ist leicht folgendes zu ersehen:

$R(\delta)$  ist immer positiv; für  $\delta = 0$  ist  $R = \infty$ , mit der Ordinatenaxe als Asymptote, für  $\delta = \varepsilon$  wird

$$R = \frac{h}{2} \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon},$$

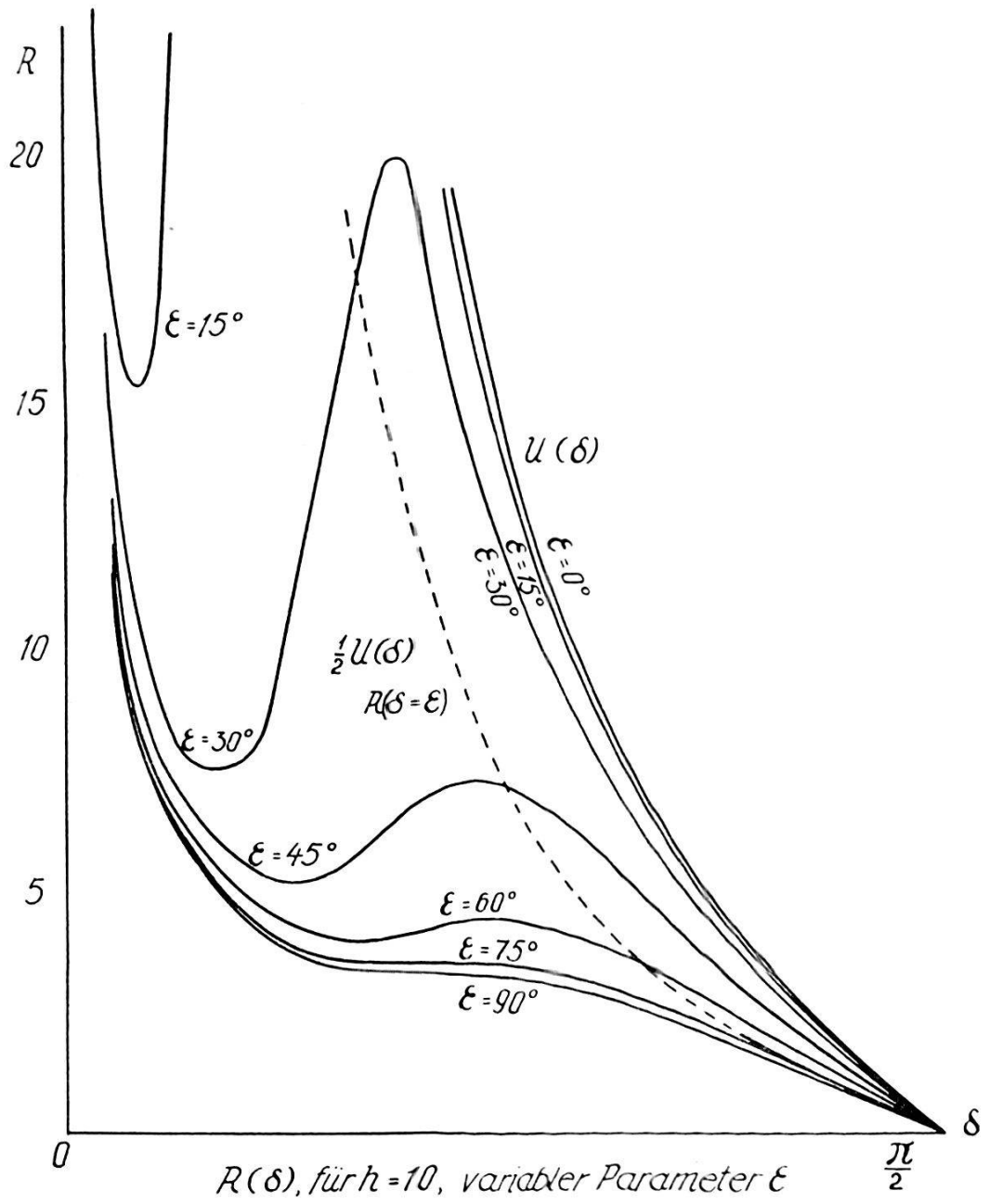
für  $\delta = \frac{\pi}{2}$  endigt die  $R$ -Kurve unter einem spitzen Winkel im Wert  $R = 0$  (s. Fig. 6, 7, 8, die für bestimmte Werte berechnet wurden).

*In Abhängigkeit vom Parameter  $\varepsilon$*  ist zu erkennen: Für  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$  hat  $R(\delta)$  die kleinsten Werte; mit abnehmendem  $\varepsilon$  nehmen die Ordinaten zu; für  $\varepsilon = 0$  wird  $R(\delta) = U(\delta)$ .

*In Abhängigkeit vom Parameter  $h$*  gilt: Für  $h = 0$  schmiegt sich  $R$  der Ordinaten- und Abszissenaxe an; mit wachsendem  $h$  löst sich die  $R$ -Kurve davon ab, die Ordinaten nehmen zu. Wenn  $h$  gross ist und  $\varepsilon$  genügend klein, so dass  $z$  negativ und sehr gross wird, so nähert sich  $R(\delta)$  im Gebiet  $\delta < \varepsilon$  der  $S$ -Kurve, im Gebiet  $\delta > \varepsilon$  der  $U$ -Kurve; für  $h = \infty$  trifft dies exakt zu.

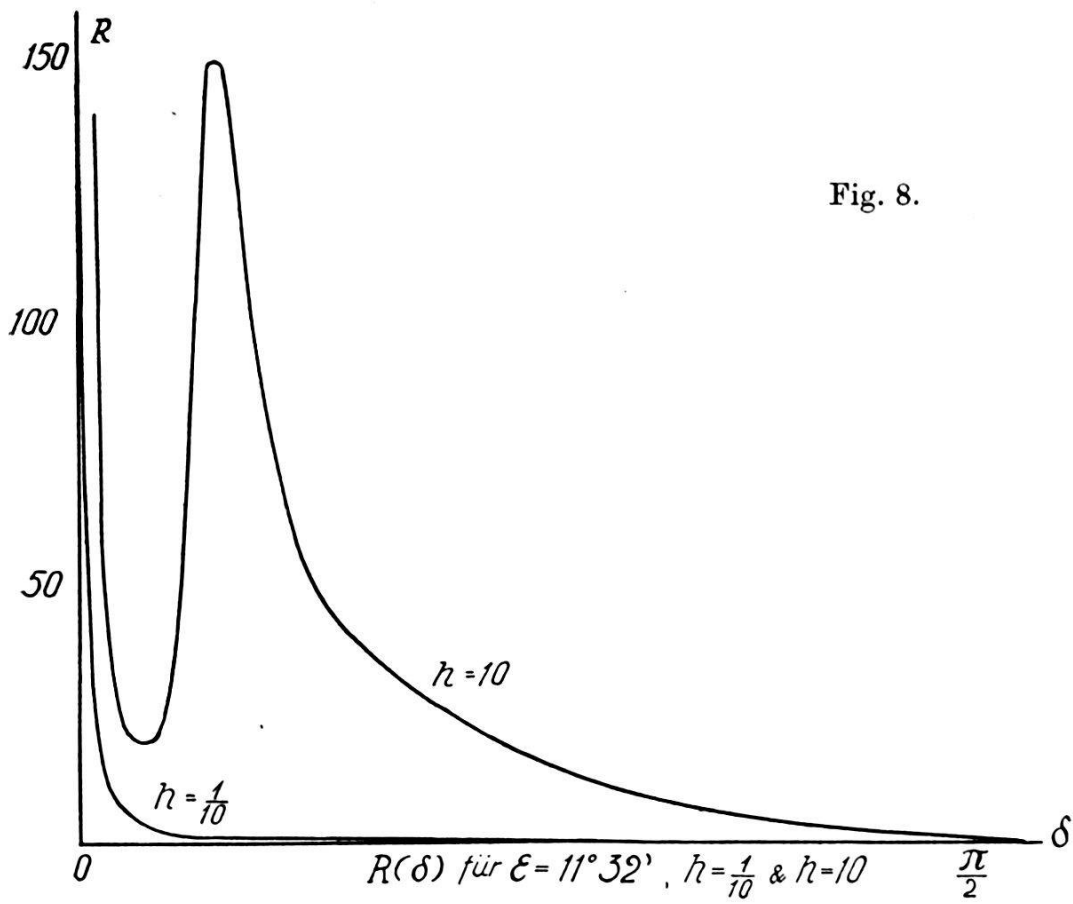
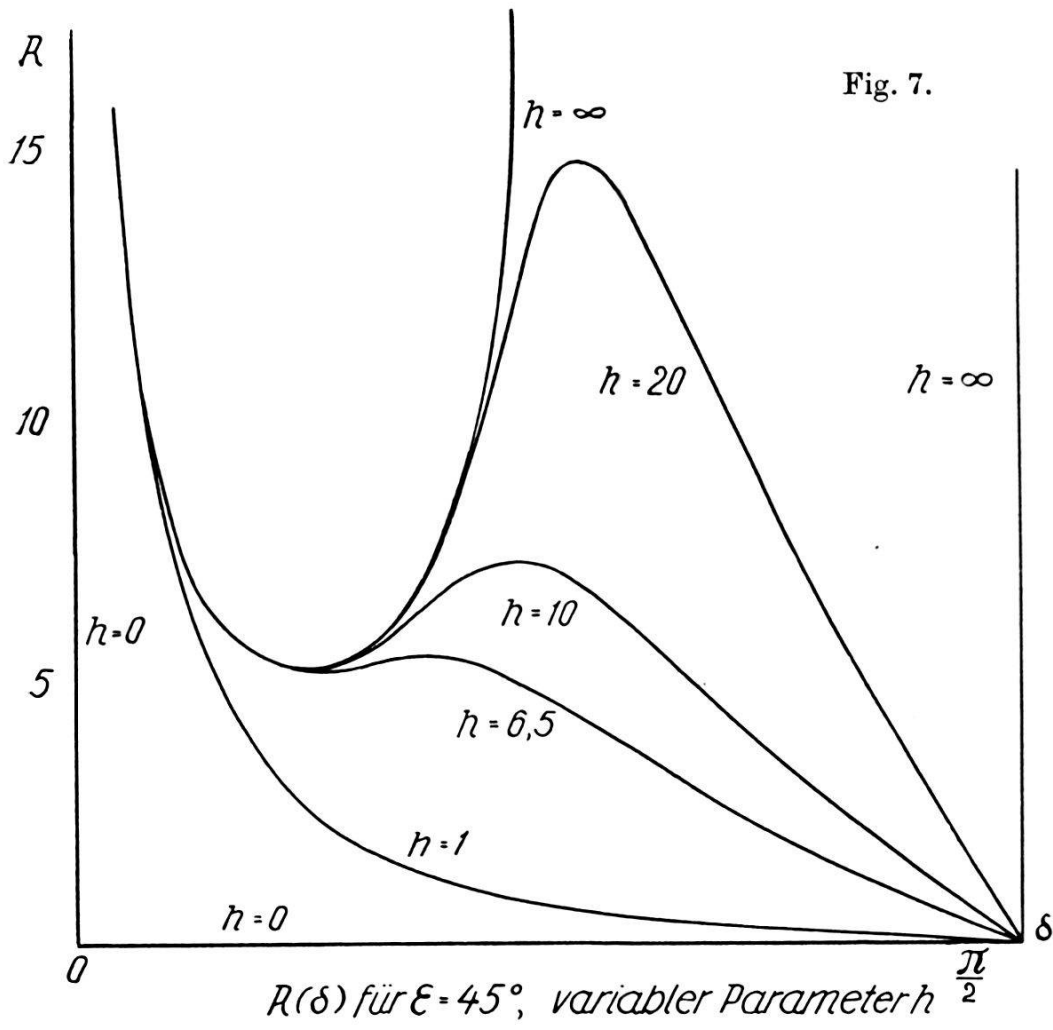
Das genauere Verhalten von  $R$  erfordert die Bestimmung seiner Extrema.





$R(\delta)$ , für  $h=10$ , variabler Parameter  $\epsilon$

Fig. 6.



2. Die Extrema von  $R(\delta)$ .

Die Bedingung für dieselben lässt sich schreiben:  $l(\zeta, h) = r(\xi)$ , wo

$$l(\zeta, h) = \zeta (e^{h\zeta} - 1) \frac{h\zeta - (e^{h\zeta} - 1)}{h^2 \zeta^2 \cdot e^{h\zeta} - (e^{h\zeta} - 1)^2},$$

$$r(\xi) = \frac{\xi}{\frac{1}{1 - \frac{1}{\xi^2}} + 1} = \frac{\cos^2 \delta}{(1 + \cos^2 \delta) \sin \delta},$$

$$\zeta = \xi - \eta, \quad \xi = \frac{1}{\sin \delta}, \quad \eta = \frac{1}{\sin \varepsilon}; \quad 1 < \xi < \infty.$$

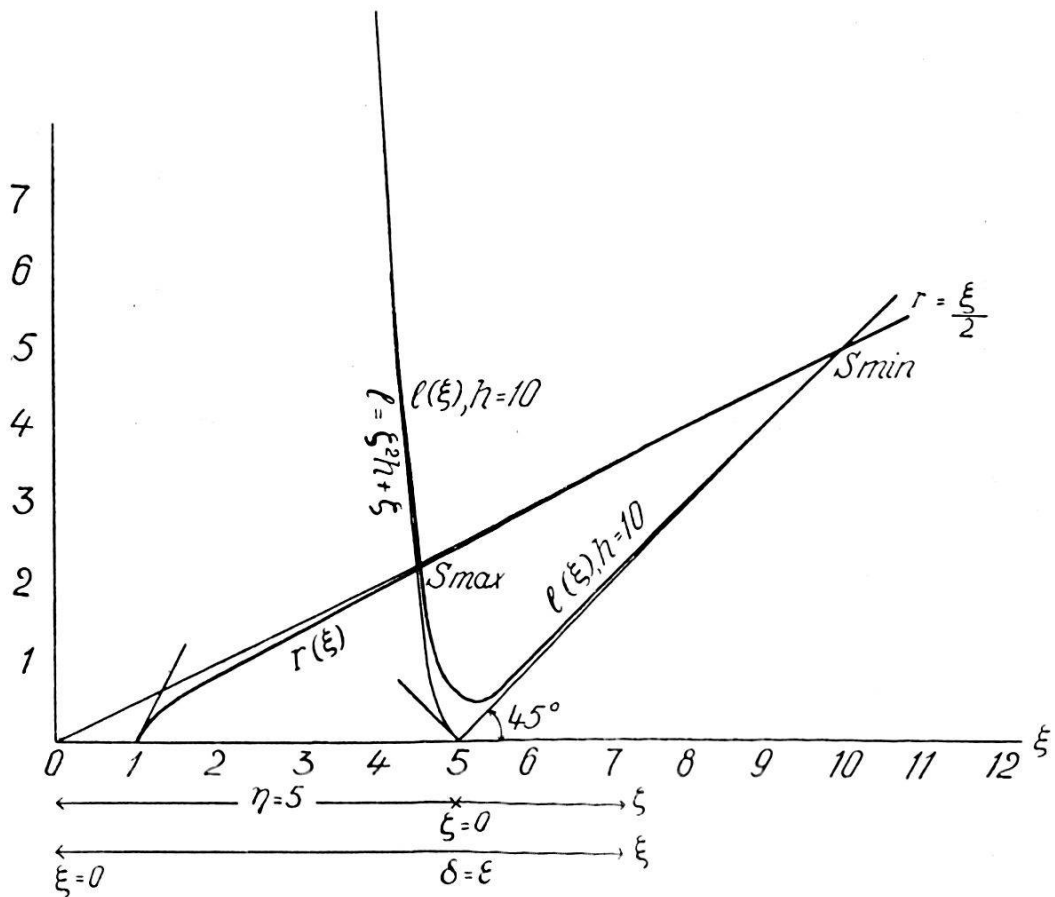


Fig. 9.

Die Funktion  $r(\xi)$  (s. Fig. 9) beginnt bei  $\xi = 1$  mit  $r = 0$  und

$$\frac{dr}{d\xi} = 2,$$

steigt stetig an und nähert sich mit grossen  $\xi$  asymptotisch der Geraden  $r = \frac{\xi}{2}$ .

Die Funktion  $l(\zeta, h) = l(\xi - \eta, h)$ , worin  $z = h\zeta$ , ist auch immer positiv; bei grossen negativen  $z$  verläuft sie wie die Parabel

$l = \zeta^2 h + \zeta$ , sinkt relativ rasch zu einem Minimum bei ungefähr  $h \cdot \zeta_m = 2,3$ , steigt dann mit wachsendem  $\zeta$  wieder an und nähert sich asymptotisch der Geraden  $l = \zeta$ . Durch Parallelverschiebung der Kurve um die Abszisse  $\eta$  erhält man die  $l(\xi, h)$ -Kurve in Abhängigkeit von  $\xi$ . Ihr Zusammenhang mit dem Parameter  $\varepsilon$  ist durch die Grösse dieser Verschiebung,

$$\eta = \frac{1}{\sin \varepsilon},$$

gekennzeichnet. Ihre Abhängigkeit von  $h$  ist folgende: Für kleine  $h$  ist  $l$  sehr gross, mit wachsenden  $h$  sinkt das Minimum, die  $l$ -Kurve kommt für pos.  $\xi$  und für kleine negative  $\xi$  der Asymptote  $l = \xi$  immer näher, während sie für grössere negative  $\xi$  sich der Parabel  $l = \xi^2 h + \zeta$  anschliesst, die mit zunehmendem  $h$  immer steiler wird.

Die Schnittpunkte  $S$  der Kurven  $l(\xi)$  und  $r(\xi)$  geben die Abszissen  $\xi_m$  der Extrema von  $R(\delta)$ . Der allgemeine Charakter derselben ist leicht einzusehen: solange das Minimum der  $l$ -Kurve oberhalb der  $r$ -Kurve liegt, treten keine Extrema auf, die  $R(\delta)$ -Kurven sinken mit wachsendem  $\delta$  stetig von  $+\infty$  zu 0. Wenn die  $l$ -Kurve die  $r$ -Kurve gerade tangiert, so ergibt das zugehörige  $\xi$ , bzw.  $\delta$ , einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente. Wenn die  $l$ -Kurve noch tiefer sinkt, so schneidet sie die  $r$ -Kurve in zwei Punkten  $S$ , von denen das kleinere  $\xi$  ein Maximum, das grössere  $\xi$  ein Minimum der  $R(\delta)$ -Kurve bedeutet.

### 3. Die Kurvenschar $R(\delta)$ mit Parameter $\varepsilon$ .

Ihr Verlauf ist aus den für einzelne Fälle berechneten Kurven erkennbar. Fig. 8 ist für  $\varepsilon = 11^\circ 32'$ ,  $\eta = 5$ , für die beiden Werte  $h = 1/10$  und  $h = 10$  berechnet; Fig. 6 gibt den Verlauf von  $R(\delta)$  für  $h = 10$  für die Werte  $\varepsilon = 90^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 15^\circ$  und  $0^\circ$ .

Die stets positiven  $R$ -Kurven sinken mit wachsendem  $\varepsilon$  von  $R = \infty$  nach  $R = 0$ . Bei nicht zu grossem  $h$  haben die Kurven, deren Ordinaten für abnehmende  $\varepsilon$  immer zunehmen, zunächst keine Extrema; bei einem bestimmten Grenzwert von  $\varepsilon$  erhält die Kurve einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente, und mit weiter abnehmendem  $\varepsilon$  treten Minima und Maxima auf, wobei letztere immer bei grösseren  $\delta$  liegen. Beide steigen mit abnehmendem  $\varepsilon$ , die Minima rücken zu immer kleineren  $\delta$ , die Maxima gehen zuerst zu grösseren  $\delta$ , dann wieder zu kleineren, bleiben dann aber bei Werten von  $\delta$ , die  $> \varepsilon$  sind. Über den Übergang in die  $U$ -Kurve s. S. 491.

4. Die Kurvenscharen  $R(\delta)$  mit Parameter  $h$ .

Ihr Verlauf ist aus Fig. 7 ersichtlich, worin für  $\varepsilon = 45^\circ$  die  $R$ -Kurven für  $h = 0; 1; 6; 5; 10; 20; \infty$  dargestellt sind. Auch hier zunächst mit wachsendem  $\delta$  stetiges Sinken der  $R(\delta)$ -Kurve von  $\infty$  bis 0, solange  $h$  unterhalb einer gewissen Grenze liegt. Dann Auftreten einer Kurve mit Wendepunkt mit horizontaler Tangente; sodann, für grössere  $h$  Auftreten von Minima, die ihre Lage und ihren Wert nur wenig ändern, und Auftreten von Maxima bei grösseren  $\delta$ . Die Maxima wandern bei wachsendem  $h$  zu wachsenden  $\delta$ , so dass bald  $\delta_m > \varepsilon$  wird, gleichzeitig steigen die Maxima rasch an. Über den Übergang in die  $U$ - und  $S$ -Kurve s. S. 491.

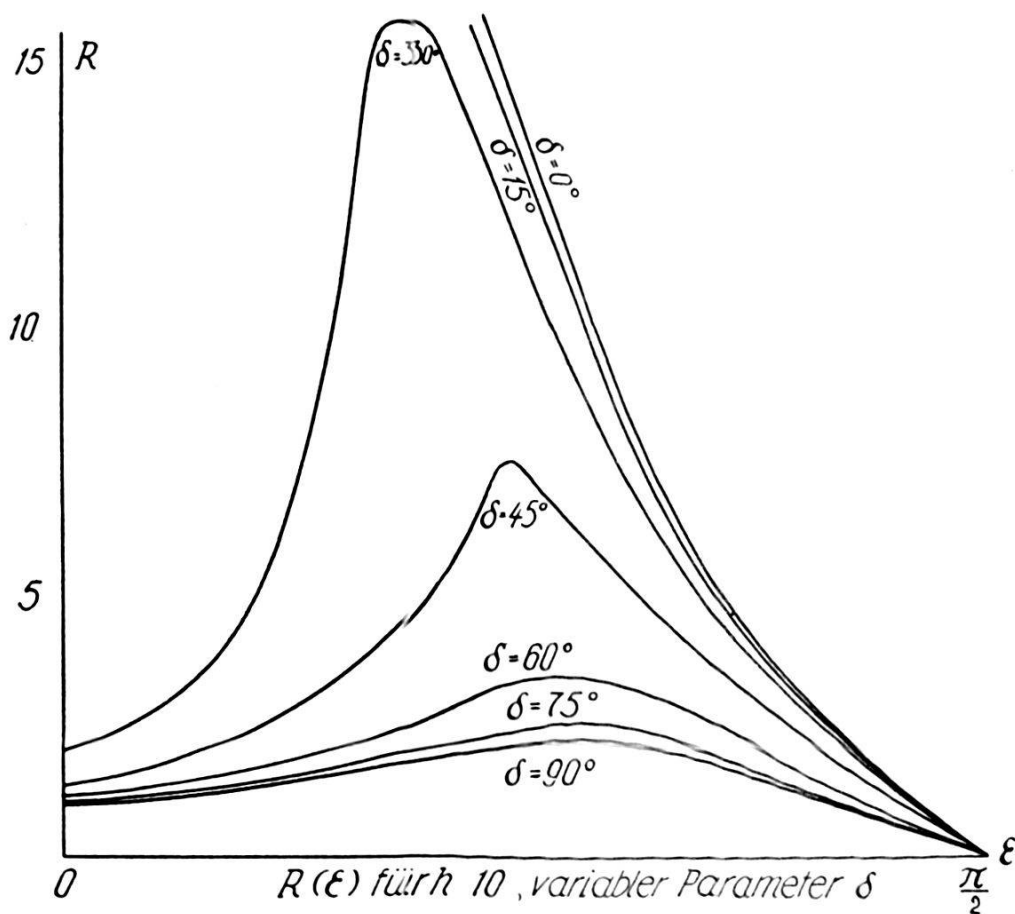


Fig. 10.

5. Die Kurvenscharen  $R(\varepsilon)$ .

Wenn  $\delta$  als Parameter und  $\varepsilon$  als laufende Variable aufgefasst wird, so wird

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{d\varphi} = \frac{1}{G} \frac{dG}{d\varepsilon} = R(\varepsilon).$$

Hiefür wird

$$R(\varepsilon) = -\cotg \varepsilon \cdot \frac{\frac{\eta}{B(z)} - \xi}{\eta - \xi}.$$

Wir verzichten auf eine allgemeine Diskussion dieser nicht leicht zu analysierenden Funktionen und geben die Kurvenscharen für

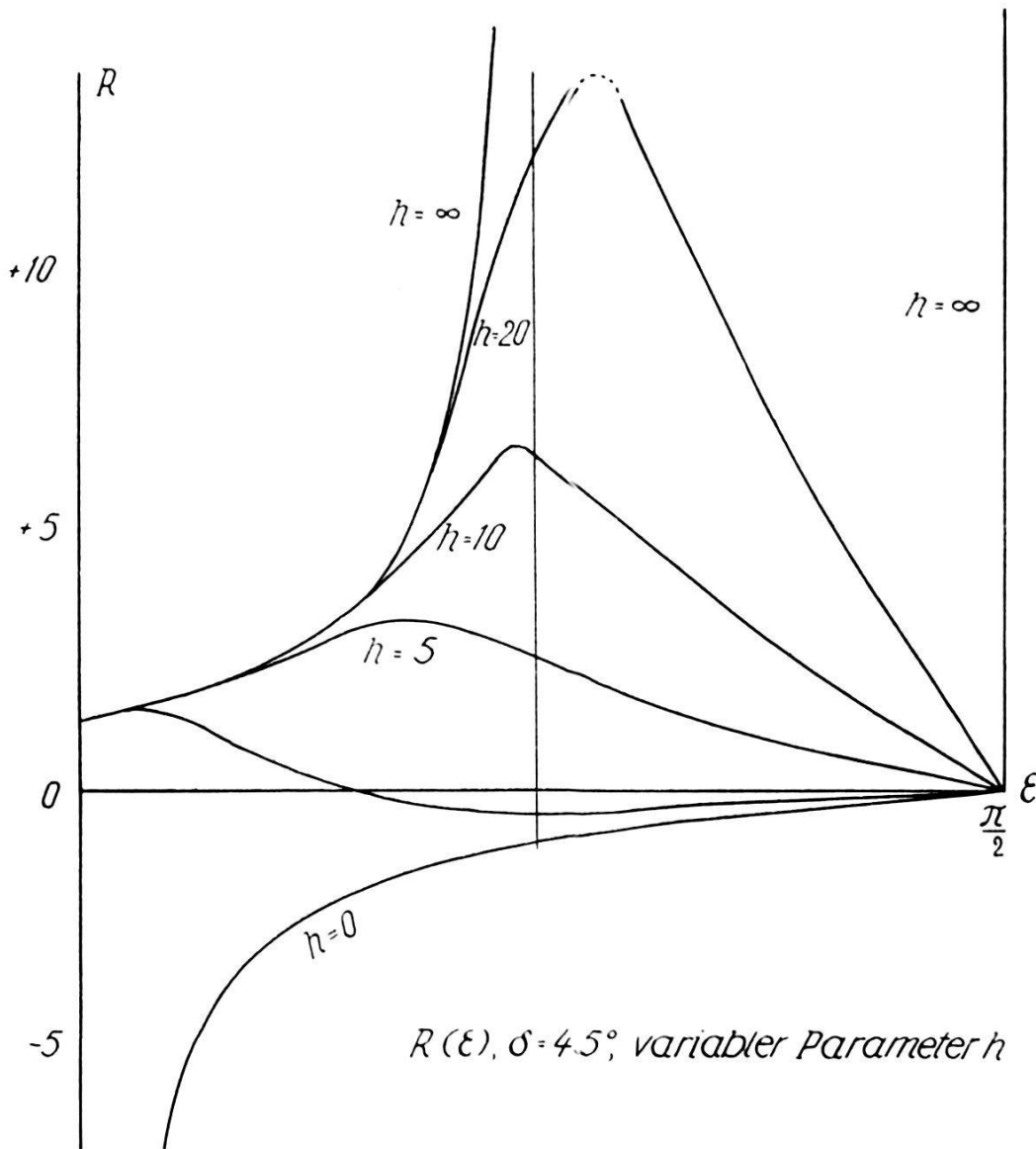


Fig. 11.

$h = 10$  mit Parameter  $\delta$  und für  $\delta = 45^\circ$  mit Parameter  $\varepsilon$ , wie sie für einige Werte berechnet worden sind (s. Fig. 10 und 11).

### C. Die Intensität $J = \frac{n \cdot \Gamma}{z} \cdot G$ .

Das einzelne, in der Schicht suspendierte Teilchen bedingt im Ausdruck der Intensität  $J$  einen vom Zerstreuungswinkel

$\varphi = \varepsilon - \delta$  abhängigen *Zerstreuungsfaktor*  $\Gamma(\varphi)$ ; die Gesamtwirkung aller Teilchen bedingt den im Abschnitt A diskutierten *Schichtfaktor*  $G(\varepsilon, \delta, h)$ . Demnach wird eine Schicht eine wesentlich andere Intensitätsverteilung des durchgehenden Lichtes erzeugen als die, welche von einem einzigen Teilchen hervorgebracht würde.

Da die Werte von  $G$  immer positiv und  $< 1$  sind, so ergibt dieser Schichtfaktor stets eine Verkleinerung des Teilchenfaktors

$$\frac{n \cdot \Gamma}{\varkappa},$$

aber diese Verkleinerung kann sehr verschiedenartig sein. Greift man als Beispiel eine der  $G(\varepsilon)$ -Kurven der Fig. 2 heraus, die bei  $\varepsilon = \varepsilon_m$  ein Maximum hat, so erkennt man folgendes: In dem relativ flachen Gebiet der  $G$ -Kurve, für grössere  $\varepsilon$ , wird der Verlauf von  $\Gamma(\varphi)$  (d. h. hier von  $\Gamma(\varepsilon)$  mit gegebenem Parameter  $\delta$ ) kaum geändert; allerdings ist hier  $G$  meistens klein, so dass die Intensität merklich verkleinert wird. Aber da, wo die  $G$ -Kurve sich rasch ändert, treten erhebliche Verschiebungen auf. Für  $\varepsilon < \varepsilon_m$ , wo die  $G$ -Kurve stark ansteigt, werden die Maxima von  $\Gamma(\varphi)$  merklich zu grösseren  $\delta$  verschoben und relativ vergrössert, während die Minima von  $\Gamma(\varphi)$  entsprechend zu kleineren  $\delta$  wandern und relativ vertieft werden; umgekehrt verhält es sich auf dem steil abfallenden Ast für  $\varepsilon > \varepsilon_m$ . Es ist klar, dass diese Verschiebungen nahe aufeinanderfolgender Maxima und Minima von  $\Gamma(\varphi)$  so stark werden können, dass sie unter Umständen zusammenfallen (und also nahezu verschwinden) oder sogar sich überholen und also ihre Reihenfolge mit wachsendem  $\varphi$  vertauschen.

Aus dem Verhalten der  $G$ -Kurve mit wanderndem Parameter ( $\delta$  und  $h$ ) (siehe Fig. 2 und 3) kann demgemäss die Veränderung der Intensitätsverteilung mit  $\delta$ ,  $\varkappa$  und  $\Delta H$  ( $\varkappa \cdot \Delta H = h$ ) ermittelt werden.

Ebenso wird in den  $G(\delta)$ -Kurven (Fig. 3 und 4) ein ähnliches Verhalten festzustellen sein; da diese alle mit  $\delta$  ansteigen, werden alle Maxima von  $\Gamma(\varphi)$ , bzw.  $\Gamma(\delta)$ , zu grösseren  $\delta$  verschoben und alle Minima zu kleineren  $\delta$ .

Wie schon in unserer früheren Arbeit<sup>1)</sup> angegeben wurde, werden diese *Verrückungen der Maxima und Minima* von  $\Gamma(\varphi)$  durch den Schichtfaktor  $G$  am einfachsten aus der Funktion  $R$  (s. Gl. 8) bestimmt.

<sup>1)</sup> P. GRUNER, l. c.

Aus

$$J = \frac{n \cdot \Gamma}{z} \cdot G$$

folgt:

$$\frac{1}{J} \cdot \frac{dJ}{d\varphi} = \frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{d\Gamma}{d\varphi} + \frac{1}{G} \cdot \frac{dG}{d\varphi}.$$

Die Extrema von  $J$  werden (da  $J > 0$ ) durch

$$\frac{dJ}{d\varphi} = 0$$

bestimmt, also durch:

$$\frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{d\Gamma}{d\varphi} = -\frac{1}{G} \cdot \frac{dG}{d\varphi} = -R. \quad (11)$$

Bei variablem  $\delta$  (mit Parameter  $\varepsilon$  und  $h$ ) sind die Extrema gegeben durch

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi} = R(\delta),$$

und bei variablen  $\varepsilon$  (mit Parameter  $\delta$  und  $h$ ) durch

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi} = -R(\varepsilon).$$

Kennt man  $\Gamma(\varphi)$ , also auch die Kurven

$$\frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{d\Gamma}{d\varphi},$$

mit  $\varphi = \varepsilon - \delta$ , in Abhängigkeit von  $\delta$  bzw.  $\varepsilon$ , so werden die *Abszissen* ( $\delta_m$  bzw.  $\varepsilon_m$ ) der *Extrema von  $J$*  durch die Schnittpunkte der Kurve

$$\frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{d\Gamma}{d\varphi}$$

mit den  $R$ -Kurven erhalten. In den  $\Gamma(\varphi)$ -Kurven, in welchen einzig die zerstreue Wirkung der einzelnen Teilchen zur Geltung kommt, sind die Extrema von  $J$  aus

$$\frac{d\Gamma}{d\varphi} = 0$$

zu ermitteln. Der verschiebende Einfluss, den der Schichtfaktor  $G$



ansübt, kann somit in prinzipiell einfacher Weise gefunden werden.

Es hat keinen Sinn, diese im allgemeinen Fall nicht übersichtliche Diskussion durchzuführen. Das Schema derselben ist für den einfachsten Fall des zurückgeworfenen Lichtes in unserer früheren Arbeit<sup>1)</sup> durchgeführt worden und kann ohne weiteres verallgemeinert werden.

Über die Verwendung dieser Berechnungen für konkrete Fälle soll später berichtet werden.

Bern, physikalisches Institut der Universität.

---

<sup>1)</sup> P. GRUNER, l. c.