Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung

Autor(en): **Pauli, W. / Weisskopf, V.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **7 (1934)**

Heft VII

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110395

Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung

von **W. Pauli** und **V. Weisskopf** in Zürich.

(27. VII. 34.)

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird die konsequente Anwendung des Heisenberg-Pauli'schen Formalismus der Quantisierung der Wellenfelder auf die skalare relativistische Wellengleichung für Materiefelder im Falle von Einstein-Bose-Statistik der Teilchen durchgeführt. Dabei ergibt sich ohne weitere Hypothese die Existenz von zu einander entgegengesetzt geladenen Teilchen gleicher Ruhmasse, die unter Absorption bzw. Emission von elektromagnetischer Strahlung paarweise erzeugt bzw. vernichtet werden können. Die Häufigkeit dieser Prozesse erweist sich als von derselben Grössenordnung wie die für Teilchen derselben Ladung und Masse aus der Dirac'schen Löchertheorie folgende (§ 4). Die hier untersuchte, ebenfalls den Relativitätsforderungen genügende korrespondenzmässige Möglichkeit von entgegengesetzt geladenen Teilchen ohne Spin mit Einstein-Bose-Statistik hat gegenüber der Löchertheorie den Vorzug, dass die Energie von selbst immer positiv ist. Ebenso aber wie aus der ursprünglichen Fassung der Löchertheorie folgt aus der hier besprochenen Theorie neben den unendlich grossen Selbstenergien auch eine unendliche Polarisierbarkeit des Vakuums.

§ 1. Der Zusammenhang der skalaren relativistischen Wellengleichung mit der Existenz entgegengesetzt geladener Teilchen.

Bekanntlich ist die skalare relativistische Wellengleichung, die mit Einführung der Operatoren

$$E = i\,h\,\frac{\partial}{\partial t}\,,\quad p_k = -\,i\,h\,\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1}$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

im kräftefreien Fall geschrieben werden kann,

$$\frac{E^2}{c^2} - \sum_{k=1}^{3} p_k^2 - m^2\,c^2 = 0 \tag{2}$$

(hier und im folgenden bedeutet stets h die durch $2\,\pi$ dividierte Planck'sche Konstante, ferner m die Ruhemasse des Elektrons und c die Lichtgeschwindigkeit), allgemein zugunsten der Dirac-schen vierkomponentigen Wellengleichung verlassen worden, da erstere nicht den Spin der Teilchen liefert und daher für Elektronen sicher eine ungenügende Approximation der Erfahrung darstellt. Es bedarf daher einer besonderen Rechtfertigung, wenn im Folgenden die Diskussion der Konsequenzen aus der ersteren Wellengleichung wieder aufgenommen wird. Wir glauben eine solche Rechtfertigung insbesondere durch den Nachweis geben zu können, dass die empirische Entdeckung des Positrons und ihre theoretische Deutung durch die von DIRAC herrührende Neuinterpretation der in seiner ursprünglichen Theorie auftretenden Zustände negativer Energie eine Revision derjenigen auf der allgemeinen quantenmechanischen Transformationstheorie basierenden a priori Argumente Dirac's erforderlich macht, mit denen von ihm ursprünglich der Übergang von der skalaren relativistischen Wellengleichung zu seiner Spinorwellengleichung begründet wurde. Im folgenden soll nämlich gezeigt werden, dass bei Anwendung der allgemeinen Vorschriften zur Quantisierung von Wellenfeldern, die früher von HEISENBERG und PAULI[1]) formuliert wurden, auf das vorliegende Problem nicht nur keine allgemeinen Einwände gegen die skalare Wellengleichung vom Standpunkt der quantenmechanischen Transformationstheorie aufrecht erhalten werden können, sondern dass man auf diese Weise unter Wahrung der relativistischen und der Eichinvarianz der Theorie *ohne jede weitere Hypothese zur Konsequenz des Vorhandenseins entgegen gesetzt geladener Teilchen, und des Auftretens von Prozessen der Erzeugung und Vernichtung solcher Teilchenpaare gelangt, wobei überdies von selbst die Energie des Materiewellenfeldes sich als stets positiv ergibt.* Für die Teilchen muss hierbei die Statistik symmetrischer Zustände (EINSTEIN-BOSE-Statistik) angenommen werden, aber es ist wohl nur als befriedigend anzusehen, dass ohne gleichzeitige Einführung des Spins die Einführung des Ausschliessungsprinzips sich nicht unter Wahrung der relativistischen Invarianz der Theorie durchführen lässt.

Was nun das erwähnte a priori-Argument DIRAC's gegen die skalare relativistische Wellengleichung[2]) betrifft, so beruht es wesentlich auf zwei Voraussetzungen.

1. Es ist in der relativistischen Quantentheorie widerspruchsfrei möglich, ein *Einkörperproblem* zu formulieren.

---

[1]) Zeitschr. f. Phys. **56**, 1, 1929.

[2]) Man findet dieses am ausführlichsten dargestellt in den Leipziger Vorträgen 1932 (gesammelt erschienen unter dem Titel Quantentheorie und Chemie), S. 85ff.

2. Die (statistisch zu interpretierende) räumliche Teilchendichte $\varrho(x)$ ist ein sinnvoller Begriff. Nach Integration über ein beliebiges endliches Volumen erhält man aus ihr eine „Observable" (im Sinne der Transformationstheorie) mit den Eigenwerten 0 und + 1.

Sobald die erste Voraussetzung zutrifft, ist es nämlich nicht notwendig, den Formalismus der Quantelung der Wellenfelder auf das Problem anzuwenden; es ist dann vielmehr möglich, mit dem gewöhnlichen Wellenfeld im dreidimensionalen Raum auszukommen. Die zweite Voraussetzung hat zur Folge, dass die Teilchendichte nicht nur die vierte Komponente eines Vierervektors sein und einer Kontinuitätsgleichung genügen muss, sondern auch die Eigenschaft haben muss, niemals negativ zu sein. Überdies werden die Eigenwerte der zugehörigen Dichtematrix nach Integration über ein unendliches Volumgebiet, wie DIRAC zeigte, nur dann die richtigen, wenn die Teilchendichte von der Form ist[1]):

$$\varrho(x) = \sum_r \psi_r^* \psi_r.$$

Dagegen hat die Teilchendichte, die zur skalaren relativistischen Wellengleichung gehört, die Form

$$\varrho(x) = \psi^* \left(i h \frac{\partial \psi}{\partial t} - e \Phi_0 \psi\right) - \left(i h \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + e \Phi_0 \psi^*\right) \psi \tag{3}$$

wenn e die Ladung des Teilchens und Φ_0 das äussere skalare Potential bedeutet. Da diese nicht von der verlangten Form ist, scheint ein Widerspruch hergestellt.

Bekanntlich hat nun DIRAC — gestützt auf den Umstand, dass auf Grund seiner Wellengleichung ein Wellenpaket aus Zuständen negativer Energie sich in einem äusseren Feld so bewegt, wie es einem Teilchen mit entgegengesetzter Ladung, gleicher Masse und positiver Energie entsprechen würde — die Zustände negativer Energie zur Deutung des Positrons in folgender Weise herangezogen. Es sollen nur die Abweichungen von dem Fall, wo alle Zustände negativer Energie besetzt sind, die „Löcher" in der Besetzung der Zustände negativer Energie, beobachtbar sein, das heisst zur „wahren" (felderzeugenden) Ladungsdichte und zur eigentlichen (dann positiven) Energie beitragen.

---

[1]) Erst aus dieser Form für ϱ wird dann weiter geschlossen, dass die Wellengleichungen von erster Ordnung in $\partial/\partial t$ sein müssen.

Ohne auf die Schwierigkeiten einer widerspruchsfreien und relativistisch und eichenvarianten Formulierung dieser Dirac'schen Löchertheorie von Elektron und Positron im Falle äusserer Felder, die ja mehrfach in der Literatur diskutiert worden sind, näher einzugehen, können wir folgendes feststellen:

1. Wegen der Prozesse der Paarerzeugung und wegen der neuen Interpretation der Zustände negativer Energie überhaupt ist es nicht mehr möglich, sich auf ein Einkörperproblem zu beschränken.

2. Die Teilchendichte hat keinen direkten physikalischen Sinn mehr[1]). Im kräftefreien Fall ist allerdings noch die Zahl der Teilchen mit gegebenem Impuls (Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum) und daher auch die Gesamtzahl der vorhandenen Teilchen eine sinnvolle „Observable".

3. Dagegen ist nicht nur die Gesamtladung, sondern auch die Ladungsdichte $\varrho(x)$ eine sinnvolle Observable. Nach Integration über ein beliebiges endliches Volum muss sie — auch bei Vorhandensein äusserer Felder — (bei Anwendung des Formalismus der Quantisierung der Wellen) die Eigenwerte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N, \ldots$ haben, die jetzt sowohl positiv wie negativ sein können. (Im Fall des Ausschliessungsprinzips ist die Zahl N bei gegebener Grösse des betrachteten Raumgebietes nach oben begrenzt.) Die Ladungsdichte $\varrho(x)$ und die Gesamtzahl der vorhandenen Teilchen sind übrigens nicht vertauschbar.

Diese Forderungen sind nun gegenüber den ursprünglichen eines echten relativistischen Einkörperproblems so weit modifiziert, *dass für die spezielle Form* $\sum_r \psi_r^* \psi_r$ *bei der Ladungsdichte kein Grund mehr vorliegt.* Wir werden überdies zeigen, dass die zuletzt formulierten Forderungen in der skalaren relativistischen Theorie für spinlose Teilchen mit Einstein-Bose-Statistik ebenso erfüllt sind wie in der Dirac'schen Löchertheorie. Hiebei ist naturgemäss der Ausdruck (3) nicht mehr als Teilchendichte, sondern als Ladungsdichte zu interpretieren.

---

[1]) Ist ψ_ϱ^+ der „positive" (aus Zuständen positiver Energie zusammengesetzte), ψ_ϱ^- der „negative" Teil der Wellenfunktion in der Dirac'schen Löchertheorie, so hat die Ladungsdichte als Operator die Form

$$\varrho(x) = \sum_{\varrho=1}^{4} \left\{ \psi_\varrho^{+*} \psi_\varrho^{+} - \psi_\varrho^{-*} \psi_\varrho^{-} + \psi_\varrho^{+} \psi_\varrho^{-} + \psi_\varrho^{+*} \psi_\varrho^{-*} \right\}.$$

Wegen des Auftretens der gemischten Glieder lässt sie sich schon bei Abwesenheit äusserer Kräfte nicht so in zwei Teile teilen, dass jeder Teil für sich einer Kontinuitätsgleichung genügt und die 4-Komponente eines Vierervektors bildet.

Das Hauptinteresse der letzteren Theorie scheint uns darin zu liegen, dass in ihr automatisch — das heisst ohne eine neue, der Löcheridee äquivalente Hypothese und ohne dem Formalismus der Quantentheorie fremd gegenüberstehende Grenzübergangs- und Subtraktionskunstgriffe[1]) — die Energie der materiellen Teilchen nach Ausführung der Quantisierung der Wellenfelder stets positiv ist. Dies ergibt sich daraus, dass die Hamiltonfunktion des Materiewellenfeldes in der hier diskutierten skalaren Theorie — im Gegensatz zum entsprechenden Ausdruck der Dirac'schen Spinortheorie — die stets *positiv definite* Form annimmt:

$$\overline{H} = \int dV \left\{ \left| i h \frac{\partial \psi}{\partial t} - e \Phi_0 \psi \right|^2 + \sum_{k=1}^{3} \left| i h c \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + e \Phi_k \psi \right|^2 + m^2 c^4 |\psi|^2 \right\}. \tag{4}$$

Angesichts der Hypothesenfreiheit dieser skalaren relativistischen Theorie könnte man vielleicht auf den ersten Blick überrascht sein, warum „die Natur" von dieser Möglichkeit der Existenz entgegengesetzt geladener Teilchen ohne Spin mit Bose-Statistik, die durch Zerstrahlung bzw. Materialisationsprozesse entstehen und vergehen können, „keinen Gebrauch gemacht hat"[2]). Man muss aber bedenken, dass die Frage der Anwendbarkeit der hier diskutierten Theorie, z. B auf α-Teilchen wegen der sich hiebei geltend machenden Effekte der Kernstruktur, wohl ausserhalb des Gültigkeitsbereiches der jetzigen Quantentheorie überhaupt liegen dürfte. Auch führt die hier diskutierte Theorie, wie in § 4 gezeigt wird, bei den Fragen der Polarisation des Vakuums zu ähnlichen Unendlichkeiten wie die ursprüngliche Form der Löchertheorie[3]). Sie führt übrigens ebenfalls zu einer unendlichen Selbstenergie nicht nur der elektrischen Teilchen, sondern auch zu einer unendlichen materiellen Selbstenergie der Lichtquanten[4]). Ein weiterer Fortschritt in diesen Fragen dürfte daher wohl erst durch ein theoretisches Verständnis des numerischen Wertes der Sommerfeld'schen Feinstrukturkonstanten zu erwarten sein.

---

[1]) P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. **30**, Pt. II, 150, 1934. — R. Peierls, Proc. Roy. Soc. **146**, 420, 1934. — W. Heisenberg, ZS. f. Ph. **90**, 209, 1934.

[2]) Vgl. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **133**, 60, 1931, bes. S. 71.

[3]) P. A. M. Dirac, Solvay-Report 1933.

[4]) Analog wie bei W. Heisenberg, l. c. — Über den Wert des Umstandes, dass in manchen Formulierungen der Löchertheorie zwar die Polarisationseffekte endlich, die Selbstenergien aber doch unendlich sind, kann man im Zweifel sein.

*

§ 2. Durchführung der Quantisierung des Wellenfeldes[1]) im kräftefreien Fall.

Die Lagrangefunktion der skalaren relativistischen Theorie lautet (mit $\mu, \nu \ldots = 1$ bis 4 und $x_4 = i c t$):

$$L = -h^2 c^2 \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - m^2 c^4 \psi^* \psi$$

$$= h^2 \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{d t} - h^2 c^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - m^2 c^4 \psi^* \psi. \tag{5}$$

Der relativistische Energie-Impulstensor wird

$$T_{\mu\nu} = -h^2 c^2 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \right) - L\, \delta_{\mu\nu} \tag{6}$$

also die Energie (Hamiltonfunktion)

$$\bar{H} = \int T_{44}\, d V$$

$$= \int \left\{ h^2 \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + h^2 c^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m^2 c^4 \psi^* \psi \right\} d V \tag{7}$$

und der Impuls

$$G_k = \frac{i}{c} \int T_{4k}\, d V = -\int h^2 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d V. \tag{8}$$

Wir haben nun ψ^* und ψ als q-Zahlen (auf das Schrödingerfunktional wirkende Operatoren) aufzufassen, wobei ψ^* hermitesch konjugiert zu ψ ist. Wir bezeichnen im folgenden stets die zu einer gegebenen q-Zahl hermitesch Konjugierte mit einem *. Wir haben dann die zu ψ und ψ^* kanonisch konjugierten Impulse π und π^* zu bilden nach der Regel:

$$\pi = \frac{1}{h} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)} = h \frac{\partial \psi^*}{\partial t}, \quad \pi^* = \frac{1}{h} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)} = h \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{9}$$

die bei Teilchen mit Einstein-Bose-Statistik den kanonischen Vertauschungsrelationen (abgekürzt: V.-R.) genügen:

$$i\,[\pi(x, t), \psi(x', t)] = \delta(x - x'), \quad i\,[\pi^*(x, t), \psi^*(x', t)] = \delta(x - x') \tag{I}$$

[1]) Über die Ausdrücke für Lagrangefunktion, Energie-Impulstensor und Stromvektor in der skalaren relativistischen Theorie vgl. z. B. W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **40**, 117, 1926.

worin auf der rechten Seite $\delta(x - x')$ die bekannte Dirac'sche δ-Funktion bedeutet und wie üblich

$$[A, B] = AB - BA \tag{10}$$

gesetzt ist. Die Grössen ψ, ψ^* sowie π, π^* untereinander, ferner π mit ψ^*, sowie π^* mit ψ sind vertauschbar.

Die Anwendung der Regel

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{i}{h} [\overline{H}, f] \tag{11}$$

auf ψ, ψ^* führt auf eine Identität, die Anwendung auf π, π^* mit Hilfe von (9) führt zu den Wellengleichungen

$$h^2 \frac{\partial \psi}{\partial t^2} = h^2 c^2 \Delta \psi - m^2 c^4 \psi \tag{12}$$

$$h^2 \frac{\partial \psi^*}{\partial t^2} = h^2 c^2 \Delta \psi^* - m^2 c^4 \psi^*. \tag{12*}$$

Ferner ist, wie es sein muss, die Regel

$$\frac{\partial f}{\partial x^k} = - \frac{i}{h} [G_k, f] \tag{13}$$

für alle Grössen f erfüllt. Man wird sehen, dass nur im Ausdruck für den Impuls eine Zweideutigkeit der Reihenfolge der Faktoren eintritt. Diese wurde so gewählt, dass der Integrand des Ausdruckes (8), der die Impulsdichte darstellt, ein hermitescher Operator ist.

Wir kommen nun zu den Ausdrücken für die (in der Einheit der elektrischen Teilchenladung e gemessenen) Ladungsdichte ϱ und Stromdichte $\vec{\mathfrak{i}} = c\vec{s}$, die mit $s_4 = i\varrho$ zum Vierervektor s_ν zusammengefasst ist, der der Kontinuitätsgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\mathfrak{i}} = 0 \tag{14}$$

genügt.

Diese sind gegeben durch

$$s_\nu = hci \left(\overline{\frac{\partial \psi^*}{\partial x^\nu} \psi} - \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \psi^*} \right) \tag{15}$$

oder

$$\varrho = -h i \left(\overline{\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi} - \overline{\frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^*} \right) = -h i \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* \right)$$

$$= -h i \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \tag{15a}$$

$$s_k = h c i \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \psi^* \right) \tag{15b}$$

Die Striche auf der rechten Seite beziehen sich auf die Zweideutigkeit der Reihenfolge der Faktoren im Ausdruck für die Dichte ϱ und sollen bedeuten, dass die einzelnen Summanden hermitisiert werden sollen. Eine Festlegung der Faktorenreihenfolge auf Grund der Forderung der Hermitizität des Dichteoperators allein ist hier nicht möglich. Die hier getroffene Festsetzung erweist sich aber als die zweckmässigere, da sie zu keiner Nullpunktsdichte Anlass gibt, wie später gezeigt wird. Sie ist überdies mit der relativistischen Invarianz und der Kontinuitätsgleichung im Einklang.

Wie man sieht, kann man die Dichte mit Rücksicht auf (9) auch schreiben:

$$\varrho = -i(\pi \psi - \pi^* \psi^*) = -i(\psi \pi - \psi^* \pi^*). \tag{16}$$

Wir wollen nun beweisen, dass diese an einer bestimmten Raumstelle x_0 die Eigenwerte

$$\varrho(x) = N \cdot \delta(x - x_0)$$

mit $N = 0, \pm 1, \ldots$ besitzt. Zu diesem Zweck ist es am einfachsten, ψ in hermitesche Operatoren

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + i u_2), \quad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - i u_2)$$

und entsprechend

$$\pi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + i p_2), \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - i p_2)$$

zu zerlegen, wobei folgt

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*), \quad u_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*)$$

$$p_1 = h \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^* + \pi), \quad p_2 = h \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\pi^* - \pi).$$

Dann gilt

$$i[p_1(x), u_1(x')] = \delta(x - x'), \quad i[p_2(x), u_2(x)] = \delta(x - x'),$$

während jede Grösse mit dem Index 1 mit jeder Grösse mit dem 2 vertauschbar ist. Während Energie, Impuls und Wellengleichungen additiv zerfallen in Ausdrücke die bzw. nur von p_1, u_1 und von p_2, u_2 abhängen, gilt dann

$$\varrho = p_1 u_2 - p_2 u_1 . \tag{16a}$$

Auf Grund der Analogie mit dem Ausdruck für eine Komponente des Drehimpulses erkennt man hieraus sofort, dass $\varrho(x)$ die Eigenwerte $N \,.\, \delta(x - x')$ mit $N = 0, \pm 1, \ldots$ besitzt. (Der Faktor $\delta(x - x')$ kann hierin z. B. durch einen Grenzübergang von einer diskreten Einteilung des Raumes zu einer kontinuierlichen gerechtfertigt werden.) Da die Werte der Dichte an verschiedenen Raumstellen miteinander vertauschbar sind, folgt also in der Tat, dass die innerhalb eines beliebigen endlichen Gebietes v befindliche Ladung

$$e_v = \int_v \varrho \, d V$$

(in der Einheit e gemessen) die Eigenwerte $0, \pm 1, \ldots \pm N$ besitzt.

Wir bemerken noch, dass in der vorliegenden Theorie alle Relationen einschliesslich der V.-R. richtig bleiben, wenn man alle Operatoren mit ihren hermitesch konjugierten (also ψ mit ψ^*, π mit π^*) vertauscht. Da hierbei der Viererstrom sein Vorzeichen wechselt, ergibt sich hieraus die Symmetrie der Theorie in bezug auf positive und negative Ladungen.

Nebenbei sei hier noch bemerkt, dass eine Zerlegung der Dichte ϱ in vertauschbare Teile mit nur positiven und nur negativen Eigenwerten zwar auf unendlich viele Weisen möglich ist, dass aber keiner dieser Teile für sich einer Kontinuitätsgleichung genügt und auch nicht relativistisch invariant ist[1]).

[1]) Man erhält solche Zerlegungen z. B. unter Einführung einer beliebigen Konstante a von der Dimension Wurzel aus Energie (z. B. $a = \sqrt{m c^2}$) gemäss dem Ansatz

$$\pi = \frac{a}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + \varphi_2^*) , \qquad \psi = \frac{-i}{\sqrt{2}\, a} (\varphi_1^* - \varphi_2)$$

$$\pi^* = \frac{a}{\sqrt{2}} (\varphi_1^* + \varphi_2) , \qquad \psi^* = \frac{-i}{\sqrt{2}\, a} (\varphi_2^* - \varphi_1) .$$

Es ist dann

$$[\varphi_1 (x), \ \varphi_1^* (x')] = \delta (x - x'), \ [\varphi_2 (x), \ \varphi_2^* (x')] = \delta (x - x'),$$

während Grössen mit Index 1 und solche mit dem Index 2 kommutieren. Und es gilt

$$\varrho = \varphi_2^* \varphi_2 - \varphi_1^* \varphi_1 .$$

Hieraus ergibt sich ein neuer Beweis für die Eigenwerte von ϱ.

Wir wollen nun, was sowohl für Anwendungen von Wichtigkeit ist als auch an und für sich physikalisches Interesse beansprucht, untersuchen, wie sich die Verhältnisse im Impulsraum gestalten. Um statt Integralen im Impulsraum Summen zu erhalten, verwenden wir die bekannte formale Methode, den Wellenfeldern die Bedingung aufzuerlegen, einen Würfel der Kantenlänge L, also mit dem Volumen $L^3 = V$, als Periodititätsgebiet zu haben, so dass die Komponenten des Ausbreitungsvektors $\vec{k}$ der Wellen ganzzahlige Vielfache von $\frac{2\pi}{L}$ sein müssen. Wir verwenden ferner

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{k}\vec{x})} \tag{17}$$

als ein vollständiges System orthogonaler normierter c-Zahl-Eigenfunktionen, für die also gilt

$$\int_V u_k^*(x)\, u_l(x)\, dV = \delta_{kl}. \tag{18}$$

Hierbei schreiben wir als Index k hier und im folgenden der Einfachheit halber stets nur einen Index statt der den drei Komponenten von $\vec{k}$ entsprechenden drei Indices und ähnliches soll gelten für Summen über k.

Zerlegen wir nun die Funktionen ψ, π, ψ^*, π^* nach den u_k gemäss

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k q_k\, e^{i(\vec{k}\vec{x})}, \quad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k q_k^*\, e^{-i(\vec{k}\vec{x})} \tag{19a}$$

$$\pi^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k p_k^*\, e^{i(\vec{k}\vec{x})}, \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k p_k\, e^{-i(\vec{k}\vec{x})} \tag{19b}$$

mit den Umkehrformeln

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_V \psi\, e^{-i(\vec{k}\vec{x})}\, dV, \quad q_k^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_V \psi^*\, e^{i(\vec{k}\vec{x})}\, dV \tag{19c}$$

$$p_k^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_V \pi^*\, e^{-i(\vec{k}\vec{x})}\, dV, \quad p_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_V \pi\, e^{i(\vec{k}\vec{x})}\, dV \tag{19d}$$

so genügen die q-Zahlen $p_k, q_k\; p_k^*, q_k^*$ (man beachte, dass p_k, q_k nicht hermitesche Operatoren und p_k^*, q_k^* die hermiteschen Konjugierten von $p_k\, q_k$ sind) gemäss (I) den V.-R.

$$i\,[p_k, q_l] = \delta_{kl}, \quad i\,[p_k^*, q_l^*] = \delta_{kl}, \tag{II}$$

während die q_k und q_l^* untereinander, die p_k und p_l^* untereinander, sowie die p_k mit dem q_l^* und die p_k^* mit den q_l kommutieren. Überdies gilt nach (9)

$$p_k = h\,\dot{q}_k^*, \quad p_k^* = h\,\dot{q}_k. \tag{20}$$

Für Hamilton-Funktion und Impuls erhält man nach (7) und (8)

$$\overline{H} = \sum_k (p_k^*\, p_k + E_k^2\, q_k^*\, q_k) \tag{21}$$

$$\vec{G} = -i\,h \sum_k \vec{k}\,(p_k\, q_k - q_k^*\, p_k^*)\,. \tag{22}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt

$$E_k^2 = c^2(h^2 k^2 + m^2 c^2)\,. \tag{23}$$

Wir werden im folgenden unter

$$E_k = +\,c\sqrt{h^2 k^2 + m^2 c^2} \tag{23a}$$

stets die positive Wurzel verstehen.

Man bestätigt leicht die Gültigkeit der Regel (11) für p_k, q_k, p_k^*, q_k^*; insbesondere ergibt sich

$$\dot{p}_k = \frac{i}{h}[\overline{H}, p_k] = -\frac{1}{h}\,E_k^2\, q_k^*, \tag{24a}$$

$$\dot{p}_k^* = \frac{i}{h}[\overline{H}, p_k^*] = -\frac{1}{h}\,E_k^2\, q_k\,. \tag{24b}$$

Wir schreiben weiter auf Grund von (16) und (15b) noch die Ausdrücke für die Gesamtladung

$$\bar{e} = \int_V \varrho\, d\,V$$

und den Gesamtstrom

$$\frac{1}{c}\,\vec{J} = \int_V \vec{s}\, d\,V$$

in ihrer Zerlegung nach den Anteilen der verschiedenen Impulseigenfunktionen hin. Wir erhalten

$$\bar{e} = -\,i \sum_k (p_k\, q_k - p_k^*\, q_k^*)\,, \tag{25}$$

$$\frac{1}{c}\,\vec{J} = 2\,h\,c \sum_k \vec{k}\, q_k^*\, q_k\,. \tag{26}$$

Man wird sehen, dass der letztere nicht zeitlich konstant ist.

Wir wollen nun zeigen, dass die Anteile der einzelnen Eigenschwingung k zur Gesamtladung, zur Energie und zum Impuls sich zugleich in zwei Teile zerlegen lassen, die einer einfachen physikalischen Interpretation fähig sind. Zu diesem Zweck führen wir folgende Variable a_k, a_k^*, b_k, b_k^* ein:

$$p_k = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}}(a_k^* + b_k), \quad q_k = \frac{-i}{\sqrt{2}\sqrt{E_k}}(-a_k + b_k^*) \tag{27}$$

$$p_k^* = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}}(a_k + b_k^*), \quad q_k^* = \frac{-i}{\sqrt{2}\sqrt{E_k}}(a_k^* - b_k) \tag{27*}$$

mit den Umkehrformeln

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k^* - i\sqrt{E_k}\, q_k\right), \quad a_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k + i\sqrt{E_k}\, q_k^*\right) \tag{28a}$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k - i\sqrt{E_k}\, q_k^*\right), \quad b_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k^* + i\sqrt{E_k}\, q_k\right) \tag{28b}$$

Für die neuen Variablen folgen die V.-R.

$$[a_k, a_l^*] = \delta_{kl}, \; [b_k, b_l^*] = \delta_{kl}, \tag{III}$$

während die a_k oder a_k^* untereinander, die b_k oder b_k^* untereinander, sowie die a_k mit den b_l^* und die a_k^* mit den b_l kommutieren.

Man erhält weiter

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \sum_k E_k \tfrac{1}{2}(a_k a_k^* + a_k^* a_k + b_k^* b_k + b_k b_k^*) \\ &= \sum_k E_k (a_k^* a_k + b_k^* b_k + 1) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \vec{G} &= h \sum_k \vec{k}\, \tfrac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*) \\ &= h \sum_k \vec{k}\,(a_k^* a_k - b_k^* b_k). \end{aligned} \tag{30}$$

Ferner für die Gesamtladung

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \sum_k \tfrac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*) \\ &= \sum_k (a_k^* a_k - b_k^* b_k). \end{aligned} \tag{31}$$

Schliesslich ergibt sich nach (26) für den Gesamtstrom

$$\frac{1}{c}\vec{J} = h c \sum_k \frac{\vec{k}}{E_k}(a_k^* a_k + b_k b_k^* - a_k^* b_k^* - a_k b_k)$$
$$= h c \sum_k \frac{\vec{k}}{E_k}(a_k^* a_k + b_k^* b_k - a_k^* b_k^* - a_k b_k + 1). \tag{32}$$

Die V.-R. für die $a, b, a^* b^*$ haben zur Folge, dass die Operatoren

$$N_k^+ = a_k^* a_k, \qquad N_k^- = b_k^* b_k \tag{33}$$

vertauschbar sind und beide die niemals negativen ganzzahligen Eigenwerte $0, 1, 2 \ldots$ besitzen. Die Ausdrücke für Ladung, Energie und Impuls berechtigen uns in dem hier betrachteten kräftefreien Fall zu folgender Interpretation:

Es bedeutet N_k^+ die Zahl der Teilchen mit der Ladungszahl $+1$ und dem Impuls $h\vec{k}$, und N_k^- die Zahl der Teilchen mit der Ladungszahl -1 und dem Impuls $-h\vec{k}$[1]).

Es sei noch darauf hingewiesen, dass der Term mit $+1$ im Energieausdruck eine Nullpunktsenergie (Vakuumenergie) der Materiewellen bedeutet, die aber, ganz analog wie die Nullpunktsenergie der elektromagnetischen Strahlung, bei allen Anwendungen und unbeschadet der relativistischen Invarianz der Theorie fortgestrichen werden kann. Ähnliches gilt vom Term mit $+1$ im Ausdruck für den Strom. Von entscheidender physikalischer Wichtigkeit ist, dass auch abgesehen von diesem Term die Energie von selbst stets positiv ist.

Wichtig sind die Terme mit $a_k b_k$ und $a_k^* b_k^*$ im Ausdruck für den Strom, welche dessen zeitliche Konstanz selbst im kräftefreien Fall verhindern. Wie man aus den Bewegungsgleichungen

$$\dot{a}_k = -i \frac{E_k}{h} a_k, \qquad \dot{b}_k = -i \frac{E_k}{h} b_k \tag{34}$$

und ihren Integralen

$$a_k = a_k(0)\, e^{-i \frac{E_k}{h} t}, \qquad b_k = b_k(0)\, e^{-i \frac{E_k}{h} t} \tag{35}$$
$$a_k^* = a_k^*(0)\, e^{+i \frac{E_k}{h} t}, \qquad b_k^* = b_k^*(0)\, e^{+i \frac{E_k}{h} t} \tag{35*}$$

---

[1]) Nochmals sei bemerkt, dass eine entsprechende Definition für eine räumliche Dichte $\varrho^+(x)$ und $\varrho^-(x)$ der Teilchensorten nicht in physikalisch sinnvoller Weise möglich ist. Bildet man z. B. aus a_k und b_k

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k a_k e^{i(\vec{k}\vec{x})}, \qquad b(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k b_k e^{-i(\vec{k}\vec{x})}$$

so zeigt sich, dass der Ausdruck $a^*(x)a(x) - b^*(x)b(x)$ *nicht* mit der Ladungsdichte übereinstimmt.

ersieht, die sich gemäss (11) aus (III) und (29) ergeben, haben diese Terme eine enge Analogie zur Schrödinger'schen Zitterbewegung und geben, wie im folgenden § gezeigt wird, bei Vorhandensein geeigneter äusserer Felder in der Tat Anlass zu Prozessen der Paarerzeugung bzw. Paarvernichtung.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist eine widerspruchsfreie Durchführung der skalaren relativistischen Wellentheorie für Teilchen mit Ausschliessungsprinzip nicht möglich, da sich, wie eine nähere Untersuchung der Hamiltonfunktion mit den Variablen a und b zeigt, bei Gültigkeit der Fermi-Statistik die relativistische Invarianz des Viererstromes nicht erreichen lässt. Es hängt dies auch damit zusammen, dass aus den Gleichungen

$$\psi(x)\,\psi^*(x') + \psi^*(x')\,\psi(x) = 0, \quad \psi(x)\,\psi(x) + \psi(x')\,\psi(x) = 0$$

$\psi(x) = 0$ und $\psi^*(x) = 0$ folgen würde.

§ 3. Fall des Vorhandenseins äusserer Kräfte.

Man gelangt für ein Teilchen mit der Ladung e vom kräftefreien Fall zum Fall des Vorhandenseins eines äusseren elektromagnetischen Feldes mit dem Viererpotential $\Phi_\mu (\Phi_4 = i\,\Phi_0)$, wenn man den Operator p_μ ersetzt durch

$$p_\mu \longrightarrow p_\mu - \frac{e}{c}\,\Phi_\mu\,, \tag{36}$$

was den Substitutionen

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \frac{i\,e}{h\,c}\,\Phi_\mu\,\psi, \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} \longrightarrow \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} + \frac{i\,e}{h\,c}\,\Phi_\mu\,\psi^* \tag{36a}$$

entspricht[1]). Die Lagrangefunktion des Materiefeldes wird dann

$$L = -h^2 c^2 \sum_{\nu=1}^{4} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^\nu} + \frac{i\,e}{h\,c}\,\Phi_\nu\,\psi^*\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - \frac{i\,e}{h\,c}\,\Phi_\nu\,\psi\right) - m^2 c^4\,\psi^*\,\psi$$

$$= h^2 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \frac{i\,e}{h}\,\Phi_0\,\psi^*\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{i\,e}{h}\,\Phi_0\,\psi\right)$$

$$-h^2 c^2 \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} + \frac{i\,e}{h\,c}\,\Phi_k\,\psi^*\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{i\,e}{h\,c}\,\Phi_k\,\psi\right) - m^2 c^4\,\psi^*\,\psi. \tag{37}$$

[1]) In der Dirac'schen Theorie wird die Substitution

$$p_\mu \longrightarrow p_\mu + \frac{e}{c}\,\Phi_\mu$$

eingeführt, da die Elektronenladung dort mit $(-e)$ bezeichnet wird. Unsere Bezeichnungen sind in Übereinstimmung mit W. Gordon, l. c.

Die Hamiltonfunktion des Materiefeldes

$$\overline{H}^m = \int \Big\{ \Big(h \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - i\, e\, \Phi_0\, \psi^* \Big) \Big(h \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\, e\, \Phi_0\, \psi \Big)$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \Big(h\, c \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} + i\, e\, \Phi_k\, \psi^* \Big) \Big(h\, c \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - i\, e\, \Phi_k\, \psi \Big) + m^2 c^4 \psi^* \psi \Big\} d\, V. \quad (37a)$$

Addiert man hiezu die Ausdrücke für die elektromagnetische Lagrangefunktion

$$L^{\mathrm{elm}} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2) \tag{38}$$

bzw. für die elektromagnetische Energie

$$\overline{H}^{\mathrm{elm}} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2)\, d\, V \tag{38a}$$

so erhält man das Energieintegral

$$\overline{H}^m + \overline{H}^{\mathrm{elm}} = \mathrm{const.}$$

und ferner durch Variieren des Wirkungsintegrals

$$\int (L^m + L^{\mathrm{elm}})\, d\, V\, d\, t$$

nach den Feldgrössen ψ, ψ^*, Φ_μ, einerseits die Wellengleichungen

$$\Big(h \frac{\partial}{\partial t} - i\, e\, \Phi_0 \Big) \Big(h \frac{\partial}{\partial t} - i\, e\, \Phi_0 \Big) \psi$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \Big(h\, c \frac{\partial}{\partial x^k} + i\, e\, \Phi_k \Big) \Big(h\, c \frac{\partial}{\partial x^k} + i\, e\, \Phi_k \Big) \psi + m^2 c^4 \psi \tag{39}$$

$$\Big(h \frac{\partial}{\partial t} + i\, e\, \Phi_0 \Big) \Big(h \frac{\partial}{\partial t} + i\, e\, \Phi_0 \Big) \psi^*$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \Big(h\, c \frac{\partial}{\partial x^k} - i\, e\, \Phi_k \Big) \Big(h\, c \frac{\partial}{\partial x^k} - i\, e\, \Phi_k \Big) \psi^* + m^2 c^4 \psi^* \tag{39*}$$

anderseits die Maxwell'schen Gleichungen

$$\mathrm{rot}\, \vec{H} - \frac{1}{c} \dot{\vec{E}} = 4\pi\, e\, \frac{1}{c} \vec{\mathfrak{i}} = 4\pi\, e\, \vec{s} \tag{40}$$

$$\mathrm{div.}\, \vec{E} = 4\pi\, e\, \varrho \tag{41}$$

mit den folgenden Ausdrücken für ϱ und $\overleftarrow{s}$:

$$\varrho = i\left[\left(h\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\,e\,\Phi_0\,\psi\right)\psi^* - \left(h\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - i\,e\,\Phi_0\,\psi^*\right)\psi\right]$$

$$= h\,i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\psi^* - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\,\psi\right) - 2\,e\,\Phi_0\,\psi^*\,\psi \tag{42}$$

$$s_k = i\left[\left(h\,c\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k} + i\,e\Phi_k\,\psi^*\right)\psi - \left(h\,c\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - i\,e\,\Phi_k\,\psi\right)\psi^*\right]$$

$$= i\,h\,c\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\,\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\,\psi^*\right) - 2\,e\,\Phi_k\,\psi^*\,\psi \tag{43}$$

die sich von den entsprechenden Ausdrücken des kräftefreien Falles (15a) und (15b) um charakteristische Zusätze unterscheiden. Sowohl aus den Wellengleichungen (39) als auch aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung (14) für die neuen Ausdrücke von ϱ und s_k. Eine unmittelbare Folge von (36) ist die Invarianz der Lagrange- und Hamiltonfunktion und auch der Ausdrücke für Strom und Ladungsdichte gegenüber den Eichtransformationen

$$\Phi_\mu{}' = \Phi_\mu + \frac{\partial\lambda}{\partial x^\mu}, \qquad \psi' = \psi\,e^{i\frac{e}{hc}\lambda} \tag{36b}$$

Wichtig ist ferner, dass die Wellengleichungen, die Maxwell'schen Gleichungen und die Hamilton-Funktion bestehen bleiben, wenn man ψ mit ψ^* vertauscht und gleichzeitig e durch $-e$ ersetzt, was die Symmetrie der Theorie in bezug auf positive und negative Ladung zur Folge hat. Alle diese Aussagen bleiben bestehen, wenn man ψ, ψ^*, Φ_μ als q-Zahlen betrachtet.

Wichtig ist, dass die Bedeutung von π, π^* gegenüber (9) abgeändert ist gemäss

$$\pi = \frac{1}{h}\,\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} = h\,\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - i\,e\,\Phi_0\,\psi^* \tag{44}$$

$$\pi^* = \frac{1}{h}\,\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)} = h\,\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\,e\,\Phi_0\,\psi. \tag{44*}$$

Diese neuen π genügen jetzt den V.-R. (I)

$$i[\pi(x,t), \psi(x',t)] = \delta(x-x'), \quad i[\pi^*(x,t), \psi^*(x,'t)] = \delta(x-x') \tag{I}$$

und sind mit den elektromagnetischen Feldgrössen vertauschbar.

Gemäss (42) wird dann die Ladungsdichte wieder formal übereinstimmend mit (16)

$$\varrho = i(\pi^* \psi^* - \pi \psi) = i(\psi^* \pi^* - \psi \pi). \tag{16}$$

Daher bleiben die Eigenwerte der Ladungsdichte auch bei Vorhandensein eines äusseren Potentials dieselben wie im kräftefreien Fall.

Der materielle Teil (37a) der Hamiltonfunktion schreibt sich nun

$$\overline{H}^m = \overline{H}_0 + \overline{H}_1$$

mit

$$\overline{H}_0 = \int \left\{ \pi \pi^* + h^2 c^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m^2 c^4 \psi^* \psi \right\} dV \tag{45_0}$$

$$\overline{H}_1 = \int \left\{ e h c \sum_{k=1}^{3} \Phi_k \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \psi \right) + e^2 \sum_{k=1}^{3} \Phi_k^2 \psi^* \psi \right\} dV \tag{45_1}$$

Mit den bekannten V.-R. für die Feldstärken und elektromagnetischen Potentiale kann dann die Quantenelektrodynamik in der gewohnten Weise formuliert werden, wobei die Maxwellschen Gleichungen (40) aus Anwendung der Regel (11) gemäss

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{i}{h} [\overline{H}, \vec{E}]$$

gewonnen werden können. Wir möchten hierauf nicht näher eingehen, möchten nur an die bekannten Komplikationen erinnern, die dadurch entstehen, dass die Gleichung (41) nur mit den eichinvarianten Grössen $\psi \pi$, $\psi^* \pi^*$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ vertauschbar ist mit den anderen wie π, π^*, ψ, ψ^*, Φ_μ aber nicht. Soll die Regel (11)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{i}{h} [\overline{H}, f]$$

auch für diese Grössen gültig sein, so muss man einen Ausdruck der Form

$$\int \Phi_0 (4 \pi e \varrho - \operatorname{div.} \vec{E})\, dV$$

formal zu der Summe aus (38a), (45_0) und (45_1) addieren[1]).

Für den nicht mit (37a) übereinstimmenden Teil H'

$$H' = \overline{H}_0 + \overline{H}_1 + \overline{H}_2 \tag{47}$$

$$\overline{H}_2 = e \int \Phi_0 \varrho \, dV = i e \int \Phi_0 (\pi^* \psi^* - \pi \psi)\, dV \tag{45_2}$$

---

[1]) Vgl. hiezu W. Heisenberg und W. Pauli, Zeitschr. f. Phys. **59**, 168, 1930; insbes. S. 179, Gl. (38).

der Hamiltonfunktion gilt also

$$\dot{\pi} = \frac{i}{h}[H', \pi], \qquad \dot{\psi} = \frac{i}{h}[H', \psi] \tag{48}$$

und entsprechende Relationen für die kanonisch konjugierten π^*, ψ^*.

Diese (nicht eichinvariante) Hamiltonfunktion H' hat daher auch die Eigenschaft zeitlich konstant zu sein, wenn die Potentiale Φ_0 und Φ_k zwar von den Raumkoordinaten, aber nicht von der Zeit abhängen. Für viele Zwecke genügt es, die Viererpotentiale als gegebene c-Zahlfunktionen zu betrachten. In diesem Fall muss mit der durch H' gegebenen Hamiltonfunktion gerechnet werden. Diese ergibt sich übrigens auch durch die kanonische Umformung von L^m nach der Formel:

$$H' = \int \pi\, \dot{\psi}\, d\,V + \int \pi^*\, \dot{\psi}^*\, d\,V - L^m.$$

Wir wollen nun die Zusatzteile H_1 und H_2 der Hamiltonfunktion auch im Impulsraum anschreiben, wie dies mit dem ursprünglichen Teil H_0 bereits im vorigen § geschehen ist [vgl. Gl. (21)]. Sind in bezug auf das orthogonale Funktionssystem (17) in üblicher Weise die Matrixelemente einer Funktion $f(x)$ (z. B. der Potentiale) definiert durch

$$f_{kl} = \frac{1}{V} \int f(\vec{x})\, e^{-i(\vec{k}-\vec{l})}\, d\,V, \tag{49}$$

so erhalten wir aus (19a), (19b) unmittelbar

$$\overline{H}_2 = i\,e \sum_l \sum_k \Phi^{\circ}_{kl}\,(p_l^*\, q_k^* - p_k\, q_l) \tag{50}$$

$$\overline{H}_1 = -\sum_l \sum_k [h\,c\,e\,(\vec{\Phi}_{kl}, \vec{k} + \vec{l}) - e^2\,(\vec{\Phi})^2_{kl}]\, q_k^*\, q_l \tag{51}$$

oder mit Einführung der Variablen a_k, b_k gemäss (27), (28), in welchen H_0 durch (29) gegeben ist:

$$\overline{H}_2 = \tfrac{1}{2}\, e \sum_e \sum_k \Phi^{\circ}_{kl} \left[\frac{E_k + E_l}{\sqrt{E_k E_l}}(a_k^*\, a_l - b_l^*\, b_k) + \frac{E_k - E_l}{\sqrt{E_k E_l}}(a_l\, b_k - a_k^*\, b_l^*)\right] \tag{52}$$

$$\overline{H}_1 = \tfrac{1}{2} \sum_l \sum_k \frac{1}{\sqrt{E_k E_l}} [h\,c\,e\,(\vec{\Phi}_{kl}, \vec{k} + \vec{l}) - e^2\,(\vec{\Phi})^2_{kl}]$$
$$(a_k^*\, a_l + b_k\, b_l^* - a_k^*\, b_l^* - b_k\, a_l). \tag{53}$$

§ 4. Die Paarerzeugung durch Lichtquanten und die Polarisation des Vakuums.

Aus den Vertauschungsrelationen (III) für die a_k^*, a_k bzw. b_k^*, b_k folgen in bekannter Weise die Eigenschaften dieser Operatoren bei ihrer Anwendung auf ein von den Besetzungszahlen N_k^+, N_k^- abhängiges Schrödingerfunktional $c(\ldots N_k^+ \ldots; \ldots N_k^- \ldots)$. Es ist

$$
\begin{aligned}
a_k^* c(\ldots N_k^+ \ldots; \ldots N_k^- \ldots) &= \sqrt{N_k^+ + 1}\, c(\ldots N_k^+ + 1 \ldots; \ldots N_k^- \ldots) \\
a_k c(\ldots N_k^+ \ldots; \ldots N_k^- \ldots) &= \sqrt{N_k^+}\, c(\ldots N_k^+ - 1 \ldots; \ldots N_k^- \ldots) \\
b_k^* c(\ldots N_k^+ \ldots; \ldots N_k^- \ldots) &= \sqrt{N_k^- + 1}\, c(\ldots N_k^+ \ldots; \ldots N_k^- + 1 \ldots) \\
b_k c(\ldots N_k^+ \ldots; \ldots N_k^- \ldots) &= \sqrt{N_k^-}\, c(\ldots N_k^+ \ldots; \ldots N_k^- - 1 \ldots) \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Man sieht dann leicht, dass die Zusätze $\bar{H}_1$ und $\bar{H}_2$, die bei Vorhandensein von äusseren Feldern zu der Hamiltonfunktion hinzutreten, infolge der Faktoren $a_k^* b_l^*$ und $b_k a_l$ Glieder enthalten, die zur Paarerzeugung und Paarvernichtung Anlass geben. Diese Glieder führen nämlich zu Matrixelementen zwischen Zuständen, die sich gerade um ein positives und ein negatives Teilchen unterscheiden, während die Faktoren $a_k^* a_l$ bzw. $b_k b_l^*$ nur Übergänge eines positiven bzw. eines negativen Teilchens von einem Zustand zum andern liefern.

Wir wollen nun im folgenden die Wahrscheinlichkeit der Paarerzeugung durch ein Lichtquant der Energie $h\nu > 2\,mc^2$ auf Grund der Ausdrücke (52) und (53) berechnen, um sie mit den entsprechenden Ausdrücken der Löchertheorie, wie sie von Bethe und Heitler[1]) gerechnet wurden, zu vergleichen.

Infolge des Energie- und Impulssatzes verschwindet diese Wahrscheinlichkeit im feldfreien Raum. Wir nehmen daher an, es herrsche im Raum ein durch ein zeitunabhängiges skalares Potential Φ_0 darstellbares elektrisches Feld (etwa das Coulombfeld eines Kerns), das den Impulsüberschuss aufnehmen kann.

Wir berücksichtigen den Einfluss des Feldes ebenso wie Bethe und Heitler nur in erster Näherung, indem wir vom feldfreien Raume ausgehen und sowohl Φ_0 als auch das Potential der Lichtwelle als Störung auffassen.

Wenn wir nun nach der Wahrscheinlichkeit W fragen, dass pro Zeiteinheit ein positives und ein negatives Teilchen mit den Impulsen $h\vec{k}$ bzw. $-h\vec{l}$ und der Energie E_k bzw. E_l durch Absorption eines Lichtquants $h\nu = E_k + E_l$ im leeren Raum entsteht,

[1]) Proc. Roy. Soc. **146**, 83, 1934.

so erhalten wir erst in zweiter Näherung ein von Null verschiedenes Resultat:

$$W = \frac{1}{h^2} \left| \sum_c \frac{\bar{H}_1(AC)\,\bar{H}_2(CB)}{E_B - E_C} + \frac{\bar{H}_2(AC)\,\bar{H}_1(CB)}{E_A - E_C} \right|^2. \tag{55}$$

A sei der Zustand des Vakuums (alle $N = 0$), B sei der Endzustand ($N_k^+ = 1$, $N_l^- = 1$, alle andern $N = 0$), C bedeute irgend einen Zwischenzustand. $\bar{H}_1\,(AC)\ldots$ etc. bedeutet das Matrixelement von $\bar{H}_1$ zwischen den Zuständen A und C, wobei in $\bar{H}_2$ das skalare Potential Φ_0 und in $\bar{H}_1$ das Vektorpotential $\vec{\Phi}$ der Lichtwelle mit der Frequenz ν einzusetzen ist. Infolge des Impulssatzes, der sich bei der Berechnung von $\bar{H}_1$ ergibt, kommen nur folgende 4 Zwischenzustände in Frage:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 \rightarrow N_k^+ = 1, \; N_{k-n}^- = 1 \\ C_2 \rightarrow N_{l+n}^+ = 1, \; N_l^- = 1 \\ C_3 \rightarrow N_k^+ = 1, \; N_{l+n}^- = 1 \\ C_4 \rightarrow N_{k-n} = 1, \; N_l^- = 1 \end{array}\right\} \text{ alle andern } N = 0$$

Die betreffenden Matrixelemente lassen sich aus (52) und (53) berechnen und führen zu einem Ausdruck, den wir als differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\Phi$ anschreiben, dass ein unpolarisiertes Lichtquant der Frequenz ν ein positives Teilchen mit der Energie zwischen E_+ und $E_+ + dE$ ein negatives mit der Energie zwischen E_- und $E_- - dE$ erzeugt ($E_+ + E_- = h\nu$) und deren Impulse $\vec{p}_+$ und $\vec{p}_-$ mit der Richtung des Lichtquants die Winkel ϑ_+ und ϑ_- einschliessen:

$$dQ = \frac{1}{8\pi^3}\frac{e^2}{hc}\frac{1}{h^3\nu^3}\sin\vartheta_+\sin\vartheta_-\,d\vartheta_+\,d\vartheta_-\,d\varphi\,\frac{p_+p_-}{h^4}\,dE\,|\,\Phi_0(\vec{q})\,|^2$$

$$\cdot\left\{\frac{E_-^2\,p_+^2\sin^2\vartheta_+}{(E_+ - cp_+\cos\vartheta_+)^2} + \frac{E_+^2\,p_-^2\sin^2\vartheta_-}{(E_- - cp_-\cos\vartheta_-)^2} + \frac{2\,E_+E_-\,p_+p_-\sin\vartheta_+\sin\vartheta_-\cos\varphi}{(E_+ - cp_+\cos\vartheta_+)(E_- - cp_-\cos\vartheta_-)}\right\}. \tag{56}$$

φ ist der Winkel zwischen den Ebenen, die aus der Richtung des Lichtquants und den Richtungen p_+ bzw. p_- gebildet werden.

$\Phi_0(\vec{q})$ bedeutet hier das Matrixelement

$$\Phi_0\,(\vec{q}) = \int \Phi_0\,(x)\,e^{i\,(\vec{q},\,\vec{x})}\,dV.$$

(Es enthält im Gegensatz zu (49) nicht mehr das Gesamtvolumen V), wobei $h\vec{q}$ der an das elektrische Feld abgegebene Impulsüberschuss

$$h\vec{q} = (\vec{p}_+ - \vec{p}_- - h\vec{n})$$

ist. $\vec{n}$ ist der Ausbreitungsvektor des Lichtquants.

Im Coulombfeld $\Phi_0 = \frac{Z e}{r}$ ist zu setzen:

$$\Phi_0(\vec{q}) = 4\pi Z e \frac{1}{q^4}\,.$$

Der entsprechende Ausdruck in der Löchertheorie lautet nach Bethe und Heitler:

$$dQ = \frac{1}{8\pi^3}\frac{e^2}{hc}\frac{1}{h^3\nu^3}\sin\vartheta_+ \sin\vartheta_-\, d\vartheta_+\, d\vartheta_-\, d\varphi \frac{p_+ p_-}{h^4}\, dE\, |\Phi_0(\vec{q})|^2 .$$

$$\cdot \left\{ \frac{p_+^2 \sin_+^2 \vartheta_+ (E_-^2 - h^2 c^2 q^2/4)}{(E_+ - c p_+ \cos\vartheta_+)^2} + \frac{p_-^2 \sin_-^2 \vartheta_- (E_+^2 - h^2 c^2 q^2/4)}{(E_- - c p_- \cos\vartheta_-)^2} \right.$$

$$+ \frac{2 p_- p_+ \sin\vartheta_- \sin\vartheta_+ \cos\varphi\, (E_- E_+ + c^2 h^2 q^2/4)}{(E_+ - c p_+ \cos\vartheta_+)(E_- - c p_- \cos\vartheta_-)}$$

$$\left. - \frac{\frac{1}{2} h^2 \nu^2 [p_+^2 \sin^2\vartheta_+ + p_-^2 \sin^2\vartheta_- + 2 p_+ p_- \sin\vartheta_+ \sin\vartheta_- \cos\varphi]}{(E_+ - c p_+ \cos\vartheta_+)(E_- - c p_- \cos\vartheta_-)} \right\}.$$

Er unterscheidet sich von dem aus der skalaren Wellengleichung gewonnenen Ausdruck (56) nur durch das dritte Glied in der geschwungenen Klammer und in den dort auftretenden Gliedern mit q^2. Die letzteren sind aber bei hohen Energien zu vernachlässigen, da $hc\,|\vec{q}| \ll h\nu$ für $h\nu \gg mc^2$.

Setzt man für Φ_0 das Coulombpotential ein, so lässt sich die Integration über die Winkel für den Grenzfall $h\nu \gg mc^2$ leicht ausführen[1]). Man erhält:

$$dQ = \frac{Z^2 e^2}{hc}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{32}{3}\frac{E_+ E_-}{h^3\nu^3}\left(\lg\frac{2 E_+ E_-}{h\nu m c^2} - \frac{1}{2}\right)$$

und für den Gesamtquerschnitt:

$$Q = \frac{Z^2 e^2}{hc}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{16}{9}\lg\frac{2h\nu}{mc^2} - \frac{104}{27}\right).$$

[1]) Wir schulden Herrn Bethe für die Überlassung des Manuskriptes seiner in den Proc. Cambr. Phil. Soc. erscheinenden Arbeit, in der ähnliche Integrationen durchgeführt werden, vielen Dank.

*

Die entsprechenden Formeln der Löchertheorie lauten nach BETHE und HEITLER:

$$dQ = \frac{Z^2 e^2}{hc} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 4\, \frac{E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3} E_+ E_-}{h^3 \nu^3} \left(\lg \frac{2 E_+ E_-}{h \nu m c^2} - \frac{1}{2}\right)$$

bezw.

$$Q = \frac{Z^2 e^2}{hc} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{28}{9} \lg \frac{2 h \nu}{m c^2} - \frac{218}{27}\right).$$

Der Querschnitt für die Paarerzeugung ist also in der hier behandelten Theorie für den Limes $h\nu \gg mc^2$ etwa um den Faktor $4/7$ kleiner.

Zum Schlusse sei noch die Polarisation des Vakuums durch ein elektrostatisches Feld berechnet. Wir berechnen zu diesem Zweck die zusätzliche Ladungsdichte $\varrho(x)$, die durch das Feld Φ_0 einer im Raume vorhandenen „äusseren" Ladungsdichte $\varrho_0(x)$ entsteht; $\varrho(x)$ ist dann die durch ein Potential Φ_0 induzierte Ladungsdichte in einem Raum, der in bezug auf die durch die Wellengleichung beschriebenen positiven und negativen Teilchen *leer* ist.

Es ist vorteilhaft, eine Fourierzerlegung der Dichte vorzunehmen. Man erhält dann aus (16) und (19) für den Fourierkoeffizienten:

$$\varrho(\vec{\zeta}) = \frac{1}{V} \int \varrho(\vec{x})\, e^{-i(\vec{\zeta}\vec{x})}\, dV = \sum_k (p_l^* q_k^* - p_k q_l)$$

wobei $\vec{l} = \vec{k} + \vec{\zeta}$. Weiter entsteht nach (27) durch Einführung der Operatoren a und b:

$$\varrho(\vec{\zeta}) = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{E_k - E_l}{\sqrt{E_k E_l}} (a_k^* a_l - b_l^* b_k) + \frac{E_k + E_l}{\sqrt{E_k E_l}} (a_k^* b_l^* - a_l b_k) \right\}. \quad (57)$$

Diesen Operator haben wir nun auf das durch das äussere Feld Φ_0 gestörte Schrödingerfunktional des leeren Raumes $c(\ldots 0 \ldots ; \ldots 0 \ldots)$ anzuwenden. Durch eine Störungsrechnung ergibt sich in erster Näherung aus (52):

$$c(\ldots 0 \ldots ; \ldots 0 \ldots) = c_0(\ldots 0 \ldots ; \ldots 0 \ldots)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{kl} \Phi_{kl}^0 \frac{E_k - E_l}{\sqrt{E_k E_l}\,(E_k + E_l)}\, c_0(\ldots 1_k \ldots ; \ldots 1_l \ldots), \quad (58)$$

wobei $c_0(\ldots 0 \ldots ; \ldots 0 \ldots)$ und $c_0(\ldots 1_k \ldots ; \ldots 1_l \ldots)$ die Funktionale des feldfreien Zustandes im Vakuum bzw. im Falle:

($N_k^+ = 1$, $N_l^- = 1$, alle andern $N = 0$) bedeuten. Bildet man nun den Erwartungswert des Operators $\varrho(\vec{\zeta})$ für den Zustand c (. . . 0 . ; . 0 . .) so erhält man

$$\overline{\varrho}\,(\vec{\zeta}) = -\frac{l}{2}\,\Phi_0(\vec{\zeta}) \sum_k \frac{(E_k - E_l)^2}{E_k E_l (E_k + E_l)}, \quad \vec{l} = \vec{k} + \vec{\zeta}.$$

Die Summe über k divergiert logarithmisch, wie man leicht sehen kann. Man erhält nämlich nach Integration über die Richtungen von $\vec{k}$:

$$\overline{\varrho}(\vec{\zeta}) = -\frac{e}{12\,hc\pi^2\,\zeta^2}\,\Phi_0(\vec{\zeta}) \int\limits_{k_0}^{\infty} \frac{d\,|k|}{|k|} + \text{endl. Glieder.}$$

Kehrt man in den Koordinatenraum zurück, so ergibt dies:

$$\overline{\varrho}(x) = K\,\Delta\,\Phi_0 + \text{endl. Glieder}$$

$$K = \frac{1}{12\,\pi^2}\,\frac{e}{hc} \int \frac{d\,|k|}{|k|}.$$

Die induzierte Ladungsdichte hat entgegengesetztes Vorzeichen, wie die äussere Dichte $\varrho_0 = -\frac{1}{4\,\pi}\,\Delta\,\Phi_0$ und ist zu dieser proportional, mit dem divergierenden Proportionalitätsfaktor $4\,\pi K$, was zur Folge hätte, dass jede äussere Ladung durch die induzierte vollständig kompensiert würde. Dieses Resultat stimmt mit dem von DIRAC[1]) auf Grund seiner Löchertheorie berechneten vollständig überein. Selbst der Faktor K des divergierenden Gliedes ist der gleiche.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.

[1]) P. A. M. DIRAC, Solvay-Bericht 1933.