Über eine einfache Herleitung des Biot-Savart'schen Gesetzes aus dem Induktionsgesetz

Über eine einfache Herleitung des Biot-Savart'schen Gesetzes aus dem Induktionsgesetz

von H. Greinacher.

(27. II. 1931.)

Inhaltsangabe: Es wird ein Weg beschrieben, wie das Biot-Savart'sche Gesetz sich auf einfache Weise aus dem Induktionsgesetz herleiten lässt. Ausgehend vom Fall eines unendlich langen, geraden Leiters gelangt man zum Ausdruck für das Elementargesetz durch Betrachtung der Induktionsverhältnisse in einem passend gewählten Elementarstromkreis. Die Wirkung eines beliebigen geschlossenen Stromkreises erscheint dann zusammengesetzt aus einer über eine unendliche Zahl von Elementarstromkreisen erstreckte Summe. In einem Anhang wird noch die Rotation eines Magnetpoles im Felde eines Stromleiters behandelt.

Für die magnetische Kraft eines geschlossenen Stromkreises liefert die Maxwell'sche Theorie in bekannter Weise den Ausdruck

$$K = m J \int \frac{d\,l \sin \varphi}{r^2} \,.$$

Indem man dann jedem Leiterelement eine Sonderwirkung vom Betrage des Integranden zuschreibt, erhält man das Biot-Savart'sche Elementargesetz. Leider verfügt man über keine, für den Unterricht in Experimentalphysik hinreichend einfache Ableitung dieses wichtigen Gesetzes. Man kann es aber, wie im folgenden gezeigt sei, in anschaulicher Weise und ohne höhere Mathematik herleiten, wenn man die Kenntnis des Induktionsgesetzes

$$V = -\frac{d\,\Phi}{d\,t}$$

voraussetzt. Der Weg, bei der Ableitung von diesem Gesetz auszugehen, ist zwar prinzipiell nicht neu, er scheint mir aber noch nicht in der hier dargestellten einfachen Weise begangen worden zu sein.

Wir werden so vorgehen, dass wir erst die Wirkung eines unendlich langen geraden Leiters, dann eines begrenzten und schliesslich eines elementaren Leiterstückes zu berechnen versuchen. Wir gehen also den Weg vom makroskopischen zum elementaren Biot-Savart'schen Gesetz.

1. ∞ langer Leiter.

Wir bewegen einen Magnetpol m (Fig. 1) mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v um den geraden Leiter D (Umlaufszeit $= t$). Dann fliesst ein konstanter Induktionsstrom J, der im Abstand a das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ erzeugt. Die bei einem Umgang geleistete mechanische Arbeit ist gleich der in dieser Zeit entstandenen Stromarbeit

$$A = 2\,\pi a \cdot \mathfrak{H} m = J V t \tag{1}$$

(V = induzierte Spannung). Schneiden den Stromleiter während eines Umlaufs Φ Induktionslinien, so ist

$$V = \frac{\Phi}{t}\,. \tag{2}$$

Φ ist aber nichts anderes als die gesamte von m ausgehende Induktionslinienzahl, d. h.

$$\Phi = 4\,\pi m. \tag{3}$$

Um dies einzusehen, denke man sich etwa m als Kügelchen, das

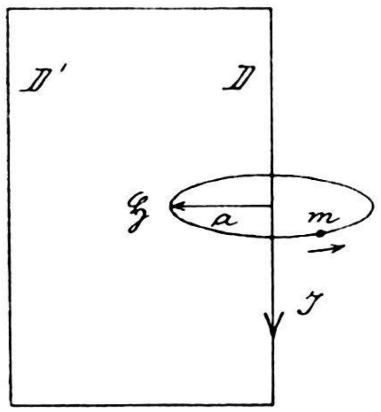

Fig. 1.

ohne Eigendrehung um den Draht D rotiert. Dann sieht man, dass während eines Umlaufs gerade jede Kraftlinie einmal geschnitten werden muss; natürlich D immer als unbeschränkt lang gedacht. Man kann sich aber statt dessen auch ebensogut m als fest und den Draht D in einem Kreise um m rotierend denken. Allerdings muss dabei der unendlich ferne Verbindungsdraht D' an Ort und Stelle bleiben (biegsame Drahtverbindung zwischen D und D'). Wenn nämlich der ganze Strom*kreis* herumrotierte, so würden ja D und D' gleich stark und entgegengesetzt induziert

($J = 0$). Wir finden also aus (1), (2) und (3), dass die Arbeit bei einem Umgang des Magnetpoles beträgt

$$A = 4\pi m J \tag{4}$$

und dass demzufolge

$$\mathfrak{H} = \frac{2J}{a}. \tag{5}$$

2. Begrenzter gerader Leiter.

a) *m in der Mitte.* Wir denken uns (Fig. 2) den Pol m im Abstand a der Mitte des Drahtstückes l gegenübergestellt und den Stromkreis durch die geraden, nach m zielenden Drähte D

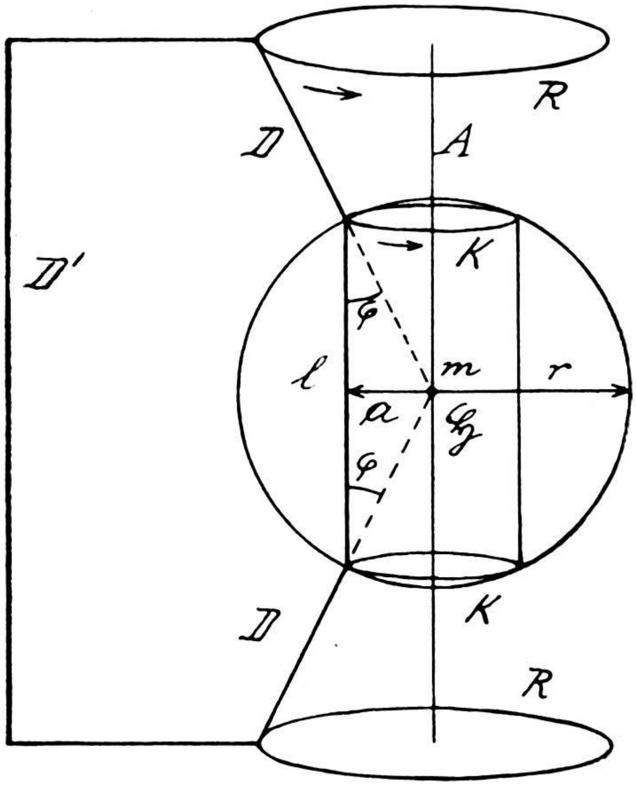

Fig. 2.

und den ∞ fernen Draht D' geschlossen. Wir lassen jetzt wiederum l um m rotieren, wobei DD stets nach m zielen sollen. Wir bewirken das durch zwei (∞ grosse) Gleitringe R, auf denen die Enden von D schleifen können. Wir erreichen so, dass nur in dem Drahtstück l Induktion auftritt. Die bei einem Umlauf von l geschnittene Kraftlinienzahl betrage Φ'. Dann verhält sich, wie unmittelbar ersichtlich, $\Phi' : \Phi$ wie der zwischen den Kreisen K eingeschlossene Teil der Kugeloberfläche zur ganzen. Nun beträgt dieser

Quotient einfach cos φ (Formel für Kugelhaube: $4\pi r^2 \cdot \frac{1-\cos\varphi}{2}$).
Die induzierte Spannung hat also den Wert

$$V = \frac{4\pi m \cos\varphi}{t}. \tag{6}$$

In (1) eingesetzt ergibt dies

$$\mathfrak{H} = \frac{2J}{a} \cos\varphi. \tag{7}$$

Auf den ersten Blick verwunderlich erscheint es, dass man hieraus für die Arbeit A den Wert erhält

$$A = 4\pi m J \cos\varphi, \tag{8}$$

während doch die Arbeit unabhängig von der Form des Stromkreises stets $4\pi mJ$ sein sollte. Die Verschiedenheit rührt jedoch davon her, dass man sich hier den Magnetpol *mit den Drähten DD zusammen* um l als Axe herumrotiert denken muss, dass also nicht die Formel für einen geschlossenen *völlig unbewegten* Stromkreis gelten kann.

Formel (7) gibt uns nun tatsächlich den Ausdruck für die Feldstärke $\mathfrak{H}$ bei begrenztem Leiter (Länge: l), wie man sie aus dem Biot-Savart'schen Gesetz berechnet. Wir haben aber bislang nur gezeigt, dass die Beziehung für einen Strom*kreis* von der in Fig. 2 skizzierten Gestalt gilt. Nun ist aber zu beachten, dass die Einrichtung so getroffen ist, dass nur l induziert wird. Da somit die Drähte DD keine Kraftlinien schneiden, so bietet ihre Rotation auch keinen Widerstand. Nach Actio und Reactio üben daher DD auch keine Kraft auf m aus, d. h. sie erzeugen an Stelle von m kein Magnetfeld. Man darf daher annehmen, dass die ganze magnetische Wirkung nur vom Leiterstück l herrührt und Formel (7) somit den Ausdruck für die magnetische Wirkung eines begrenzten Leiterstücks darstellt.

b) *m beliebig orientiert.* Aus der symmetrischen Anordnung der Fig. 2 darf zunächst geschlossen werden, dass das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ zur Hälfte vom oberen, zur Hälfte vom unteren Teil des Stromstückes l herrührt. Jede Hälfte gibt den Beitrag $\frac{J\cos\varphi}{a}$. Liegt m nicht in der Mitte des Leiterstückes, so kann dies somit aus zwei Teilen zusammengesetzt gedacht werden, deren Längen durch das Lot von m auf den Leiter bestimmt werden. Die Winkel φ von den Enden nach m sind verschieden (φ_1 und φ_2) und die beiden

Beiträge zum resultierenden Feld wären dann $\frac{J \cos \varphi_1}{a}$ und $\frac{J \cos \varphi_2}{a}$, so dass wir hätten

$$\mathfrak{H} = \frac{J}{a} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) . \tag{9}$$

Wir könnten uns statt dessen auch Fig. 2 so verallgemeinert denken, dass die beiden Drähte *DD*, die nach *m* zielen, verschiedene Winkel $\varphi_1 \, \varphi_2$ mit l bilden. Wir hätten dann statt einer Kugel zwei Hemisphären von verschiedenem Radius aber gleich grossen Schnittkreisen *K* zu zeichnen. Die Gleitringe *R* brauchten ihrerseits natürlich nicht gleich gross zu sein. Führen wir dann das unter 2a beschriebene Gedankenexperiment nochmals aus, so finden wir, dass von der oberen Hemisphäre der Bruchteil $\cos \varphi_1$, von der unteren $\cos \varphi_2$ der Induktionslinien durch den Stromleiter geschnitten werden. Auf *DD* findet wiederum keine Induktion statt. Man erhält somit tatsächlich Formel (9).

3. Elementares Leiterstück.

Der Übergang zum elementaren Leiterstück ist nun einfach. Fig. 3 zeigt die entsprechende Versuchsanordnung. Die nach *m* zielenden Drähte führen hier naturgemäss beide nach derselben Seite und schleifen mit ihren Enden auf der gemeinsamen Scheibe *S*. Das analoge Gedankenexperiment führt in leicht ersichtlicher Weise wieder zu Formel (9), wobei allerdings $\cos \varphi_2$ mit negativem Vorzeichen einzusetzen ist, da dl sich als *Differenz* zweier von 0 gemessenen Strecken darstellt (Fusspunkt von *m ausserhalb* des Stromleiters). Wir erhalten also, wenn wir $\varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi$ setzen, gemäss (9)

$$d\,\mathfrak{H} = \frac{J}{a} \Big(\cos \varphi - \cos (\varphi + d\,\varphi)\Big)$$

d. h.

$$d\,\mathfrak{H} = \frac{J \sin \varphi \cdot d\varphi}{a} .$$

Da $a = r \sin\varphi$, so kann dies auch geschrieben werden

$$d\,\mathfrak{H} = \frac{J\,d\varphi}{r} ; \tag{10}$$

oder die Kraft auf *m* ist

$$d K = \frac{m\,J\,d\,\varphi}{r} . \tag{11}$$

Diese besonders einfache Form des Biot-Savart'schen Elementargesetzes kann unmittelbar in die gewöhnliche übergeführt werden. Es ist

$$r\,d\varphi = dl \sin\varphi\,.$$

Somit

$$dK = \frac{m\,J \sin\varphi \cdot dl}{r^2}\,. \tag{12}$$

oder in vektorieller Form

$$dK = \frac{m\,J}{r^3}\,(\mathfrak{d}\mathfrak{l}, \mathfrak{r})\,.$$

Bemerkt sei, dass wenigstens im Prinzip durch eine Anordnung der Zuleitungsdrähte DD wie in Fig. 3 skizziert, auch eine experi-

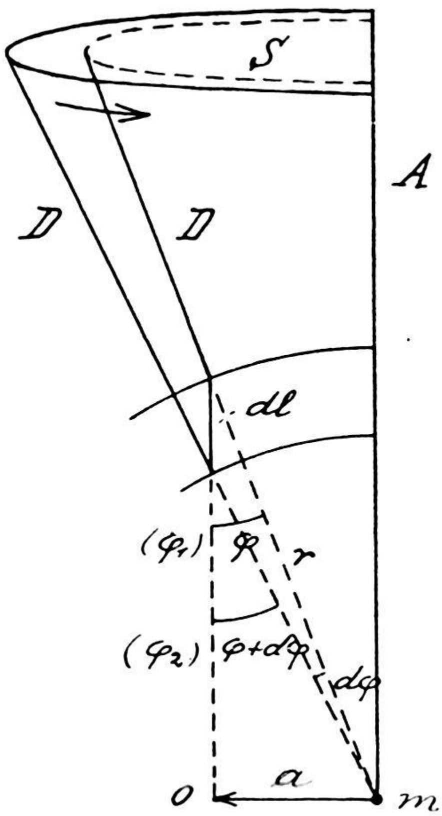

Fig. 3.

mentelle Prüfung des Elementargesetzes möglich ist. Aus naheliegenden Gründen sind natürlich der Realisation von dl und m Grenzen gesetzt.

Man könnte sich nun vielleicht noch fragen, warum man hier das Biot-Savart'sche Elementargesetz erhält, während die Maxwell'sche Theorie ja nur das Integralgesetz liefert. In der Tat ist der Ausdruck (12) auch nur für einen geschlossenen Kreis nach Art der Fig. 3 bewiesen. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass er zur Summation über beliebige geschlossene Kreise unbedenklich zu gebrauchen ist, mit anderen Worten, dass das Integralgesetz jedenfalls richtig ist. Denn man kann sich jeden geschlossenen Stromkreis in Stromelemente zerlegt denken und alle Stromelemente wieder für sich durch Drähte von der Anordnung der Fig. 3 geschlossen. Für alle Elementarstromkreise gilt nun unsere Formel (12). Also ist die Wirkung aller Elementarkreise zusammen durch das über den geschlossenen Stromkreis erstreckte Integral über (12) gegeben. Die Gesamtwirkung aller Elementarkreise ist aber einfach gleich der Wirkung des geschlossenen Stromkreises, da alle nach dem Unendlichen zielenden Teile der Elementarkreise vom Strom $+J$ und $-J$ durchflossen werden, also stromlos sind, ihre Wirkung sich somit aufhebt[1]).

Anhang. Die bisherigen Betrachtungen, die zur Herleitung des Biot-Savart'schen Gesetzes gedient haben, gehen von der

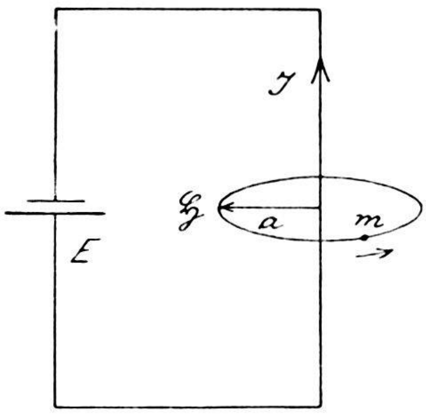

Fig. 4.

Induktion in einem geraden Leiter durch Herumbewegen eines Magnetpoles aus. Der Vollständigkeit halber wollen wir umgekehrt noch die Rotation eines Poles im Magnetfeld eines stromdurchflossenen geraden Leiters betrachten.

Wir schalten also in unserer Anordnung der Fig. 1 eine Stromquelle E ein (Fig. 4). Fliesst der Strom umgekehrt, wie in der früheren Anordnung, so leistet das Feld bei der Rotation von m Arbeit. Die Feldstärke betrage anfangs $\mathfrak{H}_0 \cdot m$ setzt sich in be-

[1]) Zu diesem Gedankengang bin ich durch einen freundlichen Hinweis von Prof. Gruner geführt worden. Prof. Gruner machte mich darauf aufmerksam, dass das Biot-Savart'sche Integralgesetz, auf einen Elementarstromkreis der Fig. 3 angewandt, ohne weiteres die Form des Biot-Savart'schen Elementargesetzes annehme. Denn für die Drähte DD sei $\varphi = o$ und für das Unendliche sei $r = \infty$. Das Integral beschränke sich also auf den Beitrag des Leiterelements dl. Immerhin sei hierdurch die Gültigkeit des Elementargesetzes nicht wirklich bewiesen, da der Ausdruck hierfür doch nur als Teil eines Integrals über einen geschlossenen Weg von besonderer Wahl erscheint.

schleunigte Bewegung. Es entsteht (gemäss dem Energiesatz) ein fortwährend steigender J entgegengerichteter Induktionsstrom. J nimmt demnach ab und damit $\mathfrak{H}$. Die beschleunigende Kraft wird schliesslich Null, wenn $J = 0$ geworden ist. D. h. der Pol erreicht eine konstante Endgeschwindigkeit. Die induzierte Spannung V ist jetzt gerade gleich E geworden. Da nach früherem

$$V = \frac{\Phi}{t} = \frac{4\pi m}{t},$$

so ist unter Berücksichtigung, dass

$$\omega = \frac{2\pi}{t}, \tag{13}$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet:

$$V = 2\omega m = E. \tag{14}$$

Dies wäre eine höchst einfache Methode, um eine EmK mittelst einer Zeitmessung zu bestimmen. Man hätte nur E an einen geraden Draht anzuschliessen und die Rotationsgeschwindigkeit zu messen, die ein Magnetpol annimmt. Wegen der unvermeidlichen Reibungsverluste würde man allerdings vielleicht besser die Tourenzahl durch einen *besonderen* Antrieb so regulieren, dass $E = V$ wird, was an der Stromlosigkeit mittels eines eingeschalteten Nullinstruments festgestellt werden könnte. In dieser Ausführung würde die Methode stark an die viel benützte Lorenz'sche Methode[1]) der absoluten Ohmbestimmung erinnern. Allein unser Verfahren lässt sich gar nicht realisieren! Da man immer nur ein Pol*paar* verwenden kann, bekommt man bei der Anordnung der Fig. 4 eben keine Rotation bzw. keine Induktion. Alle unsere Ausführungen stützen sich also auf reine Gedankenexperimente.

Weil diese elementaren Betrachtungen aber doch häufig zu didaktischen Zwecken benützt werden, wollen wir immerhin noch den allgemeinen Fall, dass der Pol m sich mit Reibung bewegt, berühren. V ist dann kleiner als E, und es fliesst im stationären Zustand ein Strom, der sich nach der Beziehung berechnet

$$E - V = JW \tag{15a}$$

bzw. unter Berücksichtigung von (14)

$$E - 2\omega m = JW. \tag{15b}$$

---

[1]) L. Lorenz. Pogg-Ann. 149, 251, 1873.

Stationären Zustand haben wir, wenn die Widerstandskraft K gerade gleich der ponderomotorischen des Magnetfelds ist. Also

$$K = \mathfrak{H} m = \frac{2 J m}{a} . \tag{16}$$

Infolge der Induktion ist $\mathfrak{H} < \mathfrak{H}_0$. D. h. es gilt

$$0 < K < \mathfrak{H}_0 m \tag{17}$$

oder, wenn man mit J_0 die Anfangsstromstärke ($\omega = 0$) bezeichnet,

$$0 < K < \frac{2 m J_0}{a} . \tag{17a}$$

Für eine vorgegebene Kraft K, die der Bedingung (17) genügen muss, stellt sich nach (16) also eine ganz bestimmte Stromstärke J ein, und dieser Strom bewirkt nach (15) die stationäre Tourenzahl

$$\omega = \frac{E - J W}{2 m} .$$

Eliminiert man J aus (15) und (16), so kann man schlussendlich auch schreiben

$$\omega = \frac{E - \frac{a K}{2 m} \cdot W}{2 m} . \tag{18}$$

Interessant ist der Umstand, dass die Stromquelle weniger Energie verbraucht, wenn m rotiert, d. h. wenn äussere Arbeit geleistet wird, als wenn m ruht, d. h. wenn nur Stromwärme entsteht. Denn, es ist einerseits $J_0 = \frac{E}{W}$ und andererseits nach (15) $J = \frac{E - 2 \omega m}{W}$ d. h. $E J_0 - E J > 0$. Will man jedoch bei der Rotation von m *denselben* Strom aufrecht erhalten, wie ohne Rotation, so ist die EmK entsprechend zu vergrössern. Die Joule'sche Wärme ist dann in beiden Fällen dieselbe, und die Mehrleistung tritt als äussere Arbeit in Erscheinung. Die Spannungsvergrösserung $E' - E$ selbst ist gleich der induzierten Gegenspannung V. Denn nach (15) ist

bei ruhendem Pol ($\omega = 0$) $J_0 W = E$
und bei rotierendem Pol $J_0 W = E' - V = E' - 2 \omega m$,

so dass man für die äussere Arbeitsleistung auch schreiben kann

$$(E' - E) J_0 = V J_0 = 2 \omega m J_0 .$$

Physikalisches Institut der Universität Bern.