Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 9 (1936)
Heft: VII

Artikel: Die Beleuchtung der Atmosphäre
Autor: Gruner, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110650

Die Beleuchtung der Atmosphäre

von **P. Gruner.**

(5. IX. 36.)

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich versucht, eine Formel aufzustellen, die es ermöglicht, in einer gewissen Annäherung die Beleuchtung der Atmosphäre durch die Sonne zu berechnen, sofern die Sonne unterhalb des Horizontes des Beobachters steht. Seither sind verschiedene einfachere Formeln[2]) für beliebige Sonnenhöhe gegeben worden, die aber mit ebenen, statt mit gekrümmten atmosphärischen Schichten rechnen, also eine Annäherung bedeuten, die jedenfalls bei tiefem Sonnenstande nicht mehr zulässig ist. Im folgenden wird nun versucht, einen Zwischenweg einzuschlagen.

Es mögen die Sonnenstrahlen als (monochromatisches) unpolarisiertes Parallelstrahlenbündel mit einer Intensität J_0, unter einer Zenitdistanz $Z = 90^0 - \delta$, die Atmosphäre treffen. Ein Beobachter B (bzw. B') blicke im Sonnenvertikal unter einer Zenitdistanz $\xi = 90^0 - \varepsilon$ nach dem Himmel (wobei die atmosphärische Refraktion nicht berücksichtigt wird); der Streuwinkel des Sonnenlichtes in die Blickrichtung sei $\varphi = Z - \xi = \varepsilon - \delta$. Folgende geometrische Beziehungen ergeben sich aus Fig. 1, wenn R der Erdradius, H (in km) die Grenzhöhe der Atmosphäre ist:

$$\left.\begin{aligned} BS_0 &= S = \sqrt{2\,RH + H^2 + R^2 \sin^2 \delta} - |R \sin \delta|\,; \\ BT &= L = \sqrt{2\,RH + H^2 + R^2 \sin^2 \varepsilon} - R \sin \varepsilon\,; \\ NC &= \varrho = R(1 - \cos \delta)\,;\ BC = \sigma = |R \sin \delta|\,; \\ BN &= b = 2\,R \sin \delta/2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

---

[1]) Helv. Phys. Acta **5**, 145, 1932. In diese Arbeit hat sich ein Irrtum eingeschlichen: S. 150, Zeile 9 von unten ergibt das Integral: $-\,n_0 \dfrac{L}{\lambda H}\left(e^{-\lambda h} - 1\right)$, und dem entsprechend kommt in die Schlussformel S. 152 noch der Faktor $e^{-K_0 \frac{L}{\lambda H}}$ hinzu; entsprechend ist der Wert für A zu erweitern; numerische Berechnungen mit der korrigierten Formel werden demnächst veröffentlicht.

[2]) R. Knepple, Gerl. Beitr. Geophys. **43**, 247, 1934; C. W. Allen, Gerl. Beitr. Geophys. **46**, 32, 1935.

Die Atmosphäre sei in konzentrischen, homogenen Schichten angeordnet, deren Dichte bzw. Molekülzahl n pro cm^3 mit der Höhe abnimmt; es sei in der Höhe η: $n = n_0 f(\eta)$; $\int f(\eta)\, d\eta = F(\eta)$, wobei $f(0) = 1$, $f(H) = F(H) = 0$. Für die wirklichen Berechnungen wird $f(\eta) = e^{-\beta\eta}$, $F(\eta) = -1/\beta\, e^{-\beta\eta}$ vorausgesetzt, wobei jedenfalls $\beta H \geqslant 10$ sein muss.

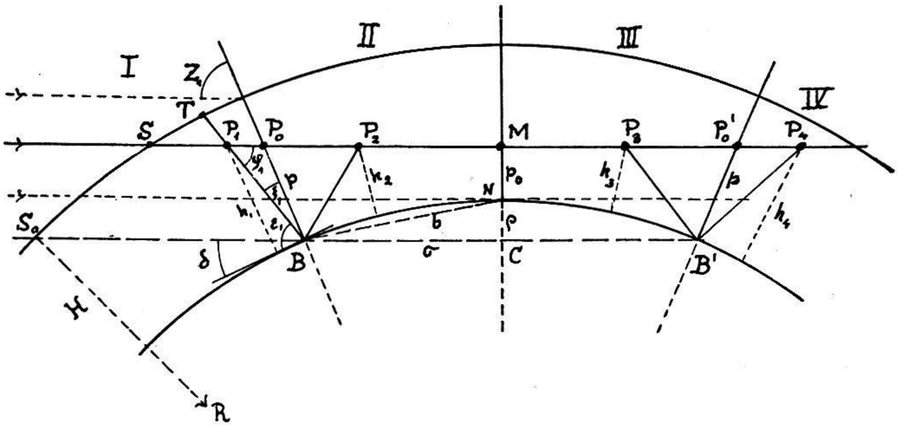

Fig. 1.

Sei $\Gamma(\varphi)$ der Zerstreuungskoeffizient *eines* Moleküls, $K = K_0 f(\eta)$ der Auslöschungskoeffizient (pro 1 km) in der Höhe η, so erscheint die anvisierte Himmelszone, bei blosser Berücksichtigung der primären Diffusion und Extinktion, mit der Beleuchtungsintensität

$$J = J_0 \Gamma \int_{Lu}^{L} n\, e^{-K_0 \int_B^P f(\eta)\, dl}\, e^{-K_0 \int_P^S f(\eta)\, ds}\, dl \tag{2}$$

worin L_u die untere Grenze des noch beleuchteten Sehstrahles angibt (s. Fig. 2).

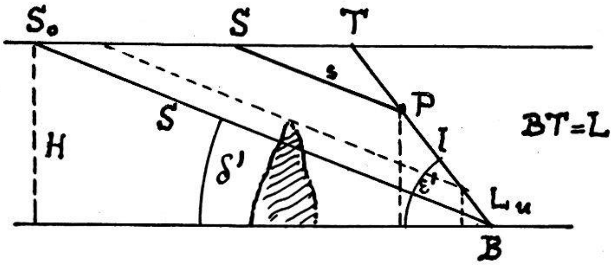

Fig. 2.

Die grösste Annäherung zur Berechnung von J erhält man, wenn die atmosphärischen Schichten als eben angenommen werden. Es ist dann zweckmässig, die Grössen $BS_0 = S$ und $BT = L$ für gegebene ε und δ nach den obigen Formeln (1) richtig zu berechnen, diese Werte (s. Fig. 2) von B aus bis zur Grenzebene in der Höhe H heraufzuklappen und dann mit den veränderten Winkeln ε' und δ' zu rechnen, wobei

$$\sin \varepsilon' = \frac{H}{L} \quad \text{und} \quad \sin \delta' = \frac{H}{S} \tag{3}$$

wird. Die Exponenten im Ausdruck (2) für J werden dann:

$$K_0 \int_B^P f(\eta)\, dl = \frac{K_0}{\sin \varepsilon'} \{F(h) - F(0)\} \tag{4}$$

$$K_0 \int_P^S f(\eta)\, ds = -\frac{K_0}{\sin \delta'} \{F(h)\}, \quad \text{da} \quad F(H) = 0. \tag{5}$$

Daraus ergibt sich, unter Benützung des Ausdrucks

$$D = \frac{\sin \delta'}{\sin \varepsilon' - \sin \delta'} = \frac{L}{S - L} \tag{6}$$

$$J = J_0 \frac{\Gamma n_0}{K_0} D e^{K_0 \frac{L}{H} F(0)} \left\{1 - e^{K_0 \frac{L}{HD} (H_u)}\right\}, \tag{7}$$

worin $H_u = L_u \sin \varepsilon'$. Spezialisiert für

$$F(\eta) = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta \eta}, \qquad \text{wobei} \qquad K_0 F(H_u) = -\frac{K_u}{\beta},$$

folgt:

$$\underline{J = J_0 \frac{\Gamma n_0}{K_0} D e^{-\frac{K_0}{H\beta} L} \left\{1 - e^{-\frac{K_u}{H\beta}(S-L)}\right\}}. \tag{8}$$

Diese Berechnung, die den Ausdrücken von C. W. Allen (l. c.) entspricht, wird für flache Winkel ε und δ ungenau, für negative δ ist sie unbrauchbar. Um sie doch verwenden zu können, muss die Krümmung der Schichten in irgend einer Form berücksichtigt werden. Wir zerlegen die von der Sonne beleuchtete Atmosphäre (im Sonnenvertikal) in 4 einzelne Gebiete, von denen jedes für sich aus ebenen Schichten besteht, so dass jedes Gebiet gegen das nächste geknickt ist (s. Fig. 1 und 3).

Für die Exponenten im Ausdruck (2) ist die Formel (4) nach wie vor unverändert zu verwenden, aber in (3) ist:

$$\text{Exp} = K_0 \int_P^S f(\eta)\, ds = \frac{K_0}{\sin \delta''} \{F(S) - F(P)\}$$

passend zu zerlegen in die verschiedenen Integrationsstrecken: $S \to P_1 \to P_0$; $P_0 \to P_2 \to M$; $M \to P_3 \to P_0'$; $P_0' \to P_4$, wobei jedesmal ein anderes, passendes $\sin \delta''$, mit richtigem Vorzeichen, zu finden ist.

Zum bisherigen $\sin \delta' = H/S$ in den Gebieten I und IV kommt für die Gebiete II und III hinzu

$$\sin \delta_0 = \frac{\varrho}{b}. \tag{3a}$$

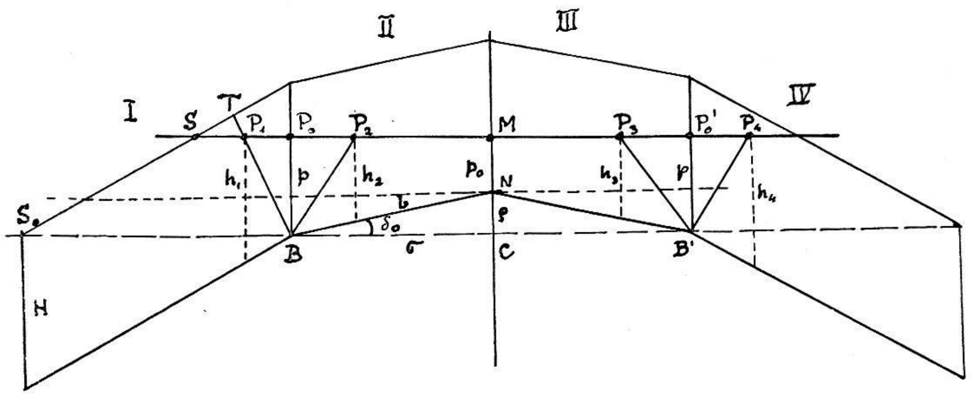

Fig. 3.

So findet man für diesen Exponenten (5) für einen im Gebiet I anvisierten Punkt P_1:

$$\mathrm{Exp}_1 = -\frac{K_0}{\sin \delta'} F(h_1),$$

ebenso im Gebiet II für P_2:

$$\mathrm{Exp}_2 = -\frac{K_0}{\sin \delta_0} F(h_2).$$

Für die Punkte P_3 und P_4 im Gebiet III und IV nehme man zunächst die ganze Strecke $S \to P_0 \to M \to P_0'$ und füge dann hinzu: für P_3 die negativ gezählte Strecke $P_0' P_3$, für P_4 die positiv gezählte Strecke $P_0' P_4$.

Von P_0 bis P_0' folgt

$$2 \int_M^{P_0'} f(\eta)\, ds = \frac{2}{\sin \delta_0} \{F(p) - F(p_0)\} = 2\, BG(p, p_0)$$

gesetzt. Daraus ergibt sich für P_3 in III:

$$\mathrm{Exp}_3 = -K_0 \left\{ \frac{1}{\sin \delta'} F(p) + 2\, BG + \frac{1}{\sin \delta_0} (F(p) - F(h_3)) \right\}$$

und für P_4 in IV:

$$\mathrm{Exp}_4 = -K_0 \left\{ \frac{2}{\sin \delta'} F(p) + 2\,BG - \frac{1}{\sin \delta'} F(h_4) \right\}$$

Für die weitere Rechnung muss $F(\eta) = -1/\beta\, e^{-\beta \eta}$ eingeführt werden. Ferner ist zu beachten, dass $\varrho = p - p_0$ sehr klein angenommen werden kann; dann ergibt die Reihenentwicklung für BG den Wert $b \cdot e^{-\beta p}$ und es wird:

$$\mathrm{Exp}_1 = + \frac{K_0}{\beta \sin \delta'} e^{-\beta h_1}$$

$$\mathrm{Exp}_2 = + \frac{K_0}{\beta \sin \delta_0} e^{-\beta h_2}$$

$$\mathrm{Exp}_3 = + \frac{K_0}{\beta} \left\{ \left(\frac{1}{\sin \delta'} + \frac{1}{\sin \delta_0} + 2\,b\,\beta \right) e^{-\beta p} - \frac{1}{\sin \delta_0} e^{-\beta h_3} \right\}$$

$$\mathrm{Exp}_4 = + \frac{K_0}{\beta} \left\{ 2 \left(\frac{1}{\sin \delta'} + b\,\beta \right) e^{-\beta p} - \frac{1}{\sin \delta'} e^{-\beta h_4} \right\}$$

Die grosse Schwierigkeit liegt nun in der nicht ganz einfachen Abhängigkeit der Grösse p von h! Soll der Ausdruck (3) ohne weiteres integrabel werden, so *muss* man $p = h \pm$ Konstante einführen. Das bedeutet natürlich eine sehr grobe Annäherung, ist aber der einzig gangbare Weg. So setzen wir in Exp_3: $p = h_3 + \varrho$, in Exp_4 $p = h_4 - \varrho$ (es könnte ϱ noch mit einem willkürlichen Bruchfaktor, der eine Funktion von ε sein könnte, versehen werden, aber es bestehen dann keine Anhaltspunkte, um denselben festzulegen).

Dann lässt sich allgemein setzen:

$$\mathrm{Exp} = \frac{K_0}{\beta \sin \delta''} e^{-\beta h},$$

wobei für die Gebiete I bzw. II: $\delta'' = \delta'$ bzw. δ_0 wird, und für die Gebiete III und IV zu setzen ist:

$$\frac{1}{\sin \delta''} = \frac{1}{\sin \delta_3} = \left(\frac{1}{\sin \delta'} + \frac{1}{\sin \delta_0} + 2\,b\,\beta \right) e^{-\beta \varrho} - \frac{1}{\sin \delta_0}$$

$$\frac{1}{\sin \delta''} = \frac{1}{\sin \delta_4} = 2 \left(\frac{1}{\sin \delta'} + b\,\beta \right) e^{+\beta \varrho} - \frac{1}{\sin \delta'}.$$

In der auch jetzt gültigen Schlussformel (8) für J ist dann der Ausdruck (6) für jedes Gebiet besonders zu berechnen:

$$D = \frac{\sin \delta''}{\sin \varepsilon' - \sin \delta''} = \frac{L}{S - L};$$

für L ist nach wie vor die Formel (1) zu verwenden, aber S wird in jedem Gebiet anders:

$$S_{\mathrm{I}} = S \text{ (s. Formel (1))}$$

$$S_{\mathrm{II}} = H \frac{b}{\varrho} \text{ *)}$$

$$S_{\mathrm{III}} = H \left\{ \left(\frac{S_{\mathrm{I}}}{H} + \frac{b}{\varrho} + 2 b \beta \right) e^{-\beta \varrho} - \frac{b}{\varrho} \right\}$$

$$S_{\mathrm{IV}} = H \left\{ 2 \left(\frac{S_{\mathrm{I}}}{H} + b \beta \right) e^{+\beta \varrho} - \frac{S_{\mathrm{I}}}{H} \right\}.$$

Ist auch hier $\beta \varrho$ als hinreichend klein anzunehmen, so wird $S_{\mathrm{III}} = S_{\mathrm{IV}} = S_{\mathrm{I}} + 2 b \beta H$. Ist dies nicht zulässig, so ist schon in der Reihentwicklung für BG ein genauerer Wert

$$= \frac{b}{\beta \varrho} e^{-\beta p} (1 - e^{\beta \varrho})$$

einzuführen, doch scheint dies gegenüber den andern, gröberen Annäherungen keine Rolle zu spielen.

Numerische Berechnungen werden später mitgeteilt werden.

Bern, Physikalisches Institut
(theoret. Abteilung) der Universität.

---

*) *Anmerkung bei der Korrektur:* Um einen stetigen Übergang von S_{I} nach S_{II} zu erhalten, muss der Ausdruck S_{II} noch in gleicher Weise wie S_{III} erweitert werden.