

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 9 (1936)

Heft: VII

Artikel: Invariante Störungstheorie des Elektron-Neutrino-Teilchens unter dem Einfluss von elektromagnetischem Feld und Kernkraftfeld : Feldtheorie der Materie II

Autor: Stueckelberg, E.C.G.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110643>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 21.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

**Invariante Störungstheorie des Elektron-Neutrino-Teilchens
unter dem Einfluss
von elektromagnetischem Feld und Kernkraftfeld.
(Feldtheorie der Materie II)**

von E. C. G. Stueckelberg.

(13. VII. 36.)

Ausgehend von der Anschauung, dass Neutrino und Elektron zwei verschiedene Quantenzustände einer einzigen Elementarpartikel sind, wird eine Störungstheorie entwickelt, welche die Bewegung dieser Partikel unter dem Einfluss des elektromagnetischen Feldes (A -Feld) und der Kernkräfte (B -Feld) zu berechnen gestattet. Als Anwendung wird die Rekombination zwischen K -Schalen-Elektronen und dem Atomkern behandelt. Diese Rekombination gibt Anlass zu einer diskreten Neutrinostrahlung (ν^- -Strahlung) und zu einem kontinuierlichen γ -Spektrum¹).

Einleitung und Zusammenfassung. Nachdem FERMI²) seine Theorie des β -Zerfalls aufstellte, haben verschiedene Autoren weitere, aus dieser Theorie folgende, Prozesse berechnet. Die Dissertation von M. FIERZ³) behandelt eine Anzahl solcher Vorgänge, in welchen insbesondere der Wechselwirkung zwischen Strahlung und Kerneffekten Rechnung getragen wird. Während Fierz sich auf die künstlichen Kernumwandlungsprozesse beschränkt, sollen hier die spontanen Prozesse diskutiert werden.

So kann z. B. bei einem β -Strahler das Elektron einen Teil seiner Energie schon im Moment seiner Entstehung durch γ -Strahlung verlieren⁴). Handelt es sich um ein positives Elektron, so kann γ -Strahlung insbesondere auch dadurch entstehen, dass es mit einem negativen Elektron der K -Schale rekombiniert⁵). Dann verlässt die gesamte Zerfalls- und Rekombinationsenergie in Form von γ -Strahlung und Neutrinostrahlung (ν^- -Strahlung) das Atom. Dieser letztere Prozess kann auch als direkte Rekombination von zerfallendem Kern und Bahnelektron aufgefasst werden. Er ist insbesondere auch ohne γ -Emission möglich. Dann kann der Prozess als eine Kernumwandlung (Kernprozess) aufgefasst werden, welcher die Umkehrung des β^- -Zerfalls bedeutet⁶): Ein β^- -Teilchen wird absorbiert und ein Neutrino (ν^- -Teilchen) wird emittiert, während beim β^- -Zerfall ein β^- -Teilchen emittiert wird und ein ν^- -Teilchen (aus den Dirac'schen Zuständen negativer

Energie) absorbiert wird, d. h. ein „Neutrino Loch“ oder ν^+ -Teilchen entsteht. Liegt die zur Verfügung stehende Energiedifferenz zwischen zerfallendem Kern und Zerfallsprodukt zwischen $+mc^2$ und $-mc^2$, so ist nur dieser ν^- -Zerfall möglich. Die Rechnung (Paragraph 3) zeigt, dass die Lebensdauer dieser radioaktiven Substanzen ca. 1000 mal grösser ist als diejenige der β -aktiven Atome. Nur bei etwa jedem 1000sten Zerfall tritt neben dem ν^- -Teilchen noch ein γ -Quant auf (Paragraph 4).

Alle aufgezählten Prozesse können folgendermassen beschrieben werden: Das *elektromagnetische Feld* (A -Feld) bewirkt *Übergänge eines geladenen Teilchens* von einem Zustand in einen anderen (Emission und Absorption von Photonen). Das *Kernfeld* (B -Feld) verwandelt ein geladenes Teilchen (im betrachteten Fall ein β^- -Teilchen) in ein ungeladenes Teilchen (ν^- -Teilchen) und umgekehrt, oder, anders ausgedrückt, es bewirkt *Übergänge aus einem geladenen Zustand in einen ungeladenen Zustand* und umgekehrt. Man kann daher die Fermi'sche Theorie formal analog der Wechselwirkung zwischen elektromagnetischem Feld und Dirac-Elektron behandeln, wenn man *ein leichtes Teilchen* annimmt, das für jeden gegebenen Impuls neben den zwei geladenen Zuständen positiver Energie (entsprechend den zwei Spinrichtungen) und den zwei geladenen Zuständen negativer Energie noch je zwei ungeladene Zustände positiver und negativer Energie besitzt, die verschiedene Massen ($m =$ Elektronmasse, $\mu m =$ Neutrinomasse) haben sollen. Dann denken wir uns alle Zustände negativer Energie bis auf eine endliche Anzahl aufgefüllt. Die besetzten geladenen Zustände positiver Energie entsprechen den (negativen) Elektronen (oder β^- -Teilchen) und die besetzten ungeladenen Zustände positiver Energie den (negativen) Neutrinos (ν^- -Teilchen). Die endliche Anzahl unbesetzter Zustände negativer Energie („Löcher“) sind als positive Elektronen (β^+ -Teilchen) und positive Neutrinos (ν^+ -Teilchen) zu bezeichnen.

Dieser, inhaltlich der Fermi'schen Theorie vollkommen entsprechende Formalismus, gestattet die Anwendung einer früher vorgeschlagenen invarianten Störungstheorie⁷⁾ (im folgenden mit J.S bezeichnet) auf die Bewegungsgleichung (Diracgleichung mit achtkomponentiger ψ -Funktion) des leichten Teilchens unter dem Einfluss von elektromagnetischem Feld (A -Feld) und Kernfeld (B -Feld). Der Vorzug dieser, damals nach einer Anregung von Herrn Prof. WENTZEL aufgestellten Störungstheorie, gegenüber dem üblichen Verfahren scheint mir darin zu bestehen, dass Summationen über eventuelle Zwischenzustände sowie Mitteilung über Spinrichtungen unnötig sind. Dadurch vereinfacht sich der tatsächliche

Rechnungsgang sehr wesentlich (s. Anhang). Daneben führt die Methode sofort auf ein sehr anschauliches Diagramm der möglichen Vorgänge (s. Fig. 1, 2 und 3).

Die achtkomponentige Wellengleichung des Problems ist einer frühen Arbeit des Verfassers entnommen⁸⁾, die im folgenden mit I bezeichnet werden soll. An Stelle der Fermi'schen Konstante wurde damals (I, Gl. (5.2)) die Grösse $e^2 \lambda^2$ eingeführt, wo λ eine fundamentale Länge der Grössenordnung 10^{-15} cm und e die elektrische Elementarladung bedeutet. Man überzeugt sich leicht (z. B. an Hand der aus der Störungstheorie gewonnenen Formel (Gl. (2.18))), dass das Störungsverfahren divergiert, sobald in den auftretenden Energien $E = hcq_0$ die Wellenlängen q_0^{-1} die Grössenordnung von λ erreichen. Diese Erscheinung benützt eine neuerdings von HEISENBERG⁹⁾ vorgeschlagenen Theorie der „Shower“, da infolge der Divergenz die Wahrscheinlichkeit des Auftretens mehrerer Partikelpaare (β^+ , ν^- -Paare) für hohe Energien gleich derjenigen des Erscheinens eines einzelnen Paares wird.

1. Die Wellengleichung. Sieht man in der in I gegebenen Wellengleichung von denjenigen Gliedern ab, bei welchen sich ein leichtes Teilchen (Elektron oder Neutrino) in ein schweres Teilchen (Proton oder Neutron) verwandelt, so zerfällt die Gleichung I (4.2) und I (5.4) in zwei Gleichungen für zwei 8komponentige ψ -Funktionen. Wir schreiben die erste (für Elektron und Neutrino) aus:

$$\sum_i \left\{ c\Gamma_i p_i + \Delta m c^2 + e(A_i \Lambda + A_i^* \Lambda' + B_i \Omega + B_i^* \Omega') \Gamma_i \right\} \psi = 0 \quad (1.1)$$

$A_i + A_i^*$ bedeutet das elektromagnetische Feld. B_i ergibt sich durch Vergleich mit I (5.4) und Fall (E) in I, 7 zu (mit $\omega_{x\varphi} = \omega_{uv} = 1$; wir sehen von der Elektron-Neutrino-Wechselwirkung ab):

$$B_i = e \lambda^2 u^+ \gamma_i v \quad (1.2)$$

Dabei ist u die Wellenfunktion des Protons und v diejenige des Neutrons. Die achtreihigen Matrizen Γ_i , Δ , Λ , Λ' und Ω sind analog I (2.2) zu definieren als

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \begin{pmatrix} \gamma_i & 0 \\ 0 & \gamma_i \end{pmatrix}; & \Delta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; & \Lambda' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; & \Omega' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Die γ_i sind gegenüber I etwas anders definiert, so dass die imaginäre Einheit, welche in I (4.2) vor dem Massenglied steht, fortfällt. Es gelten also die von I abweichenden Relationen

$$\Gamma_i \Gamma_k + \Gamma_k \Gamma_i = -2 \delta_{ik} \quad (1.4)$$

(1.1) hat jetzt die Form der Diracgleichung, in welcher ausser dem A -Feld noch ein, durch die schweren Teilchen hervorgerufenes, B -Feld auftritt. Für Einelektronenprobleme wird die Diracgleichung am einfachsten so behandelt, dass man ψ als c -Zahl betrachtet und die A_i als Operatoren auffasst, welche auf die, in ψ neben den x_i und der Zeit $x_4 = ict$ als unabhängige Variable auftretenden Besetzungszahlen N_k der Eigenfunktionen des Strahlungshohlraumes wirken. Dazu zerlegen wir die Potentiale A_i in eine Fouriersumme unter Zugrundelegung eines endlichen räumlichen Periodizitätsbereiches G .

$$A_i = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{2\pi\hbar c}{G k_0} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma_i e^{i(k, x)} c(k) \quad (1.5)$$

(k, x) ist das skalare Produkt der Weltvektoren k und x , deren Raumkomponenten $k_1 k_2 k_3$ durch \vec{k} abgekürzt werden sollen, und deren vierte imaginäre Komponente durch $k_4 = ik_0$ resp. $x_4 = ix_0 = ict$ bezeichnet werde*). Damit A_i den Maxwellgleichungen genügt, muss $k_0 = |\vec{k}|$ sein und die auf 1 normierte Polarisation σ (mit den Komponenten σ_i) der Partialwelle k im vierdimensionalen Raume auf k senkrecht stehen:

$$(k, k) = 0; (\sigma, k) = 0; (\sigma, \sigma) = 1 \quad (1.6)$$

Von rechtswegen sollte σ einen Index k tragen. Die Summe in (1.5) ist dann für jedes feste k über alle vier zu k gehörenden und aufeinander senkrechten Polarisationen σ erstreckt zu denken. Da k aber ein Nullvektor ist, gibt es ausser k selbst nur 2 auf ihm senkrechte Polarisationen, deren Richtung allerdings nur bis auf eine Eichtransformation festliegt. Der Summationindex \vec{k} und der Index k in $c(k)$ bedeuten also Ausbreitungsrichtung \vec{k} und Polarisation σ jeder Partialwelle. A_i^* ist dann der konjugiert komplexe Ausdruck zu (1.5). Die Operatoren $c(k)$ und $c^*(k)$ wirken wie folgt auf Funktionen der Besetzungszahlen:

$$\begin{aligned} c(k) f(\dots, N_k, \dots) &= \sqrt{N_k + 1} \cdot f(\dots, N_k + 1, \dots) \\ c^*(k) f(\dots, N_k, \dots) &= \sqrt{N_k} f(\dots, N_k - 1, \dots) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sie genügen den Pauli-Heisenberg'schen Vertauschungsrelationen. Das B -Feld behandeln wir jetzt ganz analog dem A -Feld (vgl. dazu die in I zitierten Arbeiten von KRONIG und JORDAN zur Neutrinotheorie des Lichtes) indem wir die Protoneneigenfunktion

*) (\vec{k}, \vec{x}) bedeutet das skalare Produkt zweier Raumvektoren ($= \sum_1^3 k_i x_i$).

u nach den normierten Eigenfunktionen $u_p(\vec{x}) e^{-i E_p t/\hbar}$ in einem vorgegebenen Kraftfeld (etwa einem Kernfeld) entwickeln

$$u(x) = \sum_p c(p) u_p(\vec{x}) e^{-i E_p x_0/\hbar c} \quad (1.8)$$

und ebenso die Neutrinoeigenfunktionen in demselben Kernfeld nach den $v_n(\vec{x}) e^{-i E_n t/\hbar}$

$$v(x) = \sum_n c(n) v_n(\vec{x}) e^{-i E_n x_0/\hbar c} \quad (1.9)$$

Die Operatoren $c(p)$ und $c(n)$ genügen den Jordan-Wigner'schen Vertauschungsrelationen und wirken auf die Besetzungszahlen N_p und N_n der Proton- und Neutronzustände, die nur die Werte 1 oder 0 annehmen können. Bis auf ein, für das folgende belangloses, Vorzeichen gilt:

$$\begin{aligned} c(p) f(\dots, N_p, \dots) &= \sqrt{1-N_p} f(\dots, 1-N_p, \dots) \\ c^*(p) f(\dots, N_p, \dots) &= \sqrt{N_p} f(\dots, 1-N_p, \dots) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Wir führen nun durch eine räumliche Fourierentwicklung die c -Zahlen ε_i und D ein

$$u_p^+(\vec{x}) \gamma_i v_n(\vec{x}) = \varepsilon_i \sum_q D_{pn}(\vec{q}) e^{i(\vec{q}\vec{x})}, \quad (1.11)$$

wo ε_i reine Zahlen sind, so dass $(\varepsilon, \varepsilon) = -1$ ist und $D(\vec{q})$ die Dimension cm^{-3} hat*). Natürlich hängen die ε_i von p und n ab, wie auch die σ_i von \vec{k} abhängen. Dann lässt sich aus (1.2), (1.8), (1.9) und (1.11) in voller Analogie zu A_i in Formel (1.5) B_i in folgender Weise darstellen

$$B_i = \sum_{qpn} (e^{\lambda^2} D_{pn}(\vec{q})) \varepsilon_i e^{i(q,x)} c^*(p) c(n) \quad (1.12)$$

B_i^* ist der zu (1.12) konjugiert komplexe Ausdruck (wobei $c^*(n) c(p)$ stehen muss, was uns aber wegen des belanglosen Vorzeichenunterschiedes nicht interessiert). An Stelle der Bedingungen (1.6) für k und σ haben wir:

$$q_4 = i q_0 = (E_p - E_n)/\hbar c = \text{unabh. von } \vec{q}; (\varepsilon, \varepsilon) = -1 \quad (1.13)$$

Damit wir einen, der Störungstheorie des Diracelektrons analogen, Formalismus für (1.1) aufstellen können, muss erreicht werden,

*) Solange die Wellenlängen der ψ -Funktion gross gegenüber den Kerndimensionen sind, kann man für $u_p^+ \gamma_i v_n(\vec{x})$ die räumliche δ -Funktion setzen. Dann wird $D(\vec{q}) = 1/G$ (wenn man den auftretenden Zahlenfaktor = 1 setzt).

dass das A - und das B -Feld keine Wechselwirkung aufeinander ausüben. Eine solche Wechselwirkung besteht aber, da das A -Feld gemäss der zweiten, nicht ausgeschriebenen, achtkomponentigen Gl. (1.1) auf das u -Feld und somit das B -Feld einwirkt. Bewegen sich die schweren Teilchen in einem Lorentzsystem langsam gegen c d. h. ist $|\varepsilon_0| \gg |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|$, so kann diese Wechselwirkung vernachlässigt werden, wenn das A -Feld in diesem System so geeicht wird, dass es rein räumlich erscheint ($\sigma_0 = 0$). Das Viererpotential des A -Feldes wird im „Ruhsystem der schweren Teilchen“ als ein reines Vektorpotential geeicht. Dann überzeugt man sich leicht, dass die Wechselwirkung zwischen A und B wie $|(\varepsilon, \sigma)| = |(\vec{\varepsilon}, \vec{\sigma})| \sim \beta$ verschwindet, wo β die Geschwindigkeit der schweren Teilchen in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c darstellt.

Die folgende Störungstheorie ist also relativistisch invariant aber nicht mehr eichinvariant, und gilt überhaupt nur in der Annäherung, dass ein solches „Ruhsystem der schweren Teilchen“ existiert.

2. Störungstheorie erster Näherung. (Kontinuierliches ψ - β^+ -Spektrum). In Analogie zu der früher verwendeten relativistisch invarianten Störungstheorie des Diracelektrons unter dem Einfluss des A -Feldes ⁷⁾, soll jetzt eine Störungstheorie der leichten Partikel unter dem Einfluss des A - und B -Feldes skizziert werden. Auf die Eichinvarianz muss man hierbei allerdings verzichten und das A -Feld jeweils so eichen, dass seine Polarisierung σ raumzeitlich senkrecht auf derjenigen ε des B -Feldes steht.

Unabhängige Variable der ψ -Funktion sind dann also die Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$ der leichten Partikel, die Zeit $x_4 = i x_0 = ict$ und die Besetzungszahlen N_k, N_p und N_n . Wir entwickeln nach einem (in bezug auf \vec{x} und die N normierten) Orthogonalsystem dieser Variablen:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{G}} \int dl_0 \sum_{\bar{l}} \sum_{\bar{N}_k \bar{N}_p \bar{N}_n} \Psi(l, \bar{N}_k, \bar{N}_p, \bar{N}_n) e^{i(l, x)} \prod_{k p n} \delta_{\bar{N}_k}(N_k) \delta_{\bar{N}_p}(N_p) \delta_{\bar{N}_n}(N_n) \quad (2.1)$$

$\delta_{\bar{N}}(N)$ ist eine Funktion der diskreten Variablen N , die Null ist für $N \neq \bar{N}$ und 1 für $N = \bar{N}$. Ψ sind die Entwicklungskoeffizienten, die, wie ψ , achtkomponentige Spinoren sind. Die Auszeichnung der Zeitkoordinate durch Einführen des räumlichen Grundgebietes G ist (wie auch in (1.5) und (1.11)) nur scheinbar. Die Rechnungen werden durch die Auszeichnung wesentlich einfacher als in J. S.

Die zu $\Lambda, \Lambda', \Omega, \Delta$ und Γ_i adjungierten Matrizen Λ^+ etc. sind in der üblichen Weise durch $\Omega_{\mu\nu}^+ = \Omega_{\nu\mu}^*$ definiert. Die adjungierten Spinoren hingegen durch

$$\psi^+ = -i \psi^* \Gamma_4 \quad (2.2)$$

Wird ψ als einkolonnige Matrix aufgefasst, so ist ψ^* eine einzeilige Matrix, deren Elemente ψ_μ^* die zu ψ_μ konjugiert komplexen Zahlen sind. Ferner gilt natürlich

$$\Gamma_i = -\Gamma_i^+; \Lambda = \Lambda^+; \Delta = \Delta^+ \quad (2.3)$$

Setzt man (2.1) in die Wellengleichung ein, so folgt als Bedingung dass die Koeffizienten verschwinden:

$$\begin{aligned} & H(l) \Psi(l, \bar{N}_k, \bar{N}_p, \bar{N}_n) \\ & + \sum_{\vec{k}} T(\vec{k}) \sqrt{\bar{N}_k + 1} (\sigma, \Gamma) \Lambda \Psi(l-k, \bar{N}_k + 1, \bar{N}_p, \bar{N}_n) \\ & + \sum_{\vec{k}} T(\vec{k})^* \sqrt{\bar{N}_k} (\sigma^*, \Gamma) \Lambda \Psi(l+k, \bar{N}_k - 1, \bar{N}_p, \bar{N}_n) \\ & + \sum_{\vec{q}, p, n} M(\vec{q}) \sqrt{(1-\bar{N}_p) \bar{N}_n} (\varepsilon, \Gamma) \Omega \Psi(l-q, \bar{N}_k, 1-\bar{N}_p, 1-\bar{N}_n) \\ & + \sum_{\vec{q}, p, n} M(\vec{q})^* \sqrt{\bar{N}_p (1-\bar{N}_n)} (\varepsilon^*, \Gamma) \Omega^+ \Psi(l+q, \bar{N}_k, 1-\bar{N}_p, 1-\bar{N}_n) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hier ist $H(l) = (l, \Gamma) + \Delta \lambda_0^{-1}$ und

$$T(\vec{k}) = e \sqrt{\frac{2\pi}{Ghc|\vec{k}|}}; \quad M(\vec{q}) = e \left(\frac{e \lambda^2 D(\vec{q})}{hc} \right) \quad (2.5)$$

Die Funktion ψ , welche durch die Koeffizienten

$$\Psi^0 = \delta(l_0 - \bar{l}_0(\varrho, \vec{l})) \Phi^0(\vec{l}, \varrho, \bar{N}_k, \bar{N}_p, \bar{N}_n) \quad (2.6)$$

dargestellt wird und wo $\Phi^0 = 0$ ist, ausser für $\vec{l} = \vec{l}^0$ und $\bar{N}_k = \bar{N}_k^0$ etc., ist eine Eigenfunktion der Operatoren p_i, N_k, N_p und N_n . Gilt insbesondere noch

$$H(\vec{l}^0) \Phi^0 = 0 \quad (2.7)$$

wo der überstrichene Vierervektor \vec{l} jeweils einen Vierervektor bedeutet, dessen vierte Komponente durch

$$l_0(\varrho, \vec{l}) = + \eta(\varrho) \sqrt{|\vec{l}|^2 + \zeta(\varrho) \lambda_0^{-2}}$$

gegeben ist, so genügt diese Funktion der Wellengleichung für $e = 0$.

ϱ ist ein Spinindex; $\varrho = 1, 2$ und $\varrho = 3, 4$ sind Elektronenzustände positiver resp. negativer Energie, und $\varrho = 5, 6$ resp. $7, 8$ Neutrinozustände positiver resp. negativer Energie. Es ist also

$$\eta(\varrho) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \text{ für } \varrho = \begin{cases} 1256 \\ 3478 \end{cases} \quad \text{und} \quad \zeta(\varrho) = \begin{cases} 1 \\ \mu \end{cases} \text{ für } \varrho = \begin{cases} 1234 \\ 5678 \end{cases}.$$

Dann soll auch gelten

$$\Lambda \Phi^0(\varrho) = \frac{1}{2}(1 + \eta(\varrho)) \Phi^0(\varrho); \quad \Lambda' \Phi^0(\varrho) = \frac{1}{2}(1 - \eta(\varrho)) \Phi^0(\varrho) \quad (2.8)$$

d. h. die Φ^0 sollen auch Eigenfunktionen der Operatoren Λ , Λ' und $\Delta = \Lambda + \mu \Lambda'$ sein. Φ^0 sind also reine Elektronen- oder reine Neutrinozustände.

Die übliche Störungstheorie nimmt an, dass die, durch die Einwirkung des A - und B -Feldes hervorgerufene Störung zur Zeit $t = 0$ plötzlich beginnt („plötzliches Einschalten der Störung“). Wir wollen statt dessen die ψ -Funktion zur Zeit $t = 0$ plötzlich einschalten, d. h. statt (2.6) setzen

$$\Psi^0 = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{l_0 - \bar{l}_0(\varrho, \vec{l})} \Phi^0 \quad (2.9)$$

wo Φ^0 die gleiche Grösse wie in (2.6) darstellt. $\bar{l}_0(\varrho, \vec{l})$ ist aber jetzt eine komplexe Zahl

$$\bar{l}_0(\varrho, \vec{l}) = \eta(\varrho) \sqrt{|\vec{l}|^2 + \lambda_0^{-2} \zeta(\varrho)} - i\delta \quad (2.10)$$

wo δ eine, im Limes unendlich kleine, positive Grösse ist. Der Operator $H(l)$ ist dann aber als

$$H(l) = (\Gamma, l) + \Delta \lambda_0^{-1} - \delta \Gamma_4 \quad (2.10a)$$

zu definieren, damit (2.7) erfüllt ist*).

Dann wird wegen

$$\frac{1}{2\pi} \int d\bar{l}_0 \frac{e^{-i\bar{l}_0 x_0}}{l_0 - \bar{l}_0(\varrho, \vec{l}^0)} = \begin{cases} e^{-i\bar{l}_0^0 x_0} & \text{für } x_0 > 0 \\ 0 & \text{für } x_0 < 0 \end{cases}$$

mit $\bar{l}_0^0 = \bar{l}_0(\varrho, \vec{l}^0)$ die ψ -Funktion $\psi = G^{-\frac{1}{2}} \Phi^0 e^{i(\bar{l}^0 x)}$ für $x_0 > 0$ und $\psi = 0$ für $x_0 < 0$. Ist δ von 0 verschieden, so bedeutet $\tau = (2\delta c)^{-1}$ die Abklingungszeit des Anfangszustandes.

Wir fragen nun nach dem, durch die Störung hervorgerufenen, zu e proportionalen Zusatz zur Wellenfunktion (Störung erster Näherung). Dazu setzen wir $\Psi = \Psi^0 + \Psi^1$, wo Ψ^1 zu e proportional sei**) und wo Ψ^0 durch (2.9) gegeben sei. Können wir

*) Wir setzen damit in nullter Näherung bereits eine abklingende Eigenfunktion wie WIGNER und WEISSKOPF¹⁰⁾ es getan haben, die somit in nullter Näherung schon einer leicht veränderten Differentialgleichung genügen muss.

**) $e\lambda^2$ in (2.5) wird dabei als eine fundamentale (von e unabhängige) Konstante aufgefasst.

dann einen zu $H(l)$ inversen Operator $H(l)^{-1}$ finden, so folgt aus (2.4)

$$\Psi^1(l, \bar{N}_k, \bar{N}_p, \bar{N}_n) = \dots - \sum_{\vec{q} p n} M(\vec{q}) \sqrt{(1-\bar{N}_p) \bar{N}_n} H(l)^{-1}(\varepsilon, l) \Omega \Psi^0(l-q, \bar{N}_k, 1-\bar{N}_p, 1-\bar{N}_n) - \dots \quad (2.11)$$

Durch sind der erste (A -), der zweite (A^* -) und der letzte (B^* -) Term von (2.4) angedeutet. Ausgeschrieben ist nur der dritte (B -) Term.

Jetzt wollen wir von (2.9) Gebrauch machen. Dann fällt die Summe über \vec{q} weg, da Φ^0 nur für $\vec{l}-\vec{q} = \vec{l}^0$ von Null verschieden ist. Ferner existiere nur je ein Protonen- und ein Neutrinozustand. Damit fällt auch die Summation über p und n weg. Sehen wir ferner von Strahlungswechselwirkungen ab, und ist anfänglich ein Proton aber kein Neutron vorhanden ($\Phi^0(..\bar{N}_p, \bar{N}_n..)$ nur für $\bar{N}_p = 1, \bar{N}_n = 0$ und $\bar{N}_k = 0$ von Null verschieden), so interessiert uns nur der ausgeschriebene Term. Er ist nur von Null verschieden, falls $\Omega \Psi^0 = 0$ ist. Das ist aber nur für Elektronenzustände der Fall. Der Anfangszustand muss also ein Elektronenzustand mit positiver oder negativer Energie sein. Man überzeugt sich leicht, dass wegen $\Lambda \Omega = 0$ und $\Lambda' \Omega \Psi^0 = \Omega \Psi^0 \neq 0, \Lambda \Psi^1 = 0$ und $\Lambda' \Psi^1 = \Psi^1$ gilt, d. h., dass der Zusatz erster Näherung ein reiner Neutrinozustand ist. Die zeitabhängige Spinoramplitude erster Näherung von $e^i(\vec{l}^0 + \vec{q}, \vec{x})$ ist dann

$$\Phi^1(\vec{q}) = \int d l_0^0 e^{-i(l_0^0 + q_0) x_0} \Psi^1(l^0 + q, 0_k, 0_p, 1_n) = -\frac{i}{2\pi} M(\vec{q}) \int d l_0^0 \frac{1}{l_0^0 - \bar{l}_0^0} H(l^0 + q)^{-1}(\varepsilon, l) \Omega \Phi^0. \quad (2.12)$$

Bevor wir weiterfahren müssen wir $H(l)^{-1}$ definieren. Dazu führen wir den mit allen Γ_i, Λ und Δ vertauschbaren Operator

$$\left. \begin{aligned} R(l) &= H(l) K(l) = K(l) H(l) = (\vec{l}, \vec{l}) + \Delta \lambda_0^{-2} + (l_4 - \delta)^2 \\ \text{ein, wo } K(l) &\text{ den Operator} \\ K(l) &= -(l, l) + \Delta \lambda_0^{-1} + \delta \Gamma_4 \\ \text{bedeutet und } H(l) &\text{ durch (2.10a) definiert ist. Dann ist} \\ H(l)^{-1} &= R(l)^{-1} K(l) = K(l) R(l)^{-1} \end{aligned} \right\} (2.13)$$

Da in (2.12) $R(l)$ auf Ω wirkt, kann für Δ in $R(l)$ die Zahl μ (Verhältnis von Neutrinomasse zu Elektronenmasse) gesetzt werden (s. Anhang (5.9)). Dann wird

$$R(l) = (l_0 - \bar{l}_0(e, \vec{l})) (l_0 - \bar{l}_0(e', \vec{l})) = (l_0 - \bar{l}_0) (l_0 + \bar{l}_0)$$

wo ϱ und ϱ' sich auf zwei Neutrinozustände verschiedenen Energievorzeichens beziehen (2.10). Jetzt wird (2.12) nach Ausführen der Integration für Zeiten $0 < x_0 \ll \delta^{-1}$:

$$\Phi^1 = - \left\{ \frac{e^{-i\bar{l}_0 x_0}}{2\bar{l}_0(\bar{l}_0 - q_0 - \bar{l}_0^0)} + \frac{e^{i\bar{l}_0 x_0}}{2\bar{l}_0(\bar{l}_0 + q_0 + \bar{l}_0^0)} - \frac{e^{-i(\bar{l}_0^0 + q_0) x_0}}{(\bar{l}_0 - q_0 - \bar{l}_0^0)(\bar{l}_0 + q_0 + \bar{l}_0^0)} \right\} M(\vec{q}) K(l)(\varepsilon, \Gamma) \Omega \Phi^0. \quad (2.14)$$

Man überzeugt sich an Hand der Figur 1, welche einen zwei-dimensionalen Schnitt durch den Energie-Impulsraum mit $l_2 = l_3 = 0$ veranschaulicht, dass nur einer der beiden ersten Terme und der letzte gross werden können*):

Die Punkte auf der Hyperbel stellen die möglichen Elektronenzustände positiver und negativer Energie dar, während die Punkte auf den Asymptoten den entsprechenden Neutrinozuständen entsprechen. Für ein gegebenes \vec{l} (in der

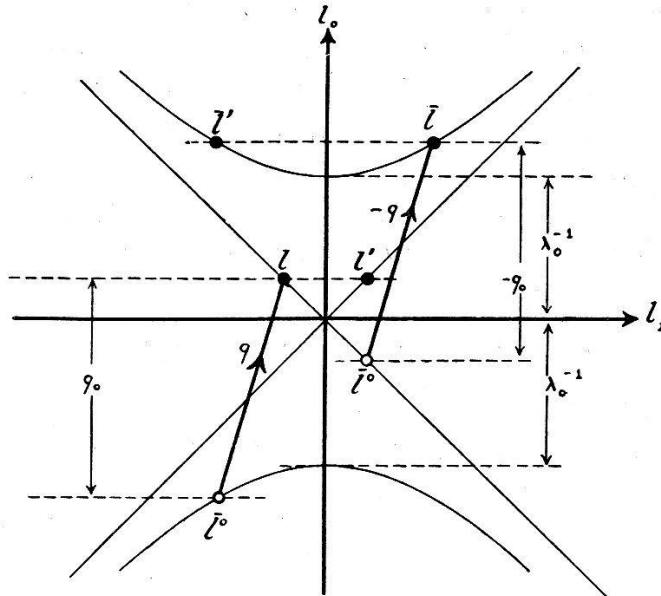


Fig. 1.

Der auf der linken Seite der Figur gezeichnete Pfeil stellt die β^+ -Radioaktivität dar: Unter dem Einfluss der Partialwelle q des B -Feldes vollzieht eine Partikel einen Übergang aus dem Elektronenzustand negativer Energie \bar{l}^0 nach einem Neutrinozustand positiver Energie $\bar{l} = \bar{l}^0 + q$. Der Pfeil auf der rechten Seite stellt die β^- -Radioaktivität dar: Übergang von einem Neutrinozustand negativer Energie \bar{l}^0 unter dem Einfluss des B^* -Feldes (Partialwelle $-q$) nach dem Elektronenzustand positiver Energie $\bar{l} = \bar{l}^0 + (-q)$.

Figur l_1) existieren acht verschiedene Werte von $\bar{l}_0(\varrho, l_1)$ für $\varrho = 1, \dots, 8$ gemäss Gl. (2.10), da jeder Punkt auf den Kurven wegen des Spins doppelt zu zählen ist. Als Punkt \bar{l}^0 (Anfangszustand) wählen wir zuerst ein Elektron im Zustande

*) Die Gleichung (2.14) ist nicht ganz korrekt, da in $K(l)$ das l zwar immer den Raumanteil $\vec{l} = \vec{l}^0 + \vec{q}$ hat, aber seinem Zeitanteil l_0 , wie man sich leicht überzeugt, eigentlich in den 3 Termen, welche den 3 Summanden entsprechen, 3 verschiedene Bedeutungen zukommen: $l_0 = \text{Realteil von } \bar{l}_0, -\bar{l}_0 \text{ und } \bar{l}_0^0 + q_0$. Da aber nur der Fall $\bar{l}_0 = \bar{l}_0^0 + q_0$ interessant sein wird, so hat in den beiden grossen Termen (dem ersten und dem letzten) l_0 praktisch dieselbe Bedeutung.

negativer Energie. Dann wird der erste und der letzte Term gross, wenn $\bar{l}_0 = \bar{l}_0(\rho, \bar{l}^0 + \vec{q})$ gleich $\bar{l}_0 + q_0 = \bar{l}_0(\rho^0, \bar{l}^0) + q_0$ wird. Diese Bedingung ist in der Figur von den beiden Punkten \bar{l} und \bar{l}' erfüllt, welche wir *Endzustände* nennen wollen. In einer vierdimensionalen Zeichnung liegen diese Punkte auf einer Kugel. Denken wir uns jetzt, im Sinne Dirac's, alle Zustände negativer Energie besetzt, so entsteht durch den betrachteten Vorgang ein Loch (*pos. Elektron*) in den Elektronenzuständen negativer Energie und ein *Neutrino* positiver Energie, während gleichzeitig ein Proton im Zustande der Energie E_p verschwunden und ein Neutron im Zustande der Energie E_n entstanden ist. Dazu muss die Bedingung

$$q_0 = \frac{1}{hc} (E_p - E_n) > \frac{mc}{h} = \lambda_0^{-1}$$

erfüllt sein (β^+ -Radioaktivität), denn sonst würde der Endzustand $\bar{l} = \bar{l}^0 + q$ auf der Neutrinohyperbel negativer Energie liegen, deren Zustände ja gemäss unserer Vorstellung als besetzt anzusehen sind, und deren Punkte daher als Endzustände nicht in Betracht kommen dürfen.

Wären wir von einem der besetzten Neutrinozustände negativer Energie ausgegangen, so müssten wir den letzten Term in (2.4) (in (2.11) durch $-\dots$ angedeutet) verwenden, welcher der Wechselwirkung des B^* -Feldes mit der Partikel entspricht und gemäss welcher ein Neutron in einem Zustande der Energie E_n zu einem Proton mit der Energie E_p wird. Dann gilt für den Endzustand $\bar{l} = \bar{l}^0 + (-q)$ und als Bedingung, dass der Endzustand auf der Elektronhyperbel positiver Energie liegt:

$$-q_0 = \frac{1}{hc} (E_n - E_p) > \frac{mc}{h} = \lambda_0^{-1}$$

Es ist also ein Loch (*positives Neutrino*) in den Neutrinozuständen negativer Energie und ein *Elektron* entstanden (β^- -Radioaktivität).

Lässt man jetzt den immer klein bleibenden zweiten Term in (2.14) ausser Acht, so kann man für l_0 in der Nähe der Resonanz im Zähler den Realteil von $\bar{l}_0 + q_0$ schreiben und erhält statt (2.14):

$$\Phi^1(\vec{q}) = + \frac{e^{i(\bar{l}_0 - q_0 - \bar{l}_0^0)x_0} - 1}{\bar{l}_0 - q_0 - \bar{l}_0^0} \cdot e^{-\bar{l}_0 x_0} \frac{M(\vec{q}) K(\bar{l}_0 + q_0)(\varepsilon, \Gamma) \Omega}{2 \bar{l}_0} \Phi^0 \quad (2.15)$$

Der Erwartungswert der Teilchenzahl erster Näherung im Endzustande unter Berücksichtigung *aller Partialwellen* \vec{q} ist Null für $x_0 < 0$ und

$$n^1(x_0) = \frac{1}{i} \sum_{N_k N_p N_n} \int d\vec{x}^3 \psi^{1+} \Gamma_4 \psi^1 = \frac{1}{i} \sum_{\vec{q}} \Phi^1(\vec{q}) + \Gamma_4 \Phi^1(q) \quad (2.16)$$

für $0 < x_0 < \delta^{-1}$.

Dabei folgt $\Phi^{1+}(q)$ aus der zu (2.15) adjungierten Gleichung*). Der Erwartungswert der Teilchenzahl nullter Näherung im An-

*) Ist F ein beliebiger durch achtreihige Matrizen darstellbarer Operator, so gilt wegen (2.2)

$$(F \Phi)^+ = \Phi^+ \Gamma_4 F^+ \Gamma_4.$$

fangszustande ist wegen (2.9) und (2.10) Null für $x_0 < 0$ und beträgt für positive Zeiten:

$$n^0(x_0) = \frac{1}{i} \sum_{N_K N_p N_n} \int d\tilde{x}^3 \psi^{0+} \Gamma_4 \psi^0 = \frac{1}{i} \Phi^{0+} \Gamma_4 \Phi^0 e^{-2\delta x_0} \quad (2.16a)$$

Da \bar{l}^0 fest ist, kann die Summation über \tilde{q} durch eine solche über $\tilde{l} = \bar{l}^0 + \tilde{q}$ ersetzt werden und diese letztere wieder durch die Integration über $G(2\pi)^{-3} d\tilde{l}^3 = G(2\pi)^{-3} |\tilde{l}| \bar{l}_0 d\Theta_l d\bar{l}_0$. Die Integration über $d\bar{l}_0$ schafft in der üblichen Weise den Resonanznenner weg und wir erhalten

$$n^1 = x_0 \frac{1}{4\pi} \frac{1}{i} \int \frac{d\Theta_l}{4\pi} G |M(\tilde{q})|^2 \{ \Phi^{0+} \Gamma_4 \Omega^+(\varepsilon, \Gamma)^+ K(\bar{l}^0 + q)^+ K(\bar{l}^0 + q)(\varepsilon, \Gamma) \Omega \Phi^0 \} \quad (2.17)$$

$d\Theta_l$ ist das Raumwinkeldifferential der Impulsrichtungen des Endzustandes. Die Auswertung der geschweiften Klammer ergibt (siehe Anhang), nach Integration über alle Neutrinorichtungen $d\Theta_l$, und bei Berücksichtigung, dass $\varepsilon_0 \sim 1$ und $|\varepsilon_i| \ll 1$ ($i = 1, 2, 3$) mit $D(\tilde{q}) = 1/G$ in (2.5) (s. Anm. auf S. 537):

$$\frac{dn^1}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(137)^2} \frac{\lambda^4}{\lambda_0^2} \frac{c}{G} \{ (q_0 + \bar{l}_0^0) \lambda_0 \}^2 n_0 \quad (2.18)$$

In dieser Formel ist hcq_0 die vom Kernsystem abgegebene Energie und $hc\bar{l}_0^0$ die Energie des Elektrons im Anfangszustande.

Für den hier in Fig. 1 speziell diskutierten Fall der β^+ -Radioaktivität ist der Anfangszustand \bar{l}^0 ein Zustand negativer Energie ($\bar{l}_0^0 < -\lambda_0^{-1}$). Dem Verschwinden einer Partikel aus diesem Zustand entspricht also das Entstehen eines Loches resp. eines positiven Elektrons der Energie $hc\bar{l}_0^+ = -hc\bar{l}_0^0$. $1/G$ bedeutet (wenn wir für kleine Zeiten ja $n_0 = 1$ setzen) die Elektronendichte der Elektronen im Zustande \bar{l}^0 in Kernnähe. Im Bereiche $d\tilde{l}^{03}$ liegen dann $2G(2\pi)^{-3} d\tilde{l}^{03}$ besetzte Zustände. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Loch resp. ein pos. Elektron pro sec. entsteht ist daher (2.18) über alle energetisch möglichen Anfangszustände summiert. Die Reziproke dieser Grösse bezeichnen wir als die Halbwertszeit $\tau_{\nu-\beta^+}$ des β^+ - Strahlers und finden für sie

$$\tau_{\nu-\beta^+} = \left\{ G \pi^2 \int_{-q_0}^{-\lambda_0^{-1}} |\bar{l}^0| \bar{l}_0^0 d\bar{l}_0^0 \frac{dn^1}{dt} \right\}^{-1} = 2\pi^3 (137)^2 \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} \frac{\lambda_0}{c} F(q_0 \lambda_0) \quad (2.19)$$

wo

$$F(z) = \sqrt{z^2 - 1} \left(\frac{z^4}{30} - \frac{3}{20} z^2 - \frac{2}{15} z \right) + \frac{z}{4} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad (2.20)$$

Formeln (2.19) und (2.20) sind die von Fermi abgeleiteten Formeln im Spezialfall $Z = 0$ (Nichtberücksichtigung der Veränderung der Eigenfunktionen des Anfangszustandes durch den Z -fach geladenen Kern).

3. Reine Neutrino-Strahler (ν^- -Strahler) (diskretes- ν^- -Spektrum).

Wir betrachten jetzt den Fall $\bar{l}_0^0 > \lambda_0^{-1}$:

Es ist also anfänglich ein negatives Elektron mit positiver Energie vorhanden. In Wirklichkeit ist nun tatsächlich jeder Atomkern von Bahnelektronen umgeben. Wir vernachlässigen, uns auf Atomkerne niedriger Kernladung beschränkend, den Bindungseffekt und betrachten die Bahnelektronen als freie Elektronen, deren Energie $\sim mc^2$ ist (d. h. deren $|\bar{l}_0^0 - \lambda_0^{-1}| \ll \lambda_0^{-1}$ ist). Figur 2 veranschaulicht diesen Fall:

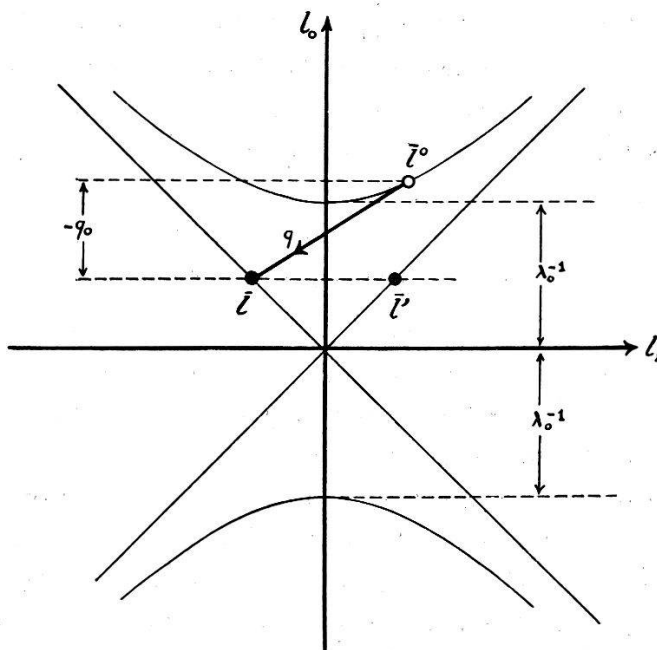


Fig. 2.

Reiner ν^- -Strahler: Unter dem Einfluss der Partialwelle q des B -Feldes vollzieht eine Partikel einen Übergang aus einem Elektronenzustand positiver Energie (K -Elektron) \bar{l}_0^0 nach einem Neutrinozustand $\bar{l} = \bar{l}_0^0 + q$.

Man sieht sofort, dass solange $q_0 > -\lambda_0^{-1}$ ist, es Vektoren q in der Fourierzerlegung des B -Feldes gibt, deren Gesamtheit den positiven Neutrinohyperkegel in einer Kugel schneiden. In der, nur eine Raumdimension veranschaulichenden, Figur 2 sind es wieder nur zwei Punkte, \bar{l} und \bar{l}' . Wir können den Vorgang folgendermassen beschreiben:

Negative Neutrino (ν^-)-Strahlung: „Eine Partikel springt unter dem Einfluss eines B -Feldes, dessen Energiekomponente der Umgleichung $hcq_0 = E_p - E_n > mc^2$ genügt, aus einem geladenen

Zustände positiver Energie \bar{l}^0 in einen ungeladenen Zustand positiver Energie \bar{l} .“*)

Oder: „aus einem Proton (im Kern) wird ein Neutron (im Kern) während gleichzeitig ein (Bahn-) Elektron der Energie $E_{\beta^-} = mc\bar{l}_0^0$ verschwindet und ein Neutrino der Energie $(E_p - E_n) + E_{\beta^-} = hc\bar{l}_0$ entsteht“.

Entsprechend der β^- -Strahlung entsteht natürlich auch eine *Antineutrino- oder positive Neutrino- (ν^+)-Strahlung*, wenn positive Elektronen auf einen Kern mit $-hcq_0 = E_n - E_p > -mc^2$ auftreffen. Der Fall ist aber weniger interessant, weil im allgemeinen keine positiven Elektronen sich in Kernnähe befinden.

Die ν^- -Strahlung hat, zum Unterschied gegen die kontinuierliche β -Strahlung ein *diskretes ν^- -Spektrum*, da \bar{l}_0^0 und somit auch \bar{l}_0 jetzt feste Zahlen sind, während im β^+ -Falle \bar{l}_0^0 sämtliche Werte von $-mc/h$ bis $-(E_p - E_n)/hc$ durchlaufen kann.

Von verschiedenen Autoren wurde die Möglichkeit das Neutrino zu beobachten diskutiert. Es zeigte sich aber, dass alle Effekte zu klein sind um mit unserer derzeitigen experimentellen Technik entdeckt zu werden. Sollte sich hingegen unsere Beobachtungsfähigkeit verbessern, so dürfte ein diskretes ν -Spektrum leichter als ein kontinuierliches ν -Spektrum nachgewiesen werden.

Es stellt sich nun die Frage, ob die reinen ν -Strahler nicht trotzdem nachgewiesen werden können. Herr W. PAULI¹¹⁾ machte mich darauf aufmerksam, dass ja im betrachteten Vorgang durch das Verschwinden des Bahnelektrons tatsächlich ein „Loch“ in der *K-Schale* (eventuell auch in der *L-Schale*) entsteht, in welches später ein anderes Bahnelektron aus den *L-, M- etc. -Schalen* springt unter *Emission des charakteristischen (diskreten) Röntgenspektrum des dem zerfallenden Elementes im periodischen System vorausgehenden Elementes*.

Es bleibt nun noch übrig die mittlere Lebensdauer τ_{ν^-} dieser ν^- -Strahler zu ermitteln:

Unter Vernachlässigung des Bindungseffektes gilt auch hier (2.18), da ja in der Ableitung weder über das Vorzeichen der Energie im Anfangszustand noch im Endzustand irgendwelche Voraussetzungen gemacht wurden.

Die Halbwertszeit ergibt sich aus folgender Überlegung:

n^0 , der Erwartungswert der Teilchenzahl im Anfangszustande, ist natürlich auch gleich der Wahrscheinlichkeit das Atom im noch

*) Ist $mc^2 > hcq_0$ so kann keine β^+ -Strahlung auftreten und wir haben einen reinen ν^- -Strahler.

nicht zerfallenen (E_p) Zustände anzutreffen. Ferner ist $dn^1/dt = -dn^0/dt$. Somit wird (2.18) zum Gesetz des radioaktiven Zerfalles:

$$-\frac{dn^1}{dt} = \frac{dn^0}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot n^0 \quad (3.1)$$

mit der Lösung

$$n^0(t) = n^0(t=0) e^{-t/\tau} \quad (3.2)$$

Für $1/G$ setzen wir die (unrelativistische) Dichte der K -Elektronen im (unabgeschirmten) Coulombfeld der Ladung Ze am Orte des Kernes:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{mc}{h} \right)^3 \left(\frac{Ze^2}{hc} \right)^3 \quad (3.3)$$

Dann wird aus (2.18), (3.1) und (3.3) die mittlere Lebensdauer oder Halbwertszeit:

$$\tau_{\nu^-} = 2\pi^2 (137)^5 Z^{-3} \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} \frac{\lambda_0}{c} \cdot ((q_0 + l_0^0) \lambda_0)^{-2} \quad (3.4)$$

Vergleichen wir damit die Lebensdauer der $\beta^+ - \nu^-$ -Strahler (2.19) so findet man für das Verhältnis

$$\tau_{\nu^-} / \tau_{\beta^+ \nu^-} = (1/\pi) (137/Z)^3 (F(z)/z_\nu^2) \quad (3.5)$$

Hier ist $z = (E_p - E_n)/mc^2$ und $z_\nu = (E_p - E_n + E_{\beta^-})/mc^2$. F und z_ν sind von der Grössenordnung 1, so dass man sagen darf:

„Die Halbwertszeiten der reinen ν^- -Strahler sind grössenordnungsmässig $(2/\pi) (137/Z)^3$ mal länger als die der $\beta^+ - \nu^-$ -Strahler. (Für leichte Atome der Ordnungszahl $Z \sim 14$ beträgt das Verhältnis rund 10^3).“

Vielleicht ist, mangels besserer Kenntnisse der Kernniveaus E_p und E_n , folgende Betrachtung über die Möglichkeit der Herstellung von ν^- -Strahlern hier von Interesse:

Mittels der von FERMI und von JOLIOT entdeckten Anlagerungsreaktionen von Neutronen an leichte Atomkerne erhält man mit einer relativ grossen Wahrscheinlichkeit β^+ -aktive, un stabile Elemente. Da die obere Grenze ihres β^+ -Energie-Spektrums durch $E_p - E_n > mc^2$ gegeben ist, und da alle diese Grenzen innerhalb dem Bereich einiger mc^2 liegen, so darf man sagen, dass die Wahrscheinlichkeit einen β^+ -Strahler auf diese Weise zu erzeugen proportional diesem Bereich ist. ν^- -Strahler erhalten wir auf dieselbe Weise, falls $E_p - E_n > -mc^2$ ist. Ist $mc^2 > E_p - E_n > -mc^2$, so haben wir es mit reinen ν^- -Strahlern zu tun, da kein β^+ -Zerfall auftreten kann. Die Wahrscheinlichkeit einen solchen Strahler durch eine Fermi-Joliot'sche Anlagerungsreaktion zu erzeugen, darf dann, da wir mangels besserer Kenntnisse uns die Kernniveaus statistisch verteilt denken, proportional dem Bereich $2mc^2$ gesetzt werden.

Somit ist die Wahrscheinlichkeit durch Neutronenanlagerungsreaktionen einen reinen ν^- -Strahler zu erzeugen von gleicher Grössenordnung wie diejenige für die Erzeugung eines β^+ -Strahlers.

4. Störungstheorie zweiter Näherung (kontinuierliches ν^- - γ -Spektrum der ν^- -Strahler). In diesem Paragraphen wollen wir die Effekte zweiter Näherung in e untersuchen. Das Vorgehen ist analog demjenigen welches zur Berechnung von Comptoneffekt, Bremsstrahlung und Paarerzeugung verwendet wurde. Wir iterieren die Gleichung (2.11) indem wir Ψ^1 aus (2.11) in die rechte Seite derselben Gleichung an Stelle von Ψ^0 einsetzen. Man erhält:

$$\Psi^2(l, \bar{N}_k, \bar{N}_p, \bar{N}_n) = + \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} T(k) T(k')^* \sqrt{(\bar{N}_k + 1) (\bar{N}_{k'} + \delta_{kk'})}$$

$$(Hl)^{-1} \{(\sigma, \Gamma) H(l-k)^{-1} (\sigma', \Gamma) + (\sigma', \Gamma) H(l+k') (\sigma, \Gamma)\} \Lambda^2$$

$$\Psi^0(l-k+k', \bar{N}_k+1, \bar{N}_{k'}-1, \bar{N}_p, \bar{N}_n) + \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{q}} \sum_{\vec{p}} T(k)^* M(q) \sqrt{\bar{N}_k(1-\bar{N}_p)\bar{N}_n}$$

$$H(l)^{-1} \{(\sigma, \Gamma) H(l+k)^{-1} \Lambda \Omega(\varepsilon, \Gamma) + (\varepsilon, \Gamma) \Omega \Lambda H(l-q)^{-1} (\sigma, \Gamma)\}$$

$$\Psi^0(l-q+k, \bar{N}_k-1, 1-\bar{N}_p, 1-\bar{N}_n) + \dots \quad (4.1)$$

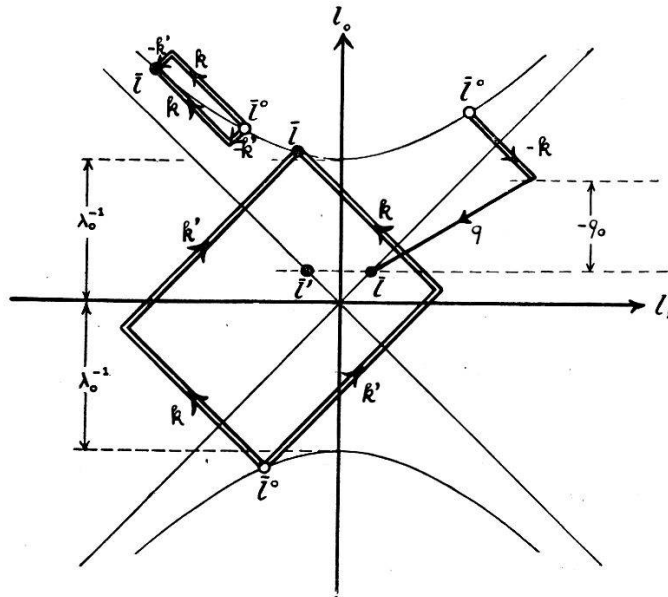


Fig. 3.

Oben links: *Comptoneffekt am negativen Elektron:* Unter Einwirkung der Partialwelle k des A -Feldes (Absorption eines Photons mit dem Vierervektor der Ausbreitungsrichtung k) und $-k'$ des A^* -Feldes (Emission eines Photons k') springt eine Partikel vom Elektronenzustand \bar{l}^0 nach einem Elektronenzustand $\bar{l} = \bar{l}^0 + k - k'$.

Mitte: *Paarerzeugung durch zwei Photonen:* Unter Einwirkung der Partialwellen k und k' des A -Feldes (Absorption zweier Photonen) springt die Partikel aus einem Elektronenzustand negativer Energie \bar{l}^0 nach einem solchen positiver Energie $\bar{l} = \bar{l}^0 + k + k'$.

Oben rechts: *Kontinuierliche γ -Emission:* Unter der Einwirkung des A^* -Feldes (Partialwelle $-k$ oder Emission eines Photons k) und des B -Feldes (Partialwelle q) springt die Partikel vom Elektronenzustand \bar{l}^0 nach dem Neutrinozustand $\bar{l} = \bar{l}^0 - k + q$.

Der erste Term ist die Kombination des A^* -Feldes mit dem A -Felde; der zweite die Kombination des A^* -Feldes mit dem B -Felde. $+ \dots$ bedeutet die weiteren Kombinationen von A^* , A , B^* und B .

Comptoneffekt. Der erste Term in (4.1) ist nur von Null verschieden, wenn erstens Ψ^0 ein Elektronenzustand ist ($\mathcal{A}\Psi^0 \neq 0$), und wenn zweitens mindestens ein Summand in \vec{k} nicht verschwindet d. h. wenn, wenigstens in einem Ψ^0 , $\bar{N}_k^0 \neq 0$ ist. Dann ist im Endzustand $\bar{N}_{k'}^2 \neq \bar{N}_k^0 - 1$ und $\bar{N}_{k'}^2 = \bar{N}_k^0 + 1$ und $l = l^0 + k - k'$. Ψ^0 ist natürlich wegen (2.9) wieder nur für $l^0 \sim \bar{l}^0$ von Null verschieden.

Das Elektron im Anfangszustande \bar{l}^0 hat ein Photon mit Impuls \vec{k} absorbiert, ein anderes Photon mit Impuls \vec{k}' emittiert und ist nach dem Endzustande $\bar{l} = \bar{l}^0 + k - k'$ gesprungen. Wird ein analoger Rechnungsgang wie derjenige, welcher von (2.9) nach (2.17) führte auf (4.1) angewendet, so zeigt sich, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten (wegen des auftretenden $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ in (4.1) und wegen des Resonanznenners in der zu (2.14) analogen Formel) nur dann nicht verschwinden, wenn der Endzustand $l = \bar{l}$ ein Punkt auf dem Elektronhyperhyperboloid ist. In Fig. 3 ist der Comptoneffekt und die Paarerzeugung durch zwei Lichtquanten (räumlich eindimensional) dargestellt. Die Pfeile des A -Feldes sind im Gegensatz zum B -Feld jeweils durch doppelspurige Linien bezeichnet. Die Rechnung ergibt die KLEIN-NISHINA-Formel⁷⁾. Die Paarerzeugung durch zwei Photonen lässt sich in gleicherweise durch Kombination des A -Feldes mit sich selbst darstellen und ergibt die BREIT-WHEELER'sche Formel¹²⁾.

γ - ν^- -Emission: Wir wenden uns jetzt wieder dem diskutierten ν^- -Zerfall zu.

In $\Psi^0 (l^0, \bar{N}_k^0, \bar{N}_p^0, \bar{N}_n^0)$ ist also wie im vorhergehenden Paragraphen Φ^0 nur für ein \bar{l}^0 mit $\bar{l}_0^0 > \lambda_0^{-1}$, $\bar{N}_k^0 = \bar{N}_n^0 = 0$, $N_p^0 = 1$ von Null verschieden. „Es ist ein Elektron positiver Energie, ein Proton aber kein Photon und kein Neutron vorhanden.“ Ein Comptoneffekt tritt also nicht auf. Wir betrachten daher den zweiten Term. Es gilt $\Omega \mathcal{A} \Psi^0 = \Omega \Psi^0 \neq 0$ und $\mathcal{A} \Omega \Psi^0 = 0$. Im zweiten Term haben wir, im Gegensatz zum Comptoneffekt, in der geschweiften Klammer $\{ \dots \}$ nur einen (den zweiten) von Null verschiedenen Summanden.

Im $\left\{ \begin{array}{l} \text{Comptoneffekt} \\ \text{Paarerzeugungseffekt} \end{array} \right\}$ kann ja das Teilchen zuerst das Photon \vec{k} absorbieren oder zuerst das Photon \vec{k}' $\left\{ \begin{array}{l} \text{emittieren} \\ \text{absorbieren} \end{array} \right\}$. Daher sind bei diesen Vorgängen zwei Summanden kohärent zu addieren resp. in Fig. 3 zwei Wege von \bar{l}^0 nach $\bar{l} = \bar{l}^0 + k \mp k'$ zu zeichnen.

Im Falle des von Photonenemission begleiteten Überganges eines Teilchens aus einem Elektronzustand in einen Neutrinozustand muss das Teilchen zuerst („solange es eben noch ein Elektron ist“) das Photon emittieren und erst dann verwandelt

es sich unter Einwirkung des B -Feldes in ein Neutrino. Somit ist nur der zweite Summand von Null verschieden und es ist nur der eine Weg von \bar{l}^0 nach $\bar{l} = \bar{l}^0 - k + q$ möglich.

Die weitere Rechnung verläuft analog der in Paragraph 2 durchgeführten Ableitung der Formel (2.17). Man erhält in voller Analogie zur KLEIN-NISHINA-Formel (J. S., Formel (3.4)):

$$n^2 = x_0 \frac{1}{4\pi} \frac{1}{i} \int \frac{d\Theta_i}{4\pi} G |M(\vec{q})|^2 |T(\vec{k})|^2$$

$$\{ \Phi^{0+} \Gamma_4(\sigma, \Gamma)^+ H(\bar{l}^0 - k)^{-1+} \Lambda^+ \Omega^+(\varepsilon, \Gamma)^+ K(\bar{l}^0 + q - k)^+$$

$$K(\bar{l}^0 + q - k)(\varepsilon, \Gamma) \Omega \Lambda H(\bar{l}^0 - k)^{-1}(\sigma, \Gamma) \Phi^{0+} \} \quad (4.2)$$

(Hier bedeutet \bar{l}^0 einen Vektor, dessen vierte Komponente \bar{l}_0^0 reell ist und dem Realteil von (2.10) entspricht*). Die Auswertung der geschweiften Klammer in (4.2) ergibt (s. Anhang) die zu (2.18) analoge Formel, für die Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit t ein Photon pro sec. der Polarisation σ in der Richtung \vec{k} emittiert wird:

$$\frac{dn^2}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{137} \right)^3 \frac{\lambda^4}{\lambda_0^2} \frac{c}{G} \frac{\lambda_0^3}{G}$$

$$\frac{(\bar{l}_0^0 + q_0 - k_0)^2 \{ -(\bar{l}^0, k) k_0 + 2(\sigma, \bar{l}^0)^2 (\bar{l}_0^0 - k_0) \}}{\lambda_0 k_0 \bar{l}_0^0 \{ (\bar{l}^0, k)^2 + \delta^2 \bar{l}_2^{02} \}} n^0 \quad (4.3)$$

δ ist die in Paragraph 2 eingeführte Abklingungskonstante. Würden wir sie Null setzen, so würde (4.3) für $\nu = 0$ divergieren. Wir identifizieren daher δ mit $(2c\tau)^{-1}$, wo τ die Halbwertszeit des instabilen Atomes bezeichnet.

In (4.3) zeigt sich das *Fehlen der Eichinvarianz* im Gegensatz zu der analogen Formel für Bremsstrahlung, Paarerzeugung und Comptoneffekt (J. S.-Formel (4.6)). Die Formel ist also nur in einem Lorentzsystem richtig, in welchem die schweren Teilchen kleine Geschwindigkeiten besitzen ($|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \ll 1$) und wo σ rein räumlich ($\sigma_0 = 0$) gewählt wird.

Wir fragen jetzt nach der Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit t ein Lichtquant einer Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ mit beliebiger Polarisation in beliebiger Richtung ausgesandt wird. Da wir uns auf schwach gebundene d. h. in dieser Näherung einfach auf langsame freie Elektronen beschränken, dürfen wir im Nenner \bar{l}^0 gegen $\bar{l}_0^0 \sim \lambda_0^{-1}$ vernachlässigen. Für $1/G$ setzen wir wieder die Dichte der K -Elektronen aus Gl. (3.3) ein. Die Mit-

*) Siehe Anm. auf S. 542 und den der Formel (2.15) vorangehenden Satz.

telung über Polarisation und Ausbreitungsrichtung im Zähler gibt dann $|\vec{l}^0|^2 \approx 1/3$ für $(\sigma, l^0)^2$. Für $|\vec{l}^0|$ setzen wir grössenordnungsweise den reziproken Bohr'schen Radius $Z\lambda_0^{-1}/137$ ein. Dann erhält man

$$d \frac{dn^2}{dt} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{Z^3}{(137)^6} \frac{c\lambda^4}{\lambda_0^5} \left\{ \frac{(\omega - \nu)^2 \nu d\nu}{\omega_0^4} + \frac{2}{3} \left(\frac{Z}{137} \right)^2 \frac{(\omega - \nu)^2 (\omega_0 - \nu) \nu d\nu}{\omega_0^3 (\nu^2 + (2\tau)^{-2})} \right\} \quad (4.5)$$

Es bedeutet $\omega = (E_{\beta^-} + E_\nu - E_n)/h$ die obere Grenze des Spektrums und ω_0 ist gleich $mc^2/h = c\lambda_0^{-1}$.

Das Spektrum (4.5) besteht also aus einem *kontinuierlichen Teil* dessen Intensitätsverteilung ähnlich dem des kontinuierlichen β -Spektrums ist. Das Integral über dem zweiten Teil des Spektrums würde divergieren wenn $\tau = \infty$ gesetzt würde (vgl. dazu Fierz loc. cit.). Dieser Teil stellt daher ein Spektrum dar, dessen Maximum bei $\nu \sim 1/\tau$ d. h. bei Frequenzen der Grössenordnung der reziproken Halbwertszeit liegt. Es ist also etwa als „*Linienpektrum der Frequenz null*“ zu bezeichnen.

Die Integration über $d\nu$ von Null bis $\nu = \omega$ ergibt die reziproke Halbwertszeit des instabilen Atoms gegenüber dem γ - ν -Zerfall:

$$\frac{1}{\tau_{\gamma\nu}} = \frac{1}{24\pi^3} \frac{Z^3}{(137)^6} \frac{c\lambda^4}{\lambda_0^5} \left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 + 96 \left(\frac{Z}{137} \right)^2 \log \omega\tau \right\} \quad (4.6)$$

Die wirkliche Halbwertszeit τ ist

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_\nu} + \frac{1}{\tau_{\nu\gamma}} + \frac{1}{\tau_{\nu\gamma\gamma}} + \dots \quad (4.7)$$

Die $\tau_{\nu\gamma\gamma}$ etc. bedeuten die Halbwertszeiten gegenüber einem Zerfall, bei welchem mehr als ein Photon emittiert wird. Solange dann $\log \omega\tau < \pi^2 (137)^3/8 Z^2$ ist, gilt $(1/\tau_{\nu\gamma}) < (1/\tau_\nu)$ und die Reihe (4.7) konvergiert. Das heisst also:

Solange die Lebensdauer unter einer gewissen (im allgemeinen sehr hohen) oberen Grenze bleibt, konvergiert die Reihe (4.7): „Man erhält dann bei jedem $12\pi 137 \sim 4000$ sten Zerfall ein Photon im kontinuierlichen Spektrum“. Ist diese Bedingung nicht erfüllt so divergiert das Störungsverfahren.

5. Anhang. Algebraische Beziehungen.

Ist Φ^0 ein Spinor, welcher $H(\bar{l}^0)\Phi^0$ genügt und gleichzeitig ein Eigenwert der Matrix Δ ist (reiner Elektron- oder reiner Neutrinozustand), so folgt in bekannter Weise aus $H(\bar{l}^0)\Phi^0 = 0$ und $\Phi^{0+}H(\bar{l}^0) = 0$ durch Multiplikation mit $\Phi^{0+}\Gamma_i$ von links resp. mit $\Gamma_i\Phi^0$ von rechts und Addition:

$$\Phi^{0+}\Gamma_i\Phi^0 = \bar{l}_i^0 n^0 / \bar{l}_0^0 \quad \text{mit } n^0 = -i\Phi^{0+}\Gamma_4\Phi^0 \quad (5.1)$$

Zur Auswertung der Ausdrücke (2.17) und (4.2) benötigen wir noch folgende, aus den Vertauschungsrelationen (1.4) sich ergebende Relationen (a, b, c, l sind Vierervektoren):

$$(a, \Gamma)(b, \Gamma) + (b, \Gamma)(a, \Gamma) = -2(a, b) \quad (5.2)$$

$$(a, \Gamma)(b, \Gamma)(c, \Gamma) + (c, \Gamma)(b, \Gamma)(a, \Gamma) = -2(a, b)(c, \Gamma) - 2(b, c)(a, \Gamma) + 2(a, c)(b, \Gamma) \quad (5.3)$$

$$(a, \Gamma)(b, \Gamma)(c, \Gamma)(b, \Gamma)(a, \Gamma) = \{4(a, b)(b, c) - 2(a, c)(b, b)\}(a, \Gamma) + (a, a)(b, b)(c, \Gamma) - 2(a, a)(b, c)(b, \Gamma) \quad (5.4)$$

$$(a, \Gamma)K(l) = H(l)(a, \Gamma) + 2(a, l) \\ K(l)(a, \Gamma) = (a, \Gamma)H(l) + 2(a, l) \quad (5.6)$$

Folgende Relationen gelten nur, wenn die Komponenten a_i, b_i, \dots reell (d. h. die vierte a_4, b_4 imaginär) sind, und wenn δ überall null gesetzt wird:

$$(a, \Gamma)^+\Gamma_4 = \Gamma_4(a, \Gamma) \quad (5.7)$$

$$K(\bar{l})^+K(\bar{l}) = -2l_4\Gamma_4K(\bar{l}) \quad (5.8)$$

Ist ferner $f(\Gamma_i, \Delta)$ ein Operator, der nach Γ_i und Δ entwickelt werden kann (wie z. B. $R(l)^{-1}$), so gilt

$$\left. \begin{aligned} f(\Gamma_i, \Delta)\Omega &= f(\Gamma_i, \mu)\Omega \\ f(\Gamma_i, \Delta)\Omega^+ &= f(\Gamma_i, 1)\Omega^+ \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \Omega^+ f(\Gamma_i, \Delta)\Omega &= f(\Gamma_i, \mu)A \\ \Omega f(\Gamma_i, \Delta)\Omega^+ &= f(\Gamma_i, 1)A' \\ A f(\Gamma_i, \Delta)A &= f(\Gamma_i, 1)A \\ A' f(\Gamma_i, \Delta)A' &= f(\Gamma_i, \mu)A' \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Führt man noch $H^1(l), H^\mu(l), K^1(l), K^\mu(l), R^1(l), R^\mu(l)$ als diejenigen Operatoren H, K und R ein, in welchen Δ durch 1 resp. durch μ ersetzt wurde, so lautet die geschweifte Klammer von (2.17) unter Berücksichtigung von (5.10) erste Gleichung und von $\Delta\Phi^0 = \Phi^0$ nach Verwendung der Relation (5.6)

$$\{\dots\} = 2l_4\Phi^{0+}\{-\varepsilon, \varepsilon\}H^\mu(\bar{l}) + 2(\varepsilon, \bar{l})(\varepsilon, \Gamma)\}\Phi^0 \quad (5.11)$$

Setzt man nun $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ und $\varepsilon_4 = i$ und mittelt über die Richtung von \bar{l} , so folgt für (5.11) das ja linear in Γ ist wegen (5.1) der Wert $\{\dots\} = 2il_0^2$ und damit (2.18), wenn die Neutrinomasse $\mu m = 0$ gesetzt wird.

Für die geschweifte Klammer in (4.2) folgt in gleicher Weise

$$\frac{2 l_4}{R^1 (RE (\bar{l}^0 - k))^2} \Phi^{0+} \left\{ \begin{matrix} (1) \\ (k, \Gamma) (\sigma, \Gamma) - 2 (\bar{l}^0, \sigma) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} (1) \\ - (\varepsilon; \varepsilon) (\bar{l}, \Gamma) + 2 (\varepsilon, \bar{l}) (\varepsilon, \Gamma) \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} (1) \\ (\sigma, \Gamma) (k, \Gamma) - 2 (\bar{l}^0, \sigma) \end{matrix} \right\} \Phi^0 \quad (5.12)$$

Dabei wurde δ im Zähler vernachlässigt.

Im Nenner bedeutet $RE (\bar{l}^0 - k)$ den Realteil (resp. den Imaginäranteil der vierten Komponente) des Vektors $\bar{l}^0 - k$. Wegen der Definition von R in (2.3) folgt (bis auf Glieder in δ^2), weil ja $(RE \bar{l}_0^0)^2 = |\vec{l}|^2 + \lambda_0^{-2}$ ist:

$$R^1 (RE (\bar{l}^0 - k)) = -2 \left\{ (k, \bar{l}^0) + i \delta \bar{l}_0^0 \right\} \quad (5.13)$$

Der zwischen Φ^{0+} und Φ stehende Operator lässt sich wieder linearisieren. Er hat 8 Terme (1) (1) (1), (1) (1) (2)* usw. (1) (1) (1) und (1) (2) (1) lassen sich mit der Beziehung (5.4) auf eine in Γ lineare Form bringen. (1) (1) (2) + (2) (1) (1) und (1) (2) (2) + (2) (2) (1) werden durch Verwendung von (5.3) linear und (2) (1) (2) + (2) (2) (2) sind bereits linear. Berücksichtigt man wieder, dass $\varepsilon_4 = i$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ und dass $(\varepsilon, \sigma) = 0$ ist und mittelt über die Richtungen von \vec{l} so folgt wegen (5.1) mit $\mu = 0$:

$$\left\{ \dots \right\} = \frac{i \bar{l}_0^0 \left\{ - (k, \bar{l}^0) k_0 + 2 (\bar{l}^0, \sigma)^2 (l_0^0 - k_0) \right\}}{\bar{l}_0^0 \left\{ (\bar{l}^0, k)^2 + \delta^2 \bar{l}_0^0{}^2 \right\}} \quad (5.13)$$

Die Störungstheorie ist relativistisch invariant, da auch ohne die spezielle Annahme über ε (und auch ohne Mittelung) in Γ lineare und somit wegen (5.1) Γ und Φ^0 freie Ausdrücke entstehen. Die Eichinvarianz ist natürlich nicht vorhanden, da die relativistisch invariante Bedingung $(\sigma, \varepsilon) = 0$ immer erfüllt sein muss.

In dieser Ableitung wurde davon Gebrauch gemacht, dass alle vorkommenden Vektoren reell sind. Ist dies nicht der Fall, so ist die Linearisierung nicht mehr möglich. Γ und Φ^0 freie Ausdrücke die den obigen vollkommen analog sind, folgen dann erst nach Mittelung über die Spinrichtungen des Anfangszustandes Φ^0 . Nach Mittelung über die Polarisationsrichtungen folgen aber wieder dieselben Formeln. Eine nähere Diskussion dieser, für die Polarisationserscheinung der Spinpartikel wichtigen Eigenschaften der Erwartungswerte folgt an anderer Stelle¹³⁾.

Institut de Physique, Université de Genève.

Literatur.

- 1) E. C. G. STUECKELBERG, Nature **137**, 1070 (1936), C. R. de la Soc. de Phys. et Sci. Nat. Genève **53**, 64 (1936).
- 2) E. FERMI, Zs. f. Phys. **88**, 161 (1934).
- 3) M. FIERZ, Helv. Physica Acta **9**, 245 (1936).
- 4) F. BLOCH und CH. MOLLER, Nature **136**, 911 (1935). J. K. KNIPP und E. UHLENBECK, Physica **3**, 425 (1936). F. BLOCH, Phys. Rev. **50**, 272 (1936).
- 5) G. WENTZEL, Natw. **23**, 35 (1935). G. RUMER, Sow. Phys. **9**, 317 (1936).
- 6) H. A. BETHE und R. F. BACHER, Rev. Mod. Phys. **8**, 82 (1936).

*) Die eingeklammerten Ziffern beziehen sich auf die Nummerierung der Summanden in den drei Faktoren von (5.12).

⁷⁾ E. C. G. STUECKELBERG, Ann. d. Phys. **21**, 367 (1934) (im folgenden mit J. S. bezeichnet) vgl. ferner Helv. Phys. Acta **8**, 197 (1935) (Comptoneffekt) und Helv. Physica Acta **8**, 326 (1935) (Paarerzeugung durch zwei Teilchen).

⁸⁾ E. C. G. STUECKELBERG, Helv. Physica Acta **9**, 389 (1936) (im folgenden mit I bezeichnet).

⁹⁾ W. HEISENBERG, Vortrag am Atomphysikkongress in Kopenhagen, Juni 1936 (vgl. Nature **138**, 42 (1936). Zs. f. Phys. **101**, 533 (1936).

¹⁰⁾ Vgl. Handbuch der Physik (GEIGER und SCHEEL) Bd. XXIV. 2. Aufl. Artikel von G. WENTZEL.

¹¹⁾ Nach einer Diskussionsbemerkung von W. PAULI im Zürcher Colloquium, Mai 1936.

¹²⁾ G. BREIT und J. A. WHEELER, Phys. Rev. **46**, 1087 (1934).

¹³⁾ Eine ausführliche Darstellung über die hierzu benötigten algebraischen Eigenschaften der Diracschen Operatoren γ_i wird z. Zt. im hiesigen Institut von Herrn Dr. G. WANNIER fertiggestellt und erscheint in den Archives de Genève.
