Zeitschrift:	Helvetica Physica Acta
Band:	9 (1936)
Heft:	VII
Artikel:	Théorie de la diffraction de la lumière par les Ultrasons
Autor:	Extermann, R. / Wannier, G.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-110642

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. <u>Mehr erfahren</u>

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. <u>En savoir plus</u>

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. <u>Find out more</u>

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorie de la diffraction de la lumière par les Ultrasons par R. Extermann et G. Wannier.

(19. VII. 36.)

Première partie.

On sait qu'un fluide dans lequel se propagent des ultra-sons peut diffracter une onde lumineuse qui le traverse.

L'explication qualitative de ce phénomène est que les ultra-sons stratifient optiquement le milieu qu'ils parcourent, lui donnant ainsi les propriétés d'un réseau optique. Grâce à cette image, on peut prévoir la direction des ondes diffractées, mais elle ne suffit pas pour calculer leurs intensités.

On peut alors chercher comment se déforme une onde plane qui traverse un milieu stratifié, mais en fait l'exactitude de cette méthode ne dépasse jamais celle d'une première approximation. Lucas et BIQUARD¹) ont donné un traitement correct du problème suivant cette idée, qui n'a malheureusement pas abouti à des résultats numériques complets. D'autre part, la théorie simplifiée de RAMAN et NATH²) donne des résultats qui ne sont justes que pour de faibles épaisseurs du milieu stratifié, comme nous le montrerons.

La méthode fondamentale pour résoudre le problème consiste à calculer à priori toutes les « ondes » possibles dans le milieu stratifié, c'est-à-dire ses fonctions propres. L'onde plane à l'entrée est introduite alors comme condition aux limites. Ce chemin a été indiqué par L. BRILLOUIN³), qui n'a cependant pas pu donner de résultats numériques. C'est celui que nous avons suivi dans ce travail.

I. Esquisse de la méthode.

a) Etant donné une onde plane extérieure de vecteur d'onde k, le vecteur de l'onde intérieure doit avoir la même composante tangentielle μ (Fig. 1)

$$k_y = \mu$$

b) Il y a une infinité de vecteurs k qui ont la composante tangentielle μ . Mais les équations du problème dans lequel le milieu est stratifié montrent: Premièrement que ceux qui sont possibles forment une suite discrète ... k_0, k_1, k_2, \ldots correspondant à des valeurs discrètes ... l_0, l_1, l_2, \ldots de la composante selon 0x. (Fig. 2.)



Secondement qu'à un vecteur d'onde \tilde{k}_r satisfaisant aux conditions précédentes, la stratification du milieu associe une suite de vecteurs d'onde \tilde{k}_{rn} qu'on obtient à partir de \tilde{k}_r

$$\bar{k}_{rn} = \bar{k}_r + n\bar{b}$$
 $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

 \overline{b} étant le vecteur d'onde des ultra-sons. (Fig. 3.)

c) b montre qu'à une onde incidente \tilde{k} correspond, dans le milieu, une double infinité d'ondes planes \tilde{k}_{rn} $(r = \ldots -1, 0, +1, \ldots; n = \ldots -1, 0, 1, 2, \ldots)$. Nous appelons couche l'ensemble

des ondes de même indice r (les vecteurs d'une même couche r ont tous même composante l_r selon 0x); et ordre l'ensemble des ondes de même indice n (les vecteurs d'un même ordre n ont tous même composante $\mu + nb$ selon 0y). (Fig. 4.)



d) Pour déterminer les amplitudes complexes E_{rn} des ondes \bar{k}_{rn} , on exprime qu'elles proviennent d'une seule onde extérieure \bar{k} d'amplitude A; en d'autres termes, que si l'on renversait le sens du phénomène, elles interférence dans le plan x = 0 pour se réunir en une seule onde plane \bar{k} . On trouve:

$$\sum_{r} E_{rn} = \begin{pmatrix} 0, & \text{si } n \neq 0 \\ A, & \text{si } n = 0 \end{pmatrix}$$

e) A la sortie du faisceau d'ultra-sons (x = d), les différentes ondes ont parcouru des chemins optiques différents. Elles interfèrent donc autrement qu'à l'entrée. Nous montrerons que les ondes d'ordre interfèrent entre elles pour donner une seule onde diffractée d'amplitude Sn.

$$S_n = \sum_r E_{rn} \exp\left[i l_r d\right]$$

Cette équation permet de calculer l'intensité des raies diffractées, ce qui est le but de notre travail.



Conditions aux limites.

II. Théorie mathématique.

Dans un milieu où $\mu = 1$, on peut éliminer H des équations de MAXWELL, et l'on obtient l'équation d'onde pour une constante diélectrique ε quelconque.

$$\Delta \tilde{E} - \text{grad} (\operatorname{div} \tilde{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\varepsilon E)}{\partial t^2} = 0$$
 (1)

où \tilde{E} est le vecteur électrique dans le milieu.

Dans notre cas, ε a la forme:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + 2 \varepsilon_1 \cos \left(b \, y - v \, t \right) \tag{2}$$

où ε_0 est la constante diélectrique du milieu au repos et ε_1 une

constante qui dépend de la compressibilité du milieu et de l'amplitude des ultra-sons. \tilde{b} est le vecteur d'onde des ultra-sons (supposé parallèle à 0y) et ν leur fréquence.

Pour préparer nos calculs numériques, nous allons rappeler comment on résoud (1) par les fonctions de MATHIEU. Nous introduirons ainsi certaines hypothèses simplificatrices, énumérées ci-dessous et d'ailleurs aisément justifiables.



Dispositif expérimental et axes de référence.

1) Nous nous référons à un système d'axes 0x y z tel que le vecteur \overline{k} de l'onde incidente se trouve dans le plan x0y, 0yétant parallèle au vecteur \overline{b} de l'onde ultra-sonore. Nous choisissons, des deux polarisations, celle dont le vecteur électrique est parallèle à l'axe des z. Dans ce cas, puisque \overline{E} ne dépend pas de z,

div
$$\overline{E} = 0$$
.

2) Le fait que la fréquence des ultra-sons est très petite par rapport à celle de la lumière nous permet de négliger la dépendance temporelle de ε .*)

On se rend compte facilement que, dans ce cas, l'équation (1) est séparable et donne pour E:

$$E = \exp\left[i\left(lx - \omega t\right)\right] u(y) \tag{3}$$

où u(y) satisfait l'équation différentielle de MATHIEU³)

$$\frac{1}{b^2} \frac{d^2 u}{dy^2} + (a + 2 \theta \cos b y) u = 0$$
(4)

*) Nous reprendrons cette question dans la seconde partie de ce travail.

avec

$$a = \frac{k^2 \varepsilon_0 - l^2}{b^2} \qquad \theta = \frac{\varepsilon_1 k^2}{b^2} \qquad k = \frac{\omega}{c} \tag{5}$$

Les valeurs propres a sont encore indéterminées, l n'étant pas connu.

D'après le théorème de FLOQUET, toute solution stable de (4) est de la forme:

$$u(y) = \exp[i\mu y] \Phi(by)$$
(6)

où Φ est une fonction périodique de période 1 et μ une constante réelle déterminée à un multiple de b près.

Si l'on développe Φ en série de Fourier

$$\Phi = \sum_{n} E_{n} \exp\left[inb\,y\right]$$

l'équation (4) se transforme en une formule de récurrence pour les coefficients E_n :

$$\left[a - \left(\frac{\mu}{b} + n\right)^2\right] E_n + \theta \left[E_{n-1} + E_{n+1}\right] = 0 \tag{7}$$

La suite des E_n ne converge que pour certaines valeurs propres du paramètre a. On peut par exemple exprimer la condition de convergence en annulant le déterminant des coefficients des E_n , dit déterminant de HILL:

Cette équation montre que a est racine d'un polynome de degré infini, il possède donc un spectre discret de valeurs possibles $a_r(\mu)$.

Dans la limite $\theta = 0$, on trouve en particulier

$$a_r(\mu) = \left(\frac{\mu}{b} + r\right)^2$$
 $r = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

A chaque valeur $a_r(\mu)$ correspond une valeur $l_r(\mu)$ en vertu de



526

(5) et une suite E_{r0} , E_{r1} ,.... donc une fonction propre, Φ_r (by, μ) définie à un facteur près.

La solution générale de (4) s'écrit alors, en vertu de (6):

$$E = \exp\left[-i\omega t\right] \sum_{\mu} \exp\left[i\mu y\right] \sum_{r} \exp\left[il_{r}\left(\mu\right)x\right] \boldsymbol{\varPhi}_{r}\left(by,\,\mu\right) \quad (9)$$

ou, en composantes de Fourier

$$E = \exp\left[-i\omega t\right] \sum_{\mu} \exp\left[i\mu y\right] \sum_{rn} E_{rn} \exp\left[i\left\{l_r(\mu) x + nby\right\}\right]$$
(10)

où la première somme, qui pourrait être une intégrale, s'étend sur toutes les valeurs possibles de μ . Celles-ci vont être déterminées par les conditions aux limites.

Superposons donc des ondes de la forme (10) pour retrouver à l'entrée du milieu (x = 0) l'onde plane

$$E = \exp\left[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\right] \tag{11}$$

Cette superposition donne

$$\exp[ik_{y}y] = \sum_{\mu} \exp[i\mu y] \sum_{rn} E_{rn} \exp[inby]$$
(12)

Comme $\sum_{rn} E_{rn} \exp [inby]$ est périodique, il faut que, $k_y = \mu$ (13)

En effet, si nous remplaçons dans cette expression y par $y + \Lambda$, où $\Lambda = 2 \pi/b$ est la longueur d'onde des ultra-sons, les sommes de FOURIER restent invariantes, et puisque le premier membre est multiplié par exp $[ik_y\Lambda]$, il faut que $k_y = \mu$.

(13) porté dans (10) donne:

$$E = \sum_{rn} E_{rn} \exp \left[i \{ l_r x + (\mu + nb) \ y - \omega t \} \right]$$
(14)

Il y a donc une infinité double d'ondes planes dans le milieu. La condition (12) s'écrit maintenant pour chaque onde séparément

$$\sum_{r} E_{rn} = \left\langle \begin{array}{cc} 1, & \text{si} & n = 0\\ 0, & \text{si} & n \neq 0 \end{array} \right\rangle$$
(15)

ce qui signifie que le vecteur électrique est nul sur la face d'entrée à la suite d'un phénomène d'interférence pour tous les ordres sauf l'ordre zéro. Ceci ne sera plus vrai après que les ondes auront traversé les ultra-sons sur une distance d. Chaque ordre n donnera donc une onde extérieure ayant la composante tangentielle $\mu + nb$ des ondes composantes \bar{k}_{rn} . Cette onde extérieure d'ordre n a un vecteur \overline{k}_n et une amplitude S_n . Le vecteur \overline{k}_n dont la grandeur est évidemment $|\overline{k}_n| = k$ a une direction déterminée par la construction de la figure 5; on trouve, pour S_n :

$$S_n = \sum_r E_{rn} \exp\left[il_r d\right] \tag{16}$$

On peut donner à cette formule une forme plus commode en la transformant au moyen de (5), en remarquant que $b \ll k$ et $\varepsilon_0 \sim a_r \sim 1$. On obtient

$$S_n = \sum_r E_{rn} \exp\left[-ia_r D\right] \tag{17}$$

où les a_r sont les valeurs propres des fonctions de MATHIEU et

$$D = \frac{1}{2} \frac{b^2 d}{k \sqrt{\varepsilon_0}}.$$
 (18)

III. Calculs numériques et résultats.

Pour effectuer les calculs numériques, il faut spécifier le problème qu'on veut traiter, c'est-à-dire choisir, pour les trois paramètres μ , θ et D dont dépend la solution générale, des valeurs correspondant aux données expérimentales. Ces grandeurs sont définies par les formules (13), (5) et (18).

Nous avons choisi $\mu = 0$, ce qui correspond au cas où le rayon lumineux incident est perpendiculaire à la direction des ultra-sons.

Pour θ , nous avons choisi trois valeurs correspondant à des cas pratiques, pour donner des résultats complets en fonction de D. Nos calculs qui suivent les formules du chapitre II se divisent en 4 parties:

A) Calcul des valeurs propres a correspondant à une solution de période b de l'équation de MATHIEU (4).

B) Calcul des coefficients de FOURIER des fonctions propres correspondantes (formule de récurrence (9)).

C) Superposition de ces fonctions qui ont encore un facteur arbitraire, de façon à obtenir à l'entrée l'onde plane incidente (équation 15).

D) Superposition de ces fonctions à la sortie (calcul des interférences des ondes de même ordre pour différentes épaisseurs du milieu stratifié, d'après l'équation (17)).

A, B. Nous discuterons séparément les calculs (A) et (B) dans un travail purement mathématique qui paraîtra prochaine-

Théorie de la diffraction par les Ultrasons.

ment^{*}), parce que les méthodes employées n'ont qu'un intérêt technique. Qu'il nous suffise de dire ici qu'il faut des méthodes plus développées que celle de HILL pour déterminer les a_r . D'autre part, pour $\mu = 0$, les solutions se partagent en fonctions symétriques et antisymétriques; ces dernières n'intervenant pas à cause de la symétrie du problème, nous ne faisons usage que d'une fonction propre sur deux. Pour les valeurs propres des fonctions symétriques, on a le tableau suivant:

$\theta =$	1,	3	10
$\begin{array}{c} & a_{0} \\ & a_{1} \\ & a_{2} \\ & a_{3} \\ & a_{4} \\ & a_{5} \\ & a_{6} \end{array}$	$\begin{array}{r} - & 1,0701298 \\ + & 1,7072688 \\ & 4,1624547 \\ & 9,0574884 \\ & 16,0317899 \\ & 25,0202129 \\ & 36,0139896 \end{array}$	$\begin{array}{r rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr$	$\begin{array}{r} -16,9015383\\ -5,0519853\\ +5,5813190\\ 14,5577702\\ 20,4580965\\ 27,1983757\\ 37,4377369\end{array}$
a_7 a_8	49,0102578 64,0078438	49,0924204 64,0706382	50,0401104 64,7906233

Les résultats des calculs B ne sont pas donnés ici parce qu'ils sont implicitement contenus dans C.

C. Pour déterminer les facteurs arbitraires des fonctions propres, nous avons fait usage des méthodes de l'algèbre élémentaire (résolution d'un système linéaire d'équations homogènes). Le résultat de ce calcul est le tableau complet des E_{rn} que nous publions ici pour $\theta = 1$, $\theta = 3$ et $\theta = 10$.

Tableau 1.

Valeurs	des	E_{rn}	pour	θ	 1
			and the second se		

	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3	Ordre 4	Ordre 5
Couche 0	+0,62655	+0,33530	+0,06750	+0,00670	+0,00040	27 (B
Couche 1	+0,36010	- 0,30740	-0,14265	- 0,01975	-0,00140	-0,00005
Couche 2	+0,01335	-0,02780	+0,07460	+0,01575	+0,00130	+0,00005
Couche 3	10 N	- 0,00010	+0,00055	-0,00270	- 0,00040	
Couche 4					+0,00010	. · · · ·
			-		5 ¹⁰	

D. Le calcul des interférences, d'après l'équation (17) ne présente aucune difficulté, mais demande beaucoup de temps si l'on veut des résultats complets; nous l'avons graphiquement.

*) Commentarii mathematici Helvetici.

	Ordre 6 Ordre 7	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		3 Ordre 9 Ordre 10 Ordre 11	$\begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$
	Ordre	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		lre 7 Ordre	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$\theta = 3.$	Ordre 4	$\begin{array}{c} + 0,00447 \\ - 0,02782 \\ - 0,02696 \\ - 0,02696 \\ + 0,00339 \\ + 0,00004 \end{array}$	${ m tr} \ heta=10.$	Ordre 6 Ord	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
Tableau 2des E_{rn} pour	Ordre 3	$\begin{array}{r} + \ 0,02986 \\ - \ 0,12880 \\ + \ 0,15283 \\ - \ 0,05233 \\ - \ 0,00156 \\ - \ 0,0001 \end{array}$	Tableau 3 des E_{rn} pou	4 Ordre 5	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
Valeur	Ordre 2	$\begin{array}{r} + \ 0,12823 \\ - \ 0,28475 \\ + \ 0,11906 \\ + \ 0,03706 \\ + \ 0,00040 \end{array}$	Valeur	re 3 Ordre 4	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
	Ordre 1	$\begin{array}{c} + \ 0.32632 \\ - \ 0.08764 \\ - \ 0.22201 \\ - \ 0.01659 \\ - \ 0.00008 \end{array}$		Ordre 2 Ord	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
	Ordre 0	$\begin{array}{r} + \ 0, 45186 \\ + \ 0, 30577 \\ + \ 0, 23194 \\ + \ 0, 01039 \\ + \ 0, 00003 \end{array}$	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	Ordre 1	$\begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ - 0.27536 \\ - 0.04658 \\ - 0.04640 \\ - 0.04640 \\ - 0.14067 \\ - 0.12830 \\ - 0.12830 \\ - 0.000651 \\ - 0.00066 \\ - 0.00006 \\ - $
		Couche 0 Couche 1 Couche 2 Couche 3 Couche 4 Couche 5		Ordre 0	$\begin{array}{c c} \mbox{Couche 0} & + 0.3258 \\ \mbox{Couche 1} & + 0.18431 \\ \mbox{Couche 2} & + 0.16621 \\ \mbox{Couche 3} & + 0.19326 \\ \mbox{Couche 4} & + 0.12542 \\ \mbox{Couche 5} & + 0.00067 \\ \mbox{Couche 6} & + 0.00007 \\ \mbox{Couche 8} & \mbox{Couche 8} \\ \mbox{Couche 8} & Couc$

Tableau 2.

530

R. Extermann et G. Wannier.

. .

Nous publions nos résultats sous forme de courbes qui donnent l'intensité de chaque raie en fonction du paramètre D, θ étant constant dans chaque graphique.

Pour terminer la discussion de nos résultats, nous les comparerons avec ceux de la théorie de RAMAN et NATH.

Nos solutions sont des fonctions presque périodiques de D, comme c'est toujours le cas lorsqu'on fait interférer des ondes dont les longueurs d'onde ne sont pas commensurables. On trouvera donc toujours des épaisseurs pour lesquelles la solution reprendra presque une forme déjà rencontrée. On aura en particulier certaines épaisseurs pour lesquelles on retrouvera presque toute l'énergie dans l'ordre 0 (p. ex. D = 2,3 pour $\theta = 1$).

Le nombre d'ordres qui apparaissent est d'autre part strictement limité par l'étendue du tableau des E_{rn} .

Ces deux caractéristiques de la solution du problème sont perdues dans l'approximation qu'en ont donné RAMAN et NATH. Il serait toutefois pratique de connaître le domaine de validité de leur théorie, à cause de son extrême simplicité. Nous remarquons à cet effet que la solution de notre équation de départ

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2 \left(\varepsilon_0 + 2 \varepsilon_1 \cos b y\right) E = 0 \qquad (a)$$

se réduit à la solution de RAMAN et NATH

$$E = \exp\left[ik\sqrt{\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 \cos by} x\right] = \exp\left[ik\sqrt{\varepsilon_0} x\right] \exp\left[ik\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \cos by\right]$$
 (b)

si l'on néglige le terme $\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}$. Si l'on fait l'analyse de FOURIER du second facteur, on trouve, pour les amplitudes S_n , les fonctions de BESSEL. Cette solution n'est évidemment plus valable si le terme négligé dans (a) devient comparable au terme $2 k^2 \varepsilon_1 \cos b y E$. En dérivant (b), on obtient

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = -\left[\frac{k^2 \varepsilon_1^2 d^2 b^2}{\varepsilon_0} \sin^2 b y + \frac{ik \varepsilon_1 d b^2}{\sqrt{\varepsilon_0}} \cos b y\right] E$$

et les conditions de validité deviennent

$$\frac{1}{2} \frac{db^2}{k\sqrt{\varepsilon_0}} = D < 1 \qquad \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 d^2 b^2}{2 \varepsilon_0} = 2 D^2 \theta < 1 \qquad (c)$$

Ces deux relations se sont vérifiées dans les cas pratiques que nous avons calculés. Pour les courbes publiées, la première des conditions (c) est contenue dans la seconde^{*}). La limite supérieure de validité de la solution de RAMAN et NATH est indiquée par la ligne R sur les graphiques; les expériences dépassent nettement cette limite.

Nous espérons publier prochainement la seconde partie de ce travail où nous traiterons le problème avec plus de généralité par une méthode analogue à celle d'EWALD-LAUE employée dans l'optique des rayons X.

Nous tenons à remercier en terminant Monsieur le Professeur J. WEIGLE, qui nous a proposé le problème en nous signalant les rapports qu'on pouvait établir entre la diffraction de la lumière par les ultra-sons et celle des rayons X par les cristaux.

Bibliographie.

¹) R. LUCAS et P. BIQUARD; Journ. de Phys. et le Radium 3, 1932, 464.

²) C. V. RAMAN et N. NATH, Proc. Ind. Acad. of Science 2, 1935, 406.

³) L. BRILLOUIN, La diffraction de la lumière par des ultra-sons, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris, 1933.

*) La première condition est prépondérante pour $\theta \ll 1$, mais elle n'est pas très intéressante parce que les figures ne contiennent que trois raies dans ce domaine.

Institut de Physique de l'Université de Genève.