Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 9 (1936)
Heft: IV

Artikel: Über die künstliche Umwandlung des Protons in ein Neutron
Autor: Fierz, Markus
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110626

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die künstliche Umwandlung des Protons in ein Neutron

von **Markus Fierz.**

(18. II. 36.)

Inhalt: Es werden mit Hilfe der Theorie des β-Zerfalls von FERMI die Wirkungsquerschnitte für die künstliche Umwandlung von einem Proton in ein Neutron berechnet.

§ 1 gibt eine allgemeine Charakterisierung der Fermischen Theorie und der Prozesse, die in der folgenden Arbeit damit behandelt werden.

§ 3 behandelt diejenigen Prozesse, die in der Fermischen Theorie mit einem Störungsverfahren 1. Ordnung behandelt werden können.

§ 4 berücksichtigt überdies noch die Wirkung des elektromagnetischen Feldes in 1. Ordnung.

Es zeigt sich, dass die berechneten Wirkungsquerschnitte weit unter dem experimentell Beobachtbaren liegen.

§ 1. Einleitung.

Das Problem der Umwandlung des Protons in ein Neutron kann mit Hilfe der Theorie des β-Zerfalls von FERMI[1]) behandelt werden. Diese Theorie beschreibt den β-Zerfall in Analogie zur Lichtausstrahlung eines angeregten Atoms.

Der Emission eines Lichtquants beim Quantensprung eines Elektrons entspricht beim β-Zerfall die gleichzeitige Emission eines Elektrons und eines Neutrinos der Ruhemasse null beim Übergang eines „schweren Teilchens" vom Neutronenzustand in den Protonenzustand.

Wie in der Strahlungstheorie die Grösse e^2/hc ein Mass ist für die Koppelung des Elektrons mit dem Strahlungsfeld, so gibt es hier eine Zahl $G \sim 10^{-25}$, die ein Mass ist für die Koppelung der „schweren Teilchen" (Neutron-Proton) mit dem Elektronen-Neutrino-Feld. Die Zahl G ist (ebenso wie e^2/hc) rein experimentell bestimmt, und ihre Kleinheit trägt der Tatsache Rechnung, dass die Lebensdauer der Kerne im Zustande vor dem β-Zerfall ausserordentlich gross ist, verglichen mit der Lebensdauer eines angeregten Zustandes der Elektronenhülle eines Atoms. Wenn die spontanen β-Prozesse schon sehr unwahrscheinlich sind, so liegen

---

[1]) Z. f. Phys. 1934, **88**, 169.

*

daher künstliche, wie wir sehen werden, weit unter der Grenze des Beobachtbaren.

Durch den hier skizzierten Grundgedanken der Fermischen Theorie ist nun allerdings die genaue Form der Wechselwirkung zwischen dem Feld der „schweren Teilchen" und dem Elektronen-Neutrinofeld nicht bestimmt. FERMI hat den einfachsten möglichen Ansatz gewählt; man kann aber diesen Ansatz auf verschiedene Arten abändern, um die Theorie den Experimenten besser anzupassen. So haben KONOPINSKY und UHLENBECK[1]) einen Ansatz für die Wechselwirkung vorgeschlagen, der noch eine Ableitung nach den Koordinaten der Neutrinos enthält, und der offenbar eine wesentlich bessere Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung ergibt. Wir werden daher im folgenden neben der Fermischen Wechselwirkung auch die von KONOPINSKY und UHLENBECK berücksichtigen. Alle Ansätze für die Wechselwirkung lassen sich heute nur durch die Erfahrung stützen; irgendwelche stichhaltige theoretische Gründe lassen sich dazu nicht beibringen.

Es scheint heute ziemlich sicher zu sein, dass das Neutron schwerer ist als das Wasserstoffatom. Daraus folgt, dass der Übergang Neutron-Proton spontan vor sich geht: Das freie Neutron ist demnach der einfachste β-Strahler, den es gibt.

Der inverse β-Prozess besteht darin, dass ein Proton (das frei oder in einem Kern gebunden sein kann) gleichzeitig ein Neutrino und ein Elektron absorbiert und sich so in ein Neutron verwandelt. Ein solcher Übergang wird z. B. dann eintreten, wenn man einen Kern mit Neutrinos geeigneter Energie beschiesst. Es besteht dann die Möglichkeit, dass der Kern ein Neutrino gleichzeitig mit einem Hüllelektron absorbiert. Leider ist der Wirkungsquerschnitt eines solchen Prozesses so klein, dass er wohl kaum nachgewiesen werden kann.

Man kann nun diese Fermische Theorie mit der Löchertheorie des Positrons kombinieren[2]).

Da das Neutrino, wie das Elektron, einer Dirac-Gleichung genügt, so müssen wir konsequenterweise auch ein Antineutrino

---

[1]) Phys. Rev., Juli 1935, **48**, 7.

[2]) Wie weit die Folgerungen, die aus dieser Verbindung gewonnen werden, richtig sind, kann wiederum nur experimentell entschieden werden. Es muss hier nur festgestellt werden, dass aus dieser Verbindung mehr folgt, als wenn man die blosse Vorstellung Paarerzeugung und -vernichtung herbeizieht. Da aber die Fermische Theorie für die leichten Teilchen die Gültigkeit der Diracgleichung voraussetzt, so muss heute eine quantitative Behandlung dieser Theorie im Rahmen der Löchertheorie erfolgen.

einführen, das als „Loch" in den Zuständen negativer Energie der Neutrinos aufzufassen ist. Mit Hilfe dieser Vorstellungen kann dann der Zerfall der künstlichen radioaktiven Elemente, bei denen *Positronen* emittiert werden, ebenfalls als inverser β-Zerfall aufgefasst werden:

Bei diesem Prozess werden ein Elektron und ein Neutrino, beide negativer Energie, verschluckt; ein Proton verwandelt sich in ein Neutron, und Positron und Antineutrino (die Löcher in den negativen Energietermen) fliegen weg. Bei diesem Prozess muss das schwere Teilchen Energie aufnehmen, weil das Neutron schwerer als das Proton ist. Gebundene Protonen beziehen diese Energie aus dem Kern. Bei freien Protonen muss aber mindestens eines der absorbierten Teilchen positive Energie haben. Dies führt dann zu Prozessen, bei denen ein Teilchen positiver und eines negativer Energie absorbiert wird; oder, da die Teilchen negativer Energie unsichtbar sind und nur die „Löcher" beobachtet werden können, Prozesse, bei denen ein Teilchen absorbiert wird und ein anderes (Positron, Antineutrino) emittiert wird. Es sind das die schon von Bethe und Peierls betrachteten Prozesse[1]):

1. Absorption eines Neutrinos und Emission eines Positrons;
2. Absorption eines Elektrons und Emission eines Antineutrinos.

Besonders der erste Prozess ist dabei wichtig: Falls er experimentell nachgewiesen werden könnte, hätte man damit ein Zeugnis für die Existenz des Neutrinos.

Der β-Zerfall kann aber auch durch Lichtquanten hervorgerufen werden, da an ihm immer geladene Teilchen beteiligt sind. Der Wirkungsquerschnitt eines solchen Prozesses wird neben G auch e^2/hc als Faktor enthalten. In den Rechnungen werden 2 Matrixelemente auftreten, das des β-Zerfalls und das der Strahlung.

Diese Prozesse heissen wir Prozesse 2. Ordnung, da zu ihrer Berechnung das Störungsverfahren zweimal angewendet werden muss. Neben der Verwandlung des Protons in ein Neutron durch Bestrahlung mit Licht, ist hier diejenige Umwandlung durch Beschiessung mit Elektronen wichtig, bei der im Endzustand neben dem Antineutrino noch ein Lichtquant vorhanden sein soll[2]).

Im folgenden werden nun die Wirkungsquerschnitte für die hier aufgezählten Prozesse ausgerechnet. Dabei soll die Masse

[1]) Nature 1934, **133**, 532.

[2]) Da dieser Prozess qualitativ ohne die Löchervorstellung, bloss auf Grund der allgemeinen Vorstellung der Paarerzeugung und -vernichtung, interpretiert werden kann (vgl. G. Wentzel, Naturw. 1935, **23**/2, 35), darf seine Existenz als sicherer gelten als die der obenerwähnten Prozesse 1. Ordnung.

der schweren Teilchen ∞ gesetzt werden, d. h. die schweren Teilchen nehmen zwar Impuls auf, aber keine merklichen Energiemengen.

Bei Prozessen 2. Ordnung setzen wir weiter voraus, dass die Energie des ankommenden Teilchens gross sei gegen die Ruhe-Energie des Elektrons.

$$E \text{ (Primärteilchen)} \gg mc^2.$$

§ 2.

Für das Folgende soll die nachstehende Bezeichnungsweise gelten:

Es ist a^* die zu a konjugiert-komplexe Matrix

$$(a_{ik})^* = (a^*_{ik})$$

$\tilde{a}$ die zu a hermitesch-konjugierte Matrix

$$(\tilde{a}_{ik}) = (a^*_{ki})$$

$\bar{a} = \tilde{a}^*$ die zu a transponierte Matrix

$$(\bar{a}_{ik}) = (a_{ki}).$$

Für hermitesche Matrizen ist also

$$\tilde{a} = a, \ \bar{a} = a^*$$

Einen Spinor ψ oder ψ^* fassen wir auf als Matrix mit einer Zeile und 4 Kolonnen; demnach $\tilde{\psi}$ und $\bar{\psi}$ als Matrix einer Kolonne und 4 Zeilen.

Untere Indices beziehen sich immer auf die Teilchenzustände:

n Neutronenzustand,
p Protonenzustand,
s, s' Elektronenzustände,
σ Neutrinozustand.

Obere Indices $^{k, j, r}$ beziehen sich auf die vier orthogonalen Zustände, die zu einem vorgegebenen Impuls gehören.

$E^k(p)$ $(k = 1 \ldots 4)$ sind die zum Impuls p gehörigen Energiewerte, die positiv oder negativ, je nachdem $k = 1{,}2$ oder $= 3{,}4$.

$$| E^k(p) | = E(p) .$$

Das Fermische Matrixelement hat in dieser Bezeichnungsweise die Form

$$H_n^p = G \cdot mc^2 \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3 \cdot \frac{1}{\Omega} \cdot \int v_p^* \, w_n \, u_s^k \, \delta \, \overline{\varphi}_\sigma^r \, d\tau .$$

Dabei ist Ω das Volumen, in dem sich je ein Proton bzw. Neutron befindet.

v_p, w_n sind die einkomponentigen (unrelativistischen) Eigenfunktionen des schweren Teilchens im Protonen- bzw. Neutronenzustand.

u_s^k, φ_σ^r (k, $r = 1, 2, 3, 4$) sind die Eigenfunktionen des Elektrons ($_s$) und des Neutrinos ($_\sigma$). Sie werden am Ort des schweren Teilchens genommen, und die Integration $d\tau$ erstreckt sich über diese Koordinaten.

Die Grösse $u_s^k \, \delta \, \overline{\varphi}_\sigma^r$ ist die 4. Komponente des Vierervektors $u_s^k \, B \, \gamma^u \, \overline{\varphi}_\sigma^r$ wo B eine Invariante und γ^u die bekannten Dirac'schen Matrizen. Aus der Invarianz von B gegen Lorentztransformation folgt leicht, dass B und somit auch δ unitär ist. (Über die allgemeinen Eigenschaften solcher Grössen wie B, siehe Pauli, W., in Zeemann-Festschrift, 1935.)

Die Änderung von Konopinsky und Uhlenbeck gegenüber Fermi besteht darin, dass sie den Vektor $B\gamma^u$ ersetzen durch

$$\left(\frac{\hbar}{mc}\right) \cdot B \, \frac{\partial}{\partial x_\sigma^u}$$

wo x_σ^u die Koordinate des Neutrinos bedeutet.

Das neue Matrixelement hat dann die Form

$$H_n^p = G \cdot mc^2 \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3 \cdot \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{E^r(p_\sigma)}{mc^2} \int v_p^* w_n \, u_s^k \, B \, \overline{\varphi}_\sigma^r \, d\tau .$$

Handelt es sich um freie Protonen und Neutronen, so sind v_p, w_n ebene Wellen. Fassen wir u_s^k, φ_σ^r auch als ebene Wellen auf, so wird der Integrand in H_n^p unabhängig von τ. Das Integral wird, wegen $| v_p^* w_n | = 1$ zu

$$u_s^k \cdot B \, \gamma^4 \cdot \overline{\varphi}_\sigma^r \qquad \text{bzw.} \qquad u_s^k \cdot B \cdot \overline{\varphi}_\sigma^r ,$$

wobei nun unter u_s^k, φ_σ^r die Amplituden der Spinoren zu verstehen sind.

Beschiesst man ein Proton mit Lichtquanten oder mit Neutrinos, so sind alle Teilchen kräftefrei, daher genau ebene Wellen.

Aber auch im Falle, dass ein Elektron hoher Geschwindigkeit auf das Proton geschossen wird, ist wegen der schwachen Wirkung des Coulombfeldes das Rechnen mit ebenen Wellen eine gute Näherung, die wir daher immer benützen werden.

Sind die Protonen und Neutronen am Kern gebunden, so setzt man mit FERMI das Matrixelement proportional zu

$$u_s^k \, B \, \gamma^4 \, \overline{\varphi}_\sigma^r \int v_p^* \, w_n \, d\tau \, .$$

Dies ist erlaubt, weil die Wellenlängen der leichten Teilchen gross sind gegen den Kernradius.

Von dem Integral $\int v_p^* w_n \, d\tau$ lässt sich nur sagen, dass sein Betrag bei den meisten Prozessen die Grössenordnung 1 hat.

§ 3. Prozesse 1. Ordnung.

1. *Inverser β-Prozess, bei dem 2 Teilchen absorbiert werden.*

Wir denken uns ein Atom der Kernladung Ze mit Neutrinos bestrahlt, deren räumliche Dichte im Frequenzintervall $d\nu$ gleich $f(\nu)\, d\nu$ ist. Es sei W der Energieunterschied des Kerns der Ladung $(Z-1)\, e$ gegen den der Ladung Ze; E_0 die Energie des Elektrons der K-Schale, das bei dem Übergang verschluckt werden soll. $W - E_0$ muss positiv sein, weil sonst der Kern sich spontan in einen solchen kleinerer Kernladung verwandeln würde[1]). Man findet für die Zahl der Übergänge „Z" $\rightarrow$ „$Z-1$" pro Zeiteinheit nach FERMI:

$$N_F = a \cdot 2\pi \cdot G^2 \cdot \left(\frac{e^2 Z}{\hbar c}\right)^3 \cdot \frac{\hbar}{mc} \cdot c^2 \left| \int v_p^* w_n \, d\tau \right|^2 \cdot f\left(\frac{W - E_0}{h}\right)$$

nach KONOPINSKY und UHLENBECK:

$$N_{k \cdot u} = a \cdot 2\pi \cdot G^2 \cdot \left(\frac{e^2 Z}{\hbar c}\right)^3 \cdot \frac{\hbar}{mc} \cdot$$

$$\left(\frac{W - E_0}{mc}\right)^2 \left| \int v_p^* w_n d\tau \right|^2 \cdot f\left(\frac{W - E_0}{h}\right) \cdot$$

Dabei ist a die Zahl der k-Elektronen (1 oder 2). (Im Falle des Wasserstoffs ist $a \cdot \left| \int v_p^* w_n d\tau \right| = 1$.) Der Faktor $\left(\frac{e^2 Z}{\hbar c}\right)^3$ stammt

[1]) G. WENTZEL, l. c., Fussnote S. 247.

aus der Dichte der k-Elektronen am Orte des Kerns. Wir können auch einen Wirkungsquerschnitt angeben:

$$\Phi_F = a \cdot 2\pi \cdot G^2 \cdot \left(\frac{e^2 Z}{\hbar c}\right)^3 \cdot \frac{\hbar}{m} \left| \int v_p^* w_n \, d\tau \right|^2 \frac{f\left(\frac{W-E_0}{\hbar}\right)}{\int f(\nu) \, d\nu}$$

$$\Phi_{k \cdot u} = \Phi_F \cdot \left(\frac{E_0 - W}{mc^2}\right)^2.$$

Bei einigermassen günstigen Verhältnissen hat dieser Wirkungsquerschnitt die Grössenordnung:

$$\Phi \sim G^2 \cdot \left(\frac{e^2 Z}{\hbar c}\right)^3 \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2.$$

2. *Prozesse 1. Ordnung, bei denen ein Teilchen absorbiert und eines emittiert wird.*

Wir nehmen an, dass ein Elektron oder ein Neutrino auf das Proton geschossen werde (das ankommende Teilchen habe die Geschwindigkeit v, die im Falle des Neutrinos $= c$ ist) und dieses sich in ein Neutron verwandle, indem es ein Antineutrino oder ein Positron (Impuls des wegfliegenden Teilchens $= \vec{p}$) emittiert. Die Störungsrechnung liefert als differentiellen Wirkungsquerschnitt für einen Übergang Proton-Neutron, bei dem das emittierte Teilchen in das Raumwinkelelement $d\Theta$ geht:

Nach Fermi:

$$d\Phi_F = 2\pi \cdot \frac{c}{v} \cdot G^2 \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \cdot \left(\frac{p}{mc}\right)^2 \left(1 + \frac{(\vec{p}_s \cdot \vec{p}_\sigma) \cdot c}{E(p_s)\, p_\sigma}\right) d\Theta_\sigma$$

$\vec{p}_s =$ Elektronen- (Positronen-) Impuls,
$\vec{p}_\sigma =$ Anti-Neutrino- (Neutrino-) Impuls.

Nach Konopinsky und Uhlenbeck:

$$d\Phi_{k \cdot u} = 2\pi \cdot \frac{c}{v} \cdot G^2 \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \cdot \left(\frac{p}{mc}\right)^2 \cdot \left(\frac{p_\sigma}{mc}\right)^2 \left(1 - \frac{(\vec{p}_s \vec{p}_\sigma) \cdot c}{E(p_s)\, p_\sigma)}\right)^{1)} d\Theta_\sigma$$

Es gilt der Energiesatz: E (Primärteilchen) $= E(p) + W$.

---

[1]) Der Faktor

$$1 \pm \frac{(\vec{p}_s \vec{p}_\sigma) \cdot c}{E(p_s)\, p_\sigma}$$

rührt von der Forderung her, dass die wirklichen Teilchen nur positive Energie haben können. Herr Professor Bloch hatte die Freundlichkeit, mich darauf hinzuweisen, dass man auf Grund dieses Vorzeichenwechsels mit Hilfe von Rückstossexperimenten zwischen den verschiedenen Ansätzen für H entscheiden kann.

§ 4. Prozesse 2. Ordnung.

Für das Folgende ergibt es eine gewisse Vereinfachung der Darstellung, nicht den Übergang Neutron-Proton, sondern denjenigen Proton-Neutron als Emissionsprozess aufzufassen. Wir wollen uns also von jetzt an vorstellen, dass beim Übergang Proton-Neutron ein Positron und ein Neutrino *emittiert* werden (statt ein Elektron und ein Neutrino, beide negativer Energie, *absorbiert*). Das gewöhnliche Elektron fassen wir dann als Loch auf in den besetzten Zuständen negativer Energie des Positrons. Dies ist ohne weiteres erlaubt, da die Löchertheorie symmetrisch ist inbezug auf die Teilchen und die als Teilchen interpretierten Löcher.

A. *Umwandlung des Protons durch Lichtquanten in ein Neutron.*

Als ersten Prozess betrachten wir die Umwandlung des (freien) Protons durch ein Lichtquant. Im Einzelnen kann man sich diesen Prozess so denken:

Das Proton hat einen Zwischenzustand, in dem es ein Neutron & Positron & Neutrino ist. Das Positron des Zwischenzustandes absorbiert nun das ankommende Lichtquant und fliegt weg. Dabei kann das Positron im Zwischenzustand auch negative Energie haben. Diesen zweiten Fall kann man auch folgendermassen beschreiben:

Das Lichtquant erzeugt zuerst ein Elektronenpaar: Positron und Elektron. Das Elektron fassen wir nun, wie gesagt, als „Loch" auf in den Zuständen negativer Energie des Positrons. In diesen Zustand geht jetzt das beim nachfolgenden β-Zerfall freiwerdende Positron.

Formal macht es hier keinen Unterschied, ob wir von Zwischenzuständen negativer Energie reden oder die zweite Vorstellung der Paarerzeugung benützen; die Rechnung verläuft beidemal gleich. Wir legen für unsere Betrachtung die erste Interpretation zugrunde.

Wir rechnen mit ebenen Wellen; dann hat das Fermische Matrixelement die Form

$$H_n^p = G \cdot mc^2 \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3 \cdot \frac{1}{\Omega} \cdot \varphi_\sigma^r \, \delta \, \bar{u}_s^k .$$

Das Matrixelement der Strahlung ist gleich

$$W_s^{s'} = e \cdot \sqrt{\frac{hc^2}{\nu\Omega}}\,(u_{s'}^{*k}\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{e})\,\bar{u}_s^j); \quad k, j = 1, 2, 3, 4\,.$$

Dabei ist ν die Kreisfrequenz des Lichtes,
$\mathfrak{e}$ sein Polarisations-Vektor,
$\vec{\alpha}$ der Dirac'sche Matrix-Vektor.

Die Spinoramplituden sind auf 1 normiert

$$\sum_{k=1}^{4} |u_s^k|^2 = \sum_{r=1}^{4} |\varphi_\sigma^r|^2 = 1\,.$$

Die Zahl der Übergänge Proton-Neutron pro Zeiteinheit, bei denen ein Positron mit dem Impuls $\vec{p}$ entsteht und das Neutrino in das Raumwinkelelement $d\Theta_\sigma$ geht, ist dann:

$$W(\vec{p}) = \frac{G^2}{2\pi} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \left(\frac{h}{mc}\right)^4 \cdot \frac{E_\sigma^2}{\Omega^2} \cdot \frac{c^2}{\nu} \cdot f \cdot d\Theta_\sigma$$

wo

$$f = \sum_{j=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \left| \sum_{k=1}^{4} \frac{\varphi_\sigma^r\,\delta\,\bar{u}^k(p')\,u^{*k}(p')\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{e}) \cdot \bar{u}^j(p)}{\hbar\nu + E^k(p') - E(p)} \right|^2.$$

Es gilt der Energiesatz:

$$E_\sigma = \hbar\nu - W - E(p), \text{ wo } W \text{ wie oben } (M_n - M_p) \cdot c^2,$$

und der Impulssatz für den Zwischenzustand $\vec{p}'$ und den Endzustand $\vec{p}$

$$\vec{p}' = \vec{p} - \frac{\hbar\vec{\nu}}{c}\,.$$

Um in f über k summieren zu können, erweitern wir mit $\hbar\nu - E^k(p') - E(p)$, wofür wir im Zähler, wegen $H(p')\,\bar{u}^k(p') = E^k(p')\,\bar{u}_k(p')$ auch schreiben können

$$h\nu - H(p') - E(p) \qquad (H(p') = c(\vec{\alpha}\,\vec{p}') + \beta\,mc^2)\,.$$

Da $\sum_{k=1}^{4} \bar{u}^k\,u^{*k} = 1$, wird

$$f = \sum_{j=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \left| \frac{\varphi_\sigma^r\,\delta \cdot (\hbar\nu - E(p) - H(p'))\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{e})\,\bar{u}^j(p)}{2\hbar\nu\,[(\vec{p}\,\vec{c}) - E(p)]} \right|^2.$$

Dabei wurde der Nenner unter Benützung des Impulssatzes umgeformt.

Um bei der Summation über r, j von 1 bis 4 summieren zu können — denn dann kann man wieder die Orthogonalität der

u_s^k und φ_σ^r benützen — führen wir die Operatoren D^{el} und D^n ein

$$D^{\mathrm{el}} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{c(\vec{\alpha}\,\vec{p}) + \beta\, m\, c^2}{E(p)}\right), \quad D^n = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{(\vec{\alpha}\,\vec{p}_\sigma)}{p_\sigma}\right).$$

$$\text{Es ist } \mathrm{D}u^k = \begin{cases} o \text{ für } k = 3{,}4 \\ u^k \text{ für } k = 1{,}2. \end{cases}$$

Schreiben wir die Abkürzung

$$A = (\hbar\nu - E(p) - H(p'))\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{e})$$

so wird

$$f = \sum_{j=1}^{4}\sum_{r=1}^{4} \frac{D^n \cdot \varphi_\sigma^r \cdot \delta \cdot A \cdot D^{\mathrm{el}} \cdot \bar{u}^j(p) \cdot u^{*j}(p) \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{\delta} \cdot \tilde{\varphi}_\sigma^r}{4\,(\hbar\nu)^2\,[(\vec{p}\,\vec{c}) - E(p)]^2}.$$

Die Summe über j lässt sich sofort ausführen, wie oben über k. Wir integrieren weiter über die Richtungen der Neutrinos $d\Theta_\sigma$. Davon hängt nur D^n ab, und dies ergibt bei der Integration 2π.

Da nun allgemein

$$\sum_{k=1}^{4} \varphi^k M \tilde{\varphi}^k = \text{Spur von } M = Sp\, M = Sp\, \tilde{\delta}\, M\, \tilde{\delta};\ (\delta\tilde{\delta} = 1)$$

so wird

$$\int f\, d\,\Theta_\sigma = \bar{f} = \pi/4\; Sp\Bigg[(\hbar\nu - E(p) - c(\vec{\alpha}\,\vec{p}') - \beta\, mc^2)\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{e}) \cdot$$

$$\cdot\left(1 + \frac{c(\vec{\alpha}\,\vec{p}) + \beta\, m\, c^2}{E(p)}\right) \frac{(\alpha\mathfrak{e})\,(\hbar\nu - E(p) - c(\vec{\alpha}\,\vec{p}') - \beta\, mc^2)}{(\hbar\nu)^2\,[(\vec{p}\,\vec{c}) - E(p)]^2}\Bigg].$$

Zur Spurbildung benützen wir folgende Identitäten, die man mit Hilfe der Vertauschungsrelationen der α^k, β leicht beweist:

$$\tfrac{1}{4}\, Sp\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{v}_1)\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{v}_2) = (\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2)$$

$$\tfrac{1}{4}\, Sp\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{v}_1)\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{v}_2)\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{v}_3)\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{v}_4) = (\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2)\,(\mathfrak{v}_3\mathfrak{v}_4) + (\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_3)\,(\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_4) - (\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_3)\,(\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_4)$$

$$Sp\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{v}_1)\ldots(\vec{\alpha}\,\mathfrak{v}_{2n+1}) = Sp\,\beta\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{v}_1)\ldots(\vec{\alpha}\,\mathfrak{v}_k) = 0.$$

Damit erhalten wir für $\bar{f}$, unter Beachtung des Impulssatzes

$$\bar{f} = 2\,\pi\, \frac{(\hbar\nu)^2\left(1 - \frac{(\vec{p}\,\vec{c})}{E(p)}\right) + 2c^2\,(\vec{p}\,\mathfrak{e})^2\left(1 - \frac{\hbar\nu}{E(p)}\right)}{(\hbar\nu)^2\,[(\vec{p}\,\vec{c}) - E(p)]^2}.$$

$\vec{c}$ ist hier die vektorielle Lichtgeschwindigkeit. Führen wir nun ein Koordinatensystem ein, dessen z-Achse in der Richtung von $\vec{c}$ liegt, und dessen x-Achse in $\mathfrak{e}$, so ist

$$p_x = p \cos \varphi \sin \vartheta = (\vec{p}\,\mathfrak{e})$$

$$p_z = p \cos \vartheta = 1/c\,(\vec{p}\,\vec{c})$$

und der Gesamtwirkungsquerschnitt für unseren Prozess wird daher

$$\Phi_F = \frac{G^2}{(2\pi)^4} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^4 \cdot \frac{E^2(p_\sigma)}{\hbar^3} \frac{c}{\nu} \int_0^{p_{\max}} p^2\, dp \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta\, d\vartheta \cdot \bar{f}.$$

Die Integration wollen wir nun nur für sehr harte Lichtquanten ausführen: $\hbar\nu \gg mc^2$.

Wir vernachlässigen Grössen der Ordnung $mc^2\hbar\nu$ und W^2 gegen $(\hbar\nu)^2$ (W = Massendefekt Neutron-Proton). Da der Integrand von $\int_0^{p_{\max}} dp$ sehr stark mit p wächst, so dürfen wir im ganzen Integrationsintervall mc gegen p vernachlässigen, d. h. $E(p) = cp$ setzen. Nur im Nenner von $\bar{f}$ muss

$$E(p) = cp\left(1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{mc}{p}\right)^2\right)$$

gesetzt werden, da sonst die Integration über ϑ divergiert.

Wenn wir die Integration in solcher Näherung durchführen, so erhalten wir:

$$\Phi_F = \frac{G^2}{(2\pi)^2} \cdot \frac{e^2}{\hbar\, c} \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \cdot \left(\frac{\hbar\nu}{mc^2}\right)^2 \left\{ \frac{14}{15} \lg \frac{2p_{\max}}{mc} + \frac{11}{10} \right.$$

$$\left. - \frac{W}{\hbar\nu}\left(\frac{8}{3} \lg \frac{2p_{\max}}{mc} + 19 - \frac{22}{45} + 4 \lg 2\right)\right\}$$

$$p_{\max} = \frac{\hbar\nu - W}{c}.$$

Wenn man statt der Fermischen Wechselwirkung die von Konopinsky und Uhlenbeck zugrunde legt, so ändern sich die Rechnungen nur bei der Integration über p. Insbesondere ist die Grösse f genau die gleiche, weil B wie δ unitär ist, und das ist die

einzige Eigenschaft dieser Operatoren, die wir benützt haben. Wir erhalten:

$$\Phi_{ku} = \frac{G^2}{(2\pi)^2} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \cdot \left(\frac{\hbar\nu}{mc^2}\right)^4 \cdot \left\{\frac{32}{105} \lg \frac{2p_m}{mc} - \frac{97}{3675} - \frac{W}{\hbar\nu}\left\{\left(\lg \frac{2p_m}{mc}\right) \cdot \frac{187}{10} + 48 + \frac{6619}{12600}\right\}\right\}.$$

B. *Umwandlung des Protons durch den Stoss eines geladenen Teilchens.*

Man kann versuchen, den oben berechneten Querschnitt Φ zur Abschätzung der Wirkung geladener Teilchen zu benützen, die mit annähernd Lichtgeschwindigkeit am Proton vorbeifliegen. Das Feld des Teilchens kann dann in bekannter Weise[1]) als Lichtfeld dargestellt werden, und die Wirkung des Lichtes haben wir berechnet.

Der Stoss eines Teilchens, das im Abstande r am Proton vorbeifliegt, liefert im Frequenzintervall $d\nu$ eine Lichtintensität

$$f(\nu)\, d\nu = \frac{e^2}{\pi^2 r^2 c}$$

wo e die Ladung des stossenden Teilchens ist.

Dabei muss jedoch

$$\nu < \nu_m$$

sein. Dieses ν_m ist durch folgende zwei Bedingungen gegeben:

1. Es muss ν kleiner sein als die reziproke Stosszeit. Setzen wir die Energie des stossenden Teilchens $= Mc^2\xi$, so lautet diese Bedingung

$$\nu < \frac{K \cdot c\,\xi}{r},$$

dabei ist K eine Zahl ~ 1, die wir $= 1$ setzen können.

2. Es können keine Quanten vorkommen, deren Energie grösser ist als $Mc^2\xi$

$$\hbar\nu < Mc^2\xi\,.$$

Für ν, die oberhalb einer dieser Grenzen liegen, setzen wir

$$f(\nu) = 0.$$

---

[1]) v. Weizsäcker, Z. f. P. 1934, **88**, 612.

Welche der beiden Bedingungen die stärkere ist, hängt vom Stossabstand r ab, und zwar ist

$$\text{für } r > \frac{\hbar}{Mc} : 1. \text{ die stärkere Bedingung,}$$

$$\text{für } r < \frac{\hbar}{Mc} : 2.$$

Damit das Integral über alle Stossabstände etwas Endliches liefert, müssen wir einen kleinsten Stossabstand ϱ einführen. Es wird weiter unten gezeigt werden, dass bei Elektronen ϱ mit einiger Berechtigung $\sim \frac{e^2}{m c^2}$ gesetzt werden kann. Bei schweren Teilchen hingegen ist dies so willkürlich, dass hier die ganze Methode nicht anwendbar ist.

Zuerst wollen wir nun den Wirkungsquerschnitt angeben. Legt man den Photonen-Wirkungsquerschnitt $\Phi_{k \cdot u}$ zugrunde, der bis auf Faktoren ~ 1 die Grösse hat:

$$\Phi_{k \cdot u} \cong \frac{G^2}{(2\pi)^2} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \cdot \left(\frac{\hbar \nu}{mc^2}\right)^4$$

so erhält man als Wirkungsquerschnitt der geladenen Teilchen

$$\Psi_{k \cdot u} = 2\pi \int_{\varrho}^{\infty} r\, d r \int_0^{\nu_m} \Phi \cdot \frac{f(\nu)}{\hbar \nu}\, d\nu$$

wo

$$\frac{f(\nu)}{\hbar \nu} = \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{1}{\pi r^2 \nu};$$

daher

$$\Psi_{k \cdot u} = \frac{G^2}{(2\pi)^3} \cdot \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^4 \xi^4 \left\{ {}^1/_4 + \lg \frac{\hbar}{Mc\varrho} \right\}.$$

Dabei ist M die Masse des stossenden Teilchens. Der Term $\sim \lg \varrho$ kommt von der Integration

$$\int_{\varrho}^{\hbar/Mc} d r$$

Hätten wir für den Photonenquerschnitt Φ_F angenommen, so wäre

$$\Psi_F = \text{const} \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^2 \cdot \xi^2 \left\{ {}^1/_2 + \lg \frac{\hbar}{Mc\varrho} \right\}.$$

Aus der Formel für Ψ sehen wir, dass im Fall des Elektronenstosses ($M = m$) die Stösse mit $r < \frac{\hbar}{m c}$ wegen des Energiesatzes nur einen Beitrag liefern, der von der Grössenordnung desjenigen aller anderen Stösse ist, wenn man $\varrho = \frac{e^2}{m c^2}$ setzt.

Man muss nun folgendes beachten: Es hat keinen Sinn, von Stossabständen zu sprechen, die kleiner sind als die Breite des Wellenpaketes, durch das das Positron im Zwischenzustand dargestellt wird. Für diese Breite Δr gilt $\Delta r \cdot \Delta p \sim h$. Dabei hat Δp, weil Zwischenzustand und Endzustand durch den Impulssatz verknüpft sind, die Grösse des Querimpulses der herausfliegenden Positronen. Nun besitzt die oben berechnete Grösse $\bar{f}$, die den richtungsabhängigen Anteil des differentiellen Wirkungsquerschnittes $d\Phi$ darstellt, einen „Resonanznenner"

$$[(\vec{c}\vec{p}) - E(p)], \text{ der für grosse } p \quad \left(E = c\,p\left(1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{mc}{p}\right)^2 + \cdots\right)\right)$$

gleich ist:

$$-c\,p\left(1 - \cos\vartheta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{mc}{p}\right)^2\right).$$

ϑ ist wie oben der Winkel zwischen $\vec{c}$, d. h. der Flugrichtung des Primärteilchens, und $\vec{p}$ (Impuls des wegfliegenden Positrons). Für kleine ϑ ist dieser Nenner sehr klein $\left(\text{er verhält sich wie } \vartheta^2 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2\right)$ und hat zur Folge, dass die ausgelösten Positronen hauptsächlich nach vorne (in der Stossrichtung) gehen, in einem Winkelbereich ϑ der Grösse $\frac{mc}{p}$. Der Querimpuls der Positronen ist also bei den wichtigen Prozessen von der Grösse mc und daher $\Delta r \sim \frac{\hbar}{mc}$. Also ist unsere Methode im Bereiche $r < \frac{\hbar}{mc}$ schon unzuverlässig, da solch kleine Stossabstände keinen Sinn mehr haben. Da aber bei Elektronen gerade bei diesem Abstande der Energiesatz ein weiteres starkes Anwachsen von Ψ mit ϱ verhindert, so wird das Resultat eine einigermassen zuverlässige Abschätzung liefern. Bei schweren Teilchen werden aber gerade diese kleinen Abstände den wesentlichen Beitrag geben, und daher ist bei ihnen die Methode nicht anwendbar.

C. *Umwandlung eines Protons in ein Neutron durch Absorption eines Elektrons unter Emission eines Lichtquants.*

Wir haben oben den Wirkungsquerschnitt für eine Umwandlung des Protons in ein Neutron durch Elektronenabsorption an-

gegeben, ohne Berücksichtigung der Lichtausstrahlung. Es können aber bei diesem Prozess auch Lichtquanten auftreten. Berücksichtigt man die Strahlung in 1. Ordnung, so tritt pro absorbiertes Elektron je ein Lichtquant auf. Dabei können formal zwei Fälle unterschieden werden, deren Wahrscheinlichkeitsamplituden sich aber kohärent superponieren.

a) Das Elektron emittiert ein Lichtquant $\hbar\nu$ und geht in einen Zwischenzustand (für den der Energiesatz nicht erfüllt sein muss); hierauf wird es durch einen inversen β-Prozess vom Proton absorbiert.

b) Das Proton begibt sich in einen Zwischenzustand, in dem es Neutron & Positron & Neutrino ist. Das ankommende Elektron zerstrahlt nun mit dem Positron des Zwischenzustandes. Genau wie im unter (A) behandelten Prozess der Umwandlung des Protons durch ein Lichtquant, kann man diesen Fall auf a) zurückführen mit Hilfe der Vorstellung von Zwischenzuständen negativer Energie (im Sinne der ursprünglichen Dirac-Theorie): Das Elektron geht unter Strahlung in einen Zwischenzustand negativer Energie über und wird dann von dort vom Proton absorbiert.

Im Prozess a) führt nun der Grenzfall, dass die Frequenz des emittierten Lichtquants verschwindet, zu einer Schwierigkeit in der Anwendung des Störungsverfahrens. In diesem Fall hat nämlich der Zwischenzustand die gleiche Energie wie der Endzustand: $E' = E_1$. Ist der Energiesatz erfüllt: $E_0 = E_1$, so verschwinden daher auch Nenner der Form $(E' - E_0)$, und darum divergiert das Integral der Übergangswahrscheinlichkeit über alle Frequenzen logarithmisch bei $\nu = 0$[1]).

Dirac hat nun bei der Behandlung der Resonanzstrahlung[2]) wo im Prinzip die gleiche Schwierigkeit auftritt, diese dadurch zu umgehen versucht, dass er in der Wahrscheinlichkeitsamplitude des Endzustandes b_1 auch die Terme, die proportional zu

$$\frac{e^{i/\hbar\,(E_1 - E')\,t} - 1}{E_1 - E'}$$

sind, mitnahm.

---

[1]) Bekanntlich tritt die gleiche Schwierigkeit in anderen Problemen auf, z. B. wenn man die Ablenkung eines Teilchens im Coulombfeld (relativistisch und unrelativistisch) unter Berücksichtigung der Ausstrahlung berechnet. Wenn man in den bekannten Rechnungen von Sommerfeld (Ann. d. Phys. (5) 1931, **11**, 257) oder von Bethe und Heitler (Proc. Roy. Sc. 1934, **146**) nicht nach der ausgestrahlten Energie frägt, sondern nach der Zahl der Teilchen, die in einer bestimmten Richtung abgelenkt werden, so divergiert der Wirkungsquerschnitt bei der Integration über alle Lichtfrequenzen bei $\nu = 0$ logarithmisch.

[2]) Proc. Roy. Soc. 1927, **114**, 725.

Dadurch erreicht man, dass $|b_1|^2$ auch für $E_1 = E'$ endlich bleibt. Man erhält aber im Falle, dass keine Resonanz vorliegt ($E_1 \neq E'$) bei der Integration von $|b_1|^2$ über alle Endzustände (oder Anfangszustände) das Doppelte von dem, was die gewöhnliche Störungsrechnung liefert. Bei einer adiabatischen Störungsrechnung (adiabatisches Einschalten der Störung) verschwindet nun diese Diskrepanz: Man erhält für $E_1 \neq E'$ das bekannte Resultat plus gewisse Zusätze, die nur im Falle der Resonanz wesentlich werden und die Divergenz bei $E_1 = E'$ verhindern. Die Zusätze haben nämlich zur Folge, dass nur Frequenzen $\nu \gtrsim 1/t$ emittiert werden können, kleinere werden praktisch nicht emittiert.

Störungsrechnung.

Wir müssen in unserem Ansatz zum Ausdruck bringen, dass das Proton mit einem Elektronenstrom beschossen wird, der während der Zeit T linear von der Stärke null bis zur Stärke V/Ω anwächst. Für $t > T$ ist er dann konstant. Mit den oben definierten Matrixelementen der Strahlung $W^s_{s'}$, und des β-Zerfalls H^p_n setzen wir daher:

$$\dot{b}_k' = \frac{i}{\hbar} W^s_{s'} \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{i/\hbar (E_k' - E_0) t} \qquad \text{für } t < T$$

$$\dot{b}_k' = \frac{i}{\hbar} W^s_{s'} \cdot e^{i/\hbar (E_k' - E_0) t} \qquad \text{für } t > T$$

$$\dot{b}_1 = \sum_{k=1}^{4} \frac{i}{\hbar} H^p_n b_k' \, e^{i/\hbar (E_1 - E_k') t} \qquad \text{für alle } t.$$

Dabei ist $E^0 = E(p) =$ Energie des ankommenden Elektrons;
$E_k' = E_k(p') + \hbar\nu =$ Energie des Zwischenzustandes;
$E_1 = W + E_\sigma + \hbar\nu =$ Energie des Endzustandes;
$W =$ Massendefekt Proton-Neutron.

Es gilt der Impulssatz $\vec{p}' = \vec{p} - \frac{\hbar \vec{\nu}}{c}$.

In den Termen $k = 3{,}4$, die dem Falle b) entsprechen, kann von vorneherein

$$t \gg T \gg \frac{\hbar}{E' - E_0}$$

gesetzt werden, da hier $E' - E_0 = \hbar\nu - E(p') - E(p)$ niemals null werden kann (weil $\hbar\nu < E(p)$).

Das Integral $J = \int |b_1|^2 Z_\sigma dE_\sigma$ mit

$$Z_\sigma = \frac{\Omega d\,\Theta_\sigma}{h^3 c^3} E_\sigma^2$$

wird

$$J = \frac{t}{\hbar^2} \frac{(E(p) - \hbar\nu - W)^2}{c^3 \hbar^2} \cdot \Omega \cdot d\,\Theta_\sigma \left\{ \left| \frac{\sum_{k=1}^{2} H_n^p W_{s'}^s}{E(p') + \hbar\nu - E(p)} \right|^2 \cdot g \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\sum_{k=3}^{4} H_n^p W_{s'}^s}{E(p') + E(p) - \hbar\nu} \right|^2 + \left(\sum_{k=1}^{2} H_n^p W_{s'}^s \right) \left(\sum_{k=3}^{4} \tilde{W}_{s'}^s \tilde{H}_n^p \right) \cdot d \right\}.$$

Dabei ist

$$g = 1 + \frac{2}{\varepsilon^2 T^2} - \tfrac{2}{3} \cdot \frac{T}{t} + \frac{2}{\varepsilon^2 T \cdot t} - 2\,\frac{(t - T)}{t \cdot T^2 \varepsilon^2} \cos \varepsilon T$$

$$- \frac{4}{t T^2 \varepsilon^3} \sin \varepsilon T - \frac{2}{t \cdot T \cdot \varepsilon^2} [\cos \varepsilon (t - T) - \cos \varepsilon T]$$

mit

$$\varepsilon = \frac{1}{\hbar} [E(p') + \hbar\nu - E(p)].$$

Den Faktor d des Interferenzterms

$$\left(\sum_{k=1}^{2} \right) \left(\sum_{k=3}^{4} \right)$$

brauchen wir nicht zu berechnen, da dieser bei Integration über die Neutrinorichtungen $d\,\Theta_\sigma$ null ergibt:

$$Sp\,(D^+(p')\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{e})\,D^+(p)\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{e})\,D^-(p') = 0\,.$$

Der so erhaltene Ausdruck für J ist nun regulär für $\nu = 0$ ($\varepsilon = 0$). Die Terme $\sim 1/\varepsilon$ werden nur für kleine ν wesentlich und verhindern die Divergenz für $\hbar\nu = 0$. Setzt man in g $T = 0$, so erhält man, wie Dirac,

$$(g)_{T=0} = 2\left(1 - \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon t}\right).$$

Die Zahl der Übergänge Proton-Neutron bis zur Zeit t, bei denen ein Lichtquant in den Frequenzbereich $\nu \longleftrightarrow \nu + d\nu$ emittiert wird, ist

$$J \cdot \frac{\Omega}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{(2\pi)^3}\,.$$

*

Es sollen nun T und t so gross sein, dass im Bereiche, wo die Zusätze $\sim 1/\varepsilon$ wesentlich werden, der Summand

$$\sim \left| \sum_{k=3}^{4} H\, W \right|^2$$

schon klein ist, dann kann man diesen ohne wesentlichen Fehler mit g multiplizieren, und nach Integration über $d\,\Theta_\sigma$ ergibt sich die unter (A) berechnete Grösse

$$\bar{f} = 2\pi \frac{(\hbar\nu)^2 \left(1 - \frac{(\vec{p}\,\vec{c})}{E(p)}\right) + 2c^2 (\vec{p}\,\mathfrak{e})^2 \left(1 - \frac{\hbar\nu}{E(p)}\right)}{(\hbar\nu)^2 [(\vec{p}\,\vec{c}) - E(p)]^2}$$

noch multipliziert mit einem Faktor

$$\text{const.}\,(E(p) - W - \hbar\nu)^2 \cdot g \cdot \nu\, d\nu .$$

Um die Integration über ν auszuführen, teilen wir den Integrationsbereich in zwei Teile:

$$1)\quad 0 < \nu < \nu_0 \qquad \text{und} \qquad 2)\quad \nu_0 < \nu < \frac{E - W}{\hbar} \qquad (E = E(p))$$

ν_0 erfülle folgende Bedingungen:

$$\frac{1}{T\left(1 - \frac{(\vec{c}\,\vec{p})}{E}\right)} \ll \nu_0 \ll \frac{E - W}{\hbar} .$$

Dies kann durch genügend langsames Einschalten der Störung leicht erfüllt werden.

Im Bereiche $0 < \nu < \nu_0$ entwickeln wir $\nu \cdot \bar{f}$ nach ν und behalten nur Terme $\sim 1/\nu$ bei. Ebenso entwickeln wir in den Argumenten der sin und cos, die in g vorkommen, die Grösse ε:

$$\varepsilon \sim \nu \left(1 + \frac{(\vec{c}\,\vec{p})}{E(p)}\right).$$

Wegen der Bedingung für ν_0 können die Zusätze $\sim 1/\varepsilon$ für $\nu > \nu_0$ weggelassen werden ($g \sim 1$).

Zur Berechnung des Integrals von 0 bis ν_0 benützen wir nun noch, dass asymptotisch für $x_0 \gg 1$ gilt

$$\int_0^{x_0} \frac{dx}{x} (1 - \cos x) \mathrel{\underline{\simeq}} \lg \gamma x_0$$

wo γ die Eulersche Konstante (Jahnke-Emde S. 79).

Wir erhalten dann als differentiellen Wirkungsquerschnitt für unseren Prozess (für $t \gg T$)

$$d\,\Phi = \frac{c}{v} \cdot \frac{G^2}{(2\pi)^4} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \frac{(E-W)^2}{m^2 c^4} \left\{ \frac{c^2 \cdot (\vec{p}\,\mathfrak{e})^2}{((\vec{p}\,\vec{c}) - E^2)} \cdot \right.$$
$$\cdot \left(2 \lg \left[\gamma \frac{E-W}{\hbar} \cdot \frac{t^2}{T}\right] + 2 \lg \left[1 - \frac{\vec{c}\,\vec{p}}{E}\right] - \tfrac{8}{3} + \tfrac{2}{3} \frac{W}{E}\right)$$
$$\left. + \frac{(E-W)^2}{12\,E\,((\vec{c}\,\vec{p}) - E)} \right\} d\,\Theta .$$

Dabei ist

$\mathfrak{e}$ der Polarisationsvektor des emittierten Lichtes;
$\vec{c}$ seine vektorielle Geschwindigkeit;
$d\,\Theta$ das Raumwinkelelement, in welches das Licht geht;
E und $\vec{p}$ Energie und Impuls des Primär-Elektrons;
v dessen Geschwindigkeit.

Die Integration über $d\,\Theta$ liefert uns den Gesamtquerschnitt

$$\Phi = \frac{c}{v} \cdot \frac{G^2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \cdot \frac{(E-W)^2}{m^2 c^4}$$
$$\cdot \left[4\pi \cdot \frac{E}{cp} \cdot \lg \frac{E + cp}{m c^2} \left\{2 \lg \left[\gamma \frac{(E-W)}{E\,\hbar}\, cp \cdot \frac{t^2}{T}\right] - \tfrac{8}{3} + \tfrac{2}{3} \cdot \frac{W}{E}\right\}\right.$$
$$+ 2\,\pi \left\{3 - 2 \lg \left[\frac{E^2}{(cp)^2} - 1\right] + \frac{E}{c\,p} \left\{\lg^2 \left(\frac{E}{c\,p} + 1\right) - \lg^2 \left(\frac{E}{c\,p} - 1\right)\right\}\right\}$$
$$\left. + \frac{(E-W)^2}{6 \cdot E \cdot cp} \cdot \lg \frac{mc^2}{E + cp}\right].$$

Der so gewonnene Wirkungsquerschnitt wächst also logarithmisch mit der Zeit an[1]).

Der Grund hiefür liegt darin, dass nach genügend langer Zeit schliesslich jede noch so kleine Frequenz emittiert wird. Da Φ mit t beliebig wächst, so kann das Ergebnis nur für nicht zu grosse Zeiten richtig sein; eine obere Grenze für t ist dadurch gegeben, dass der Beitrag dieser zweiten Näherung kleiner bleiben soll als der Betrag des strahlungslosen Prozesses 1. Ordnung (§ 3, 2).

Aus dem Ergebnis können wir schliessen, dass man bei Beobachtungsdauern von ~ 1 sec schon mit dem Auftreten sehr vieler kleiner Lichtquanten rechnen muss. Man kann also sagen, dass eine Rechnung, die sich nur auf die strahlungslosen Prozesse be-

[1]) Würde man die Bremsstrahlung adiabatisch berechnen, so würde man auch eine solche logarithmische Zeitabhängigkeit erhalten.

schränkt, ungenügend ist. Andererseits weist die Zeitabhängigkeit unseres Resultates darauf hin, dass die Emission von zwei und mehr kleinen Quanten eigentlich auch berücksichtigt werden müsste, wozu aber hier, wo man auf Störungsrechnungen angewiesen ist (Entwicklung nach e^2/hc) keine Möglichkeit besteht.

Ich möchte nicht versäumen, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Gregor Wentzel, von dem die Anregung zu dieser Arbeit stammt, für seinen stets liebenswürdigen Beistand bei ihrem Fortgange zu danken.

Physikalisches Institut der Universität Zürich.
Januar 1936.