

# Réflexions simultanées des rayons X et excitation indirecte

Autor(en): **Blanc, Madeleine / Weigle, Jean**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **10 (1937)**

Heft VI

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-110760>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Réflexions simultanées des rayons X et excitation indirecte

par Madeleine Blanc et Jean Weigle.

(24. XI. 37.)

Les réflexions simultanées des rayons X par plusieurs plans réticulaires d'un cristal ont été étudiées récemment<sup>1) 2) 3)</sup> et elles ont mis en évidence un phénomène qui jusqu'ici n'avait pas été imaginé, et auquel EWALD a donné le nom d'excitation détournée ou indirecte.

Le principe de ce phénomène concerne la transmission d'énergie d'une onde à une autre parmi les ondes possibles se propageant dans le cristal. La théorie dynamique d'EWALD montre très clairement que lorsque deux ondes seulement peuvent se propager dans un cristal (réflexion simple), il y a un échange d'énergie continuuel entre elles. Les deux ondes sont couplées et la transmission d'énergie se fait par réflexion sur un plan réticulaire du cristal. Si l'excitation des ondes est produite par une onde extérieure tombant sur le cristal, on pourra décrire le phénomène en disant que l'onde incidente de vecteur  $\vec{k}_0$  se réfléchit sur le plan réticulaire que nous appellerons  $m$  pour donner l'onde  $\vec{k}_m$ . Celle-ci se réfléchissant à son tour sur le plan  $-m$  redonne de l'énergie à  $\vec{k}_0$ . Il y a donc continuellement passage d'énergie d'une onde à l'autre. Lorsque le cristal absorbe les rayons X, les facteurs de structure des plans  $m$  et  $-m$  ne sont plus égaux, ce qui fait qu'un équilibre ne peut plus s'établir entre les énergies des deux ondes.

Les échanges sont plus compliqués lors des réflexions simultanées et pour la suite nous ne considérerons que le cas le plus simple de ces réflexions, en admettant que trois ondes seulement se propagent dans le cristal. Lorsque deux plans d'indices de Miller  $m$  ( $m_1 m_2 m_3$ ) et  $p$  ( $p_1 p_2 p_3$ ) réfléchissent simultanément les rayons X la géométrie du cristal introduit automatiquement un troisième plan d'indices  $m - p$  sur lequel la réflexion des ondes  $\vec{k}_p$  et  $\vec{k}_m$  peut avoir lieu pour la longueur d'onde considérée. Les

1) RENNINGER, Zeit. f. Phys. **106**, 141, 1937.

2) WEIGLE et MÜHSAM, Helv. Phys. Acta **10**, 139, 1937.

3) CAUCHOIS, HULUBEI et WEIGLE, Helv. Phys. Acta **10**, 218, 1937.

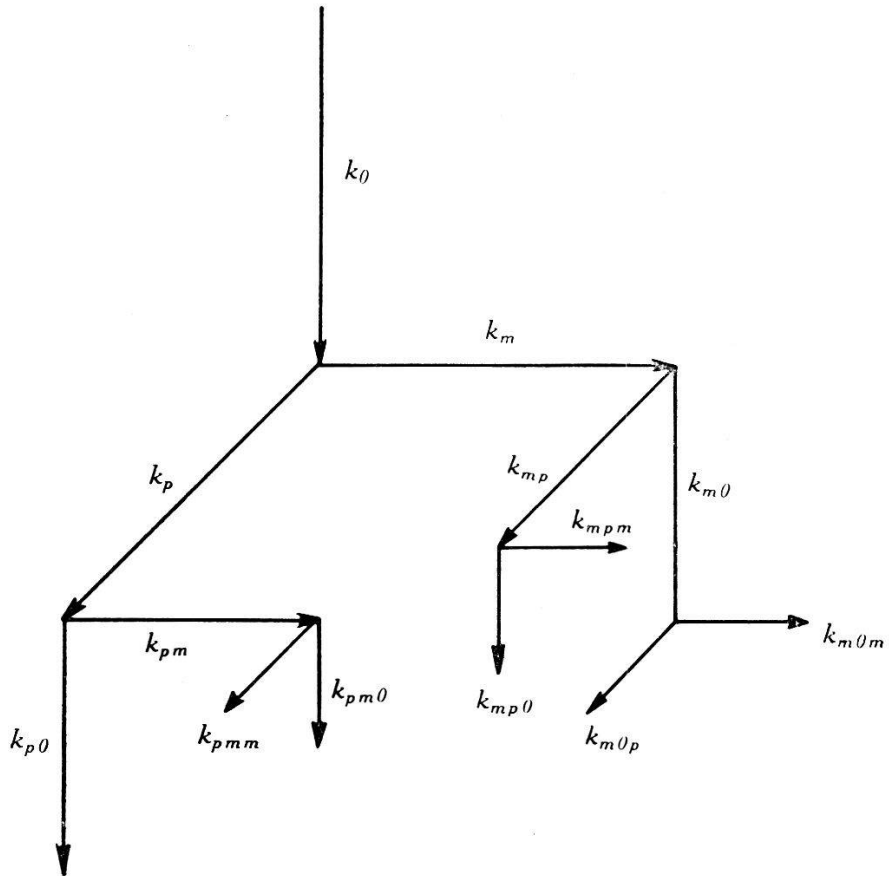


Fig. 1a.

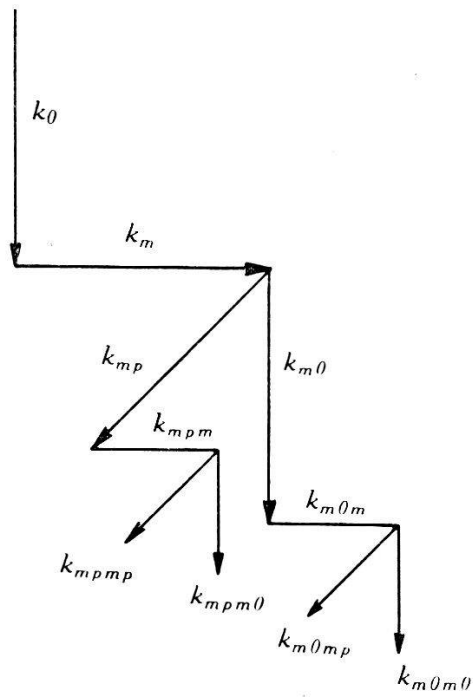


Fig. 1b.

échanges d'énergie se font alors de la façon suivante (figure 1a). L'onde  $\vec{k}_0$  donne, se réfléchissant sur les plans  $m$  et  $p$ , les ondes  $\vec{k}_m$  et  $\vec{k}_p$ .  $\vec{k}_m$  se réfléchissant sur  $-m$  redonne de l'énergie à  $\vec{k}_0$  et sur  $(p-m)$  donne une onde  $\vec{k}_p$  se propageant comme si elle provenait directement de  $\vec{k}_0$  par réflexion sur  $p$ . L'onde  $\vec{k}_p$  elle, se réfléchissant sur  $-p$ , redonne de l'énergie à  $\vec{k}_0$ , tandis que se réfléchissant sur  $(m-p)$  elle en donne à  $\vec{k}_m$ .

On voit donc que l'énergie s'écoulant dans les trois directions  $\vec{k}_0$ ,  $\vec{k}_m$  et  $\vec{k}_p$  a en partie passé par des chemins indirects. Cette excitation indirecte a comme effet de changer le pouvoir réflecteur apparent des différents plans réticulaires entrant en jeu. Dans certains cas, ce pouvoir devient plus petit lors de la réflexion simultanée produisant dans un spectre continu l'apparition de raies blanches que nous appellerons des raies de soustraction. Ce sont ces raies qui ont été considérées spécialement dans le travail de WEIGLE et MÜHSAM (loc. cit.). Dans d'autres cas, au contraire, le pouvoir de réflexion apparent est augmenté par la réflexion simultanée et il apparaît dans le spectre continu des raies noires, raies d'addition que RENNINGER (loc. cit.) et CAUCHOIS, HULUBEI et WEIGLE (loc. cit.) ont décrites.

Nous nous sommes proposé, dans ce travail, d'étudier théoriquement un cas particulièrement typique de la réflexion simultanée mettant bien en évidence le phénomène de l'excitation indirecte. Nous avons supposé que le facteur de structure du plan  $p$  était nul et que, par conséquent, il ne se produisait pas de réflexion soit sur  $p$  soit sur  $-p$ . L'écoulement de l'énergie se fait alors par le chemin schématisé dans la figure 1b. Comme on le voit, il y a malgré cela une onde  $\vec{k}_p$  se propageant comme si elle était née de la réflexion directe de  $\vec{k}_0$  sur le plan  $p$ , alors qu'en réalité elle est produite par l'excitation indirecte de  $\vec{k}_m$  se réfléchissant sur le plan  $(p-m)$ . Le pouvoir réflecteur de  $p$ , qui était nul en l'absence de la réflexion simultanée sur  $m$ , prend alors une valeur qui peut être grande. Une raie d'addition sera donc produite.

Nous étudions dans ce qui suit l'intensité et la largeur de cette raie lorsque son énergie est empruntée au spectre continu tombant sur le cristal sous différents angles d'incidence.

Supposons pour simplifier les calculs

- 1) que la réflexion simultanée est coplanaire, c'est-à-dire que les vecteurs des ondes  $\vec{k}_0$ ,  $\vec{k}_m$  et  $\vec{k}_p$  sont dans un même plan,
- 2) que le cristal n'est pas absorbant.

On sait que les équations générales<sup>1)</sup> du problème sont les suivantes :

Le champ d'ondes possibles à l'intérieur du cristal est donné par le vecteur  $\vec{D}$  du déplacement électrique

$$\vec{D} = e^{-2\pi i \nu t} \sum_j \vec{D}_j e^{2\pi i (\vec{k}_j \cdot \vec{r})} \quad (1)$$

$\nu$  étant la fréquence des ondes considérées et

$$\vec{k}_j = \vec{k}_0 + \vec{b}_j \quad (2)$$

étant le vecteur d'onde de l'onde  $j$ ,  $\vec{b}_j$  étant un vecteur du réseau réciproque.

Si la constante diélectrique du cristal est  $\eta$ , on peut écrire :

$$\psi = 1 - \frac{1}{\eta} = \sum_m \psi_m e^{2\pi i (\vec{b}_m \cdot \vec{r})} \quad \psi_m = \psi_{-m}^* \quad (\text{cristal non absorbant}).$$

Car  $\psi$  est comme  $\eta$  périodique avec les périodicités du réseau. On sait que  $\psi_m$  est alors le facteur de structure du plan  $m$ . Pour que (1) soit une solution des équations de Maxwell, il faut que les  $\vec{D}_j$  satisfassent aux équations de récurrence

$$\frac{k_j^2 - k^2}{k_j^2} \vec{D}_j = \sum_l \psi_{j-l} \vec{D}_{l \perp k_j}. \quad (3)$$

Dans le cas que nous considérons ici, nous admettrons que seules trois ondes  $D_0$ ,  $D_p$  et  $D_m$  ont une intensité non négligeable et nous poserons en plus

$$k_j = k (1 + \varepsilon_j) \quad k = \frac{\nu}{c} \quad \varepsilon_j \ll 1 \quad (4)$$

$c$  étant la vitesse de la lumière dans le vide.

D'autre part, nous décomposerons les ondes en deux polarisations, l'une  $D''$  dans le plan des vecteurs  $\vec{k}_0 \vec{k}_m \vec{k}_p$ , l'autre  $D'$  perpendiculaire à ce plan. Les équations (3) se décomposent à leur tour en deux systèmes d'équations :

$$\left. \begin{aligned} (\psi_0 - 2\varepsilon_0) D_0' + \psi_{-p} D_p' + \psi_{-m} D_m' &= 0 \\ \psi_p D_0' + (\psi_0 - 2\varepsilon_p) D_p' + \psi_{p-m} D_m' &= 0 \\ \psi_m D_0' + \psi_{m-p} D_p' + (\psi_0 - 2\varepsilon_m) D_m' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

et

$$\left. \begin{aligned} (\psi_0 - 2\varepsilon_0) D_0'' + \psi_{-p} \cos 2\Theta_p D_p'' + \psi_{-m} \cos 2\Theta_m D_m'' &= 0 \\ \psi_p \cos 2\Theta_p D_0'' + (\psi_0 - 2\varepsilon_p) D_p'' + \psi_{p-m} \cos 2(\Theta_p + \Theta_m) D_m'' &= 0 \\ \psi_m \cos 2\Theta_m D_0'' + \psi_{m-p} \cos 2(\Theta_p + \Theta_m) D_p'' + (\psi_0 - 2\varepsilon_m) D_m'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

<sup>1)</sup> LAUE, *Ergeb. der Exakt. Naturw.*, p. 133, 1931.

où  $\Theta_p$  et  $\Theta_m$  sont les angles de Bragg pour les plans  $p$  et  $m$  respectivement. On voit dans ces équations s'introduire les facteurs de structure de tous les plans prenant part au phénomène que nous avons décrit de façon détaillée ci-dessus.

Posons maintenant que la réflexion ne peut se faire sur le plan  $p$ , et supposons en plus que le facteur de structure est le même pour tous les autres plans et égal à  $\psi_0$ . On a donc

$$\psi_p = 0 \quad | \psi_m | = | \psi_{p-\bar{m}} | = \psi_0 = \psi$$

Puis, pour simplifier les calculs, choisissons  $2\Theta_p = 45^\circ$  et  $2\Theta_m = 90^\circ$ . Les équations (5) et (6) deviennent alors, en écrivant  $\omega_j = \varepsilon_j/\psi$ :

$$\left. \begin{aligned} (1 - 2\omega_0) D_0' + D_m' &= 0 \\ (1 - 2\omega_p) D_p' + D_m' &= 0 \\ D_0' + D_p' + (1 - 2\omega_m) D_m' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

et

$$\left. \begin{aligned} (1 - 2\omega_0) D_0'' &= 0 \\ (1 - 2\omega_p) D_p'' - \frac{\sqrt{2}}{2} D_m'' &= 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} D_p'' + (1 - 2\omega_m) D_m'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Nous étudierons alors séparément les deux polarisations.

#### A. Polarisation normale (équations (7)).

Pour que les équations (7) linéaires et homogènes pour les  $D$  soient compatibles, il faut que le déterminant des coefficients soit nul:

$$\begin{vmatrix} 1 - 2\omega_0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 - 2\omega_p & 1 \\ 1 & 1 & 1 - 2\omega_m \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne:

$$8\omega_0\omega_m\omega_p - 4(\omega_0\omega_p + \omega_0\omega_m + \omega_m\omega_p) + 2\omega_m + 1 = 0. \quad (9)$$

On peut montrer facilement que  $\omega_m$  et  $\omega_p$  sont des fonctions linéaires de  $\omega_0$  et par conséquent (9) est une équation du troisième degré en  $\omega_0$  donnant trois solutions et donc, pour une orientation donnée, trois valeurs de  $k_0$ , que nous écrirons  $k_0^1$ ,  $k_0^2$  et  $k_0^3$ . Grâce à (2), les vecteurs d'ondes  $k_m$  et  $k_p$  (triples eux aussi) sont alors connus. Lorsque l'orientation de  $k_0$  varie légèrement, les vecteurs  $k_0^1$ ,  $k_0^2$ ,  $k_0^3$  décrivent une surface à trois nappes à laquelle EWALD a donné le nom de surface de dispersion.

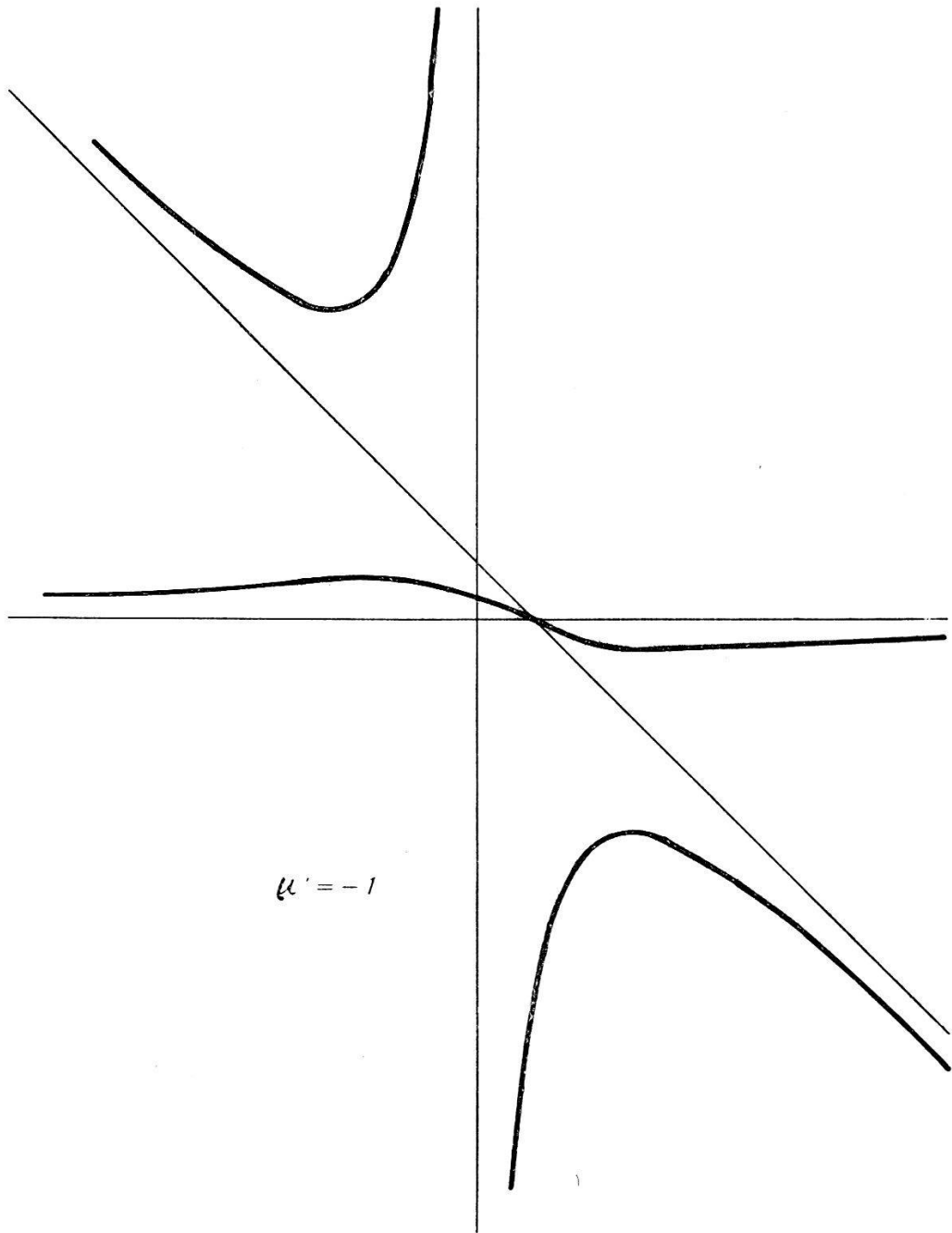


Figure 2.

Courbes de dispersion pour quelques fréquences  $\mu' = \frac{\mu}{k\psi} (1 + \cotg \Theta_p)$   $\mu$  étant l'angle qu'il faut ajouter à  $\Theta_p$  pour que la nouvelle longueur d'onde satisfasse à la relation  $2 d_p \sin(\Theta_p + \mu) = \lambda$ . Les trois branches correspondent aux trois racines de l'équation (9); elles ont pour asymptotes les cercles de rayon  $k(1 + \psi_0/2)$  tracés à partir des points  $O$ ,  $P$  et  $M$  du réseau réciproque. (Ces cercles dans la figure ont dégénéré en droites). Pour les fréquences voisines de  $\mu' = 0$ , la présence du plan  $m$  écarte des courbes de dispersion de leurs asymptotes dans la région de réflexion sur  $p$ . A mesure que  $|\mu'|$  augmente, les courbes de dispersion se rapprochent de leurs asymptotes et l'intensité dans la direction  $p$  tombe à zéro.

Au lieu de résoudre algébriquement l'équation (9), nous procéderons graphiquement en traçant dans le plan  $k_0 k_m k_p$  qui seul nous intéresse ici les intersections des surfaces de dispersion avec ce plan. Nous pourrons alors mesurer directement sur les courbes

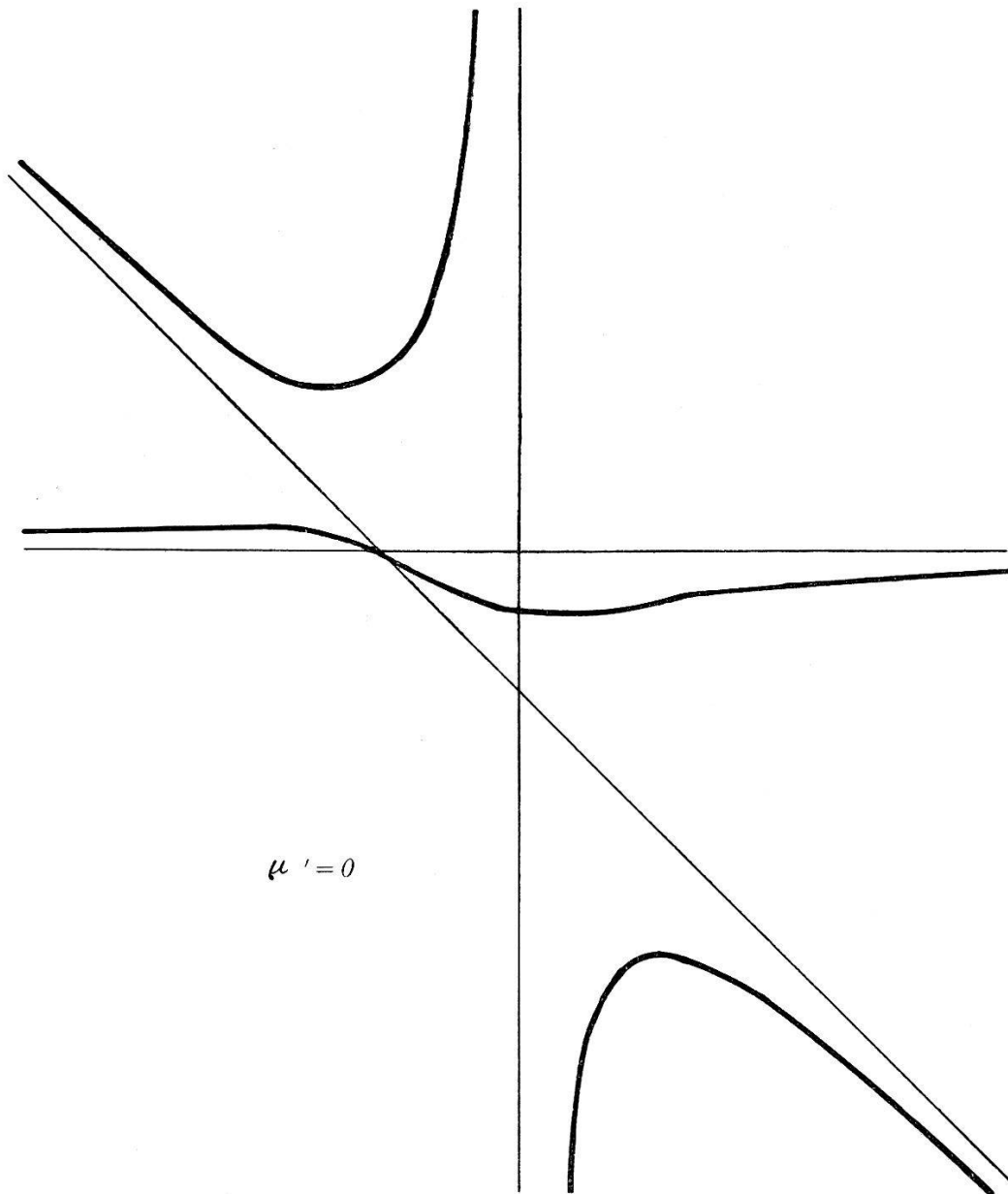


Fig. 2b.

les valeurs de  $\omega_0$ ,  $\omega_m$  et  $\omega_p$  en fonction de l'orientation d'une onde incidente extérieure au cristal et plaçant ces valeurs dans les équations (7) tirer de celles-ci les amplitudes  $D_j$  des différentes ondes.

Comme nous étudierons la réflexion simultanée pour tout un petit domaine de fréquences (car elle ne se produit pas seulement pour une fréquence unique), il sera nécessaire, pour chaque



fréquence, de tracer les surfaces de dispersion. C'est ce que nous avons fait dans les figures 2.

Les conditions aux limites déterminent d'un côté les points des trois branches des courbes de dispersion qu'il faut associer

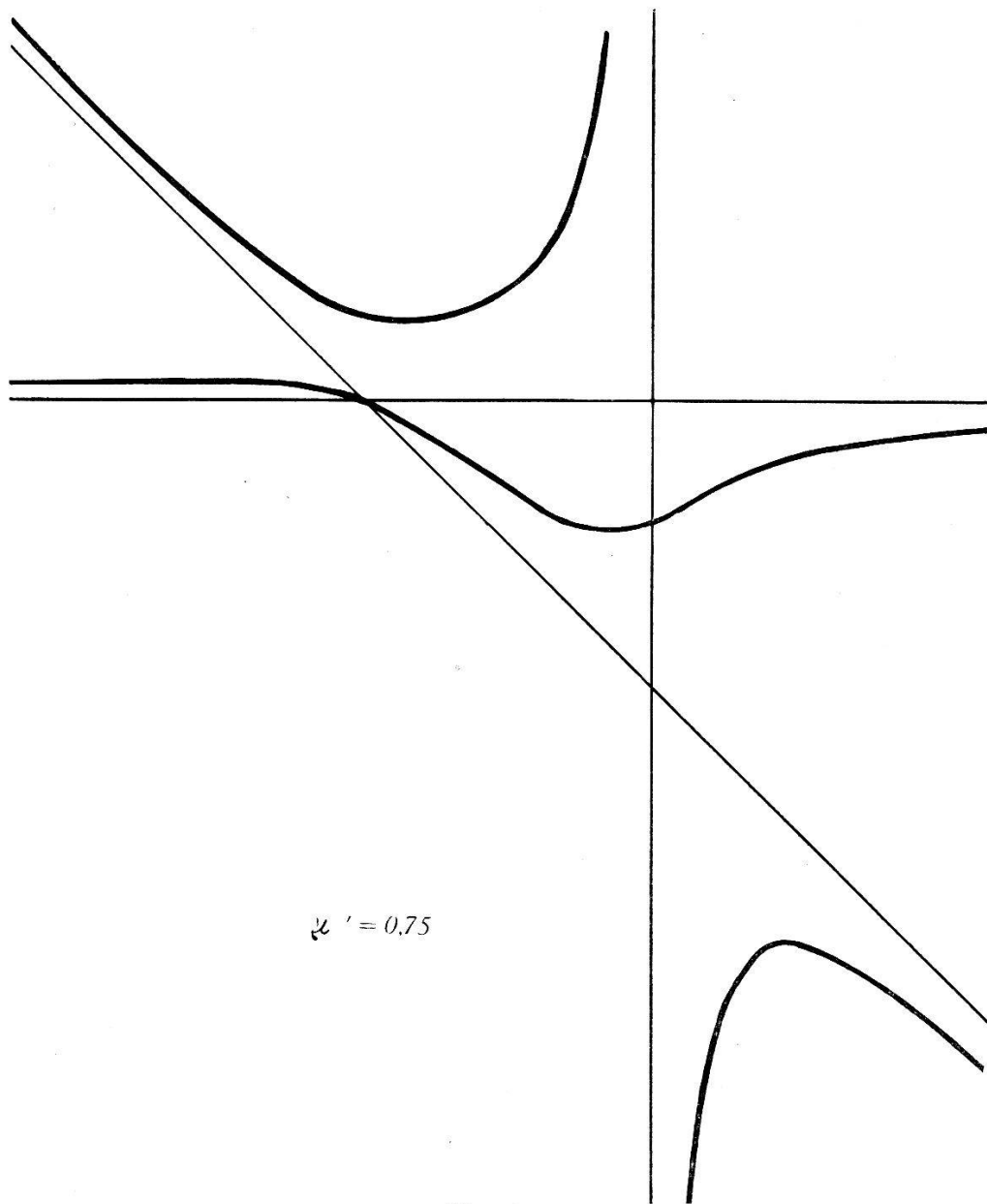


Fig. 2c.

et de l'autre les relations d'amplitude et de phase entre les trois systèmes d'ondes provenant chacun d'une des branches.

Nous avons supposé dans ce qui va suivre que la surface du cristal (plaque parallèle) était placée de façon que sa trace dans le plan des figures 2 forme un angle de  $60^\circ$  avec l'onde  $\vec{k}_0$ . Les ondes réfléchies sortent alors du cristal par la face opposée à celle d'incidence (cas de Laue).

Nous avons pu alors mesurer directement les quantités

$$\omega_0^1, \omega_m^1, \omega_p^1 \quad \omega_0^2, \omega_m^2, \omega_p^2 \quad \omega_0^3, \omega_m^3, \omega_p^3.$$

En résolvant alors les équations (7), on trouve:

$$\alpha^j = \frac{D_p^i}{D_0^i} = \frac{1 - 2 \omega_0^i}{1 - 2 \omega_p^i} \quad \text{et} \quad \beta^i = \frac{D_m^i}{D_0^i} = 2 \omega_0^i - 1. \quad (10)$$

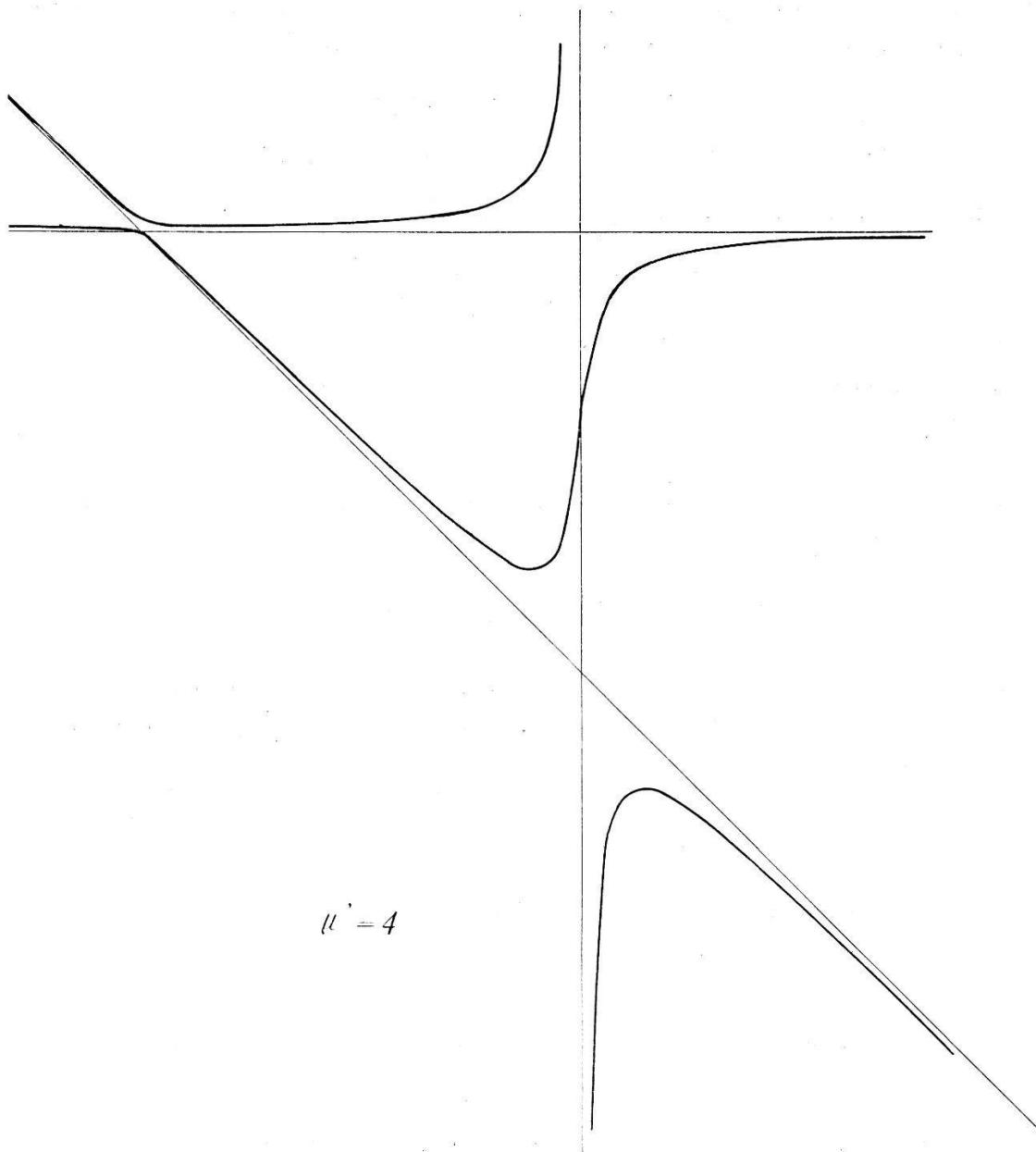


Fig. 2d.

Les  $\alpha^i$  et  $\beta^i$  sont donc les amplitudes relatives à l'onde  $k_0$  des ondes  $k_m$  et  $k_p$  pour le système d'ondes provenant de la branche  $i$  des courbes de dispersion. Pour chaque direction d'incidence de l'onde incidente, on obtient ainsi une série de valeurs.

Comme la constante diélectrique du cristal diffère très peu de l'unité, on peut alors écrire les conditions aux limites sur la face d'entrée, sous la forme

$$\left. \begin{aligned} D_0^1 + D_0^2 + D_0^3 &= D_0^e \\ D_m^1 + D_m^2 + D_m^3 &= 0 \\ D_p^1 + D_p^2 + D_p^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$D_0^e$  étant l'amplitude de l'onde incidente à l'extérieur du cristal.

En introduisant (10) dans (11), on obtient alors

$$\frac{D_0^1}{D_0^e} = \frac{\alpha^2 \beta^3 - \alpha^3 \beta^2}{\alpha^2 \beta^3 - \alpha^3 \beta^2 + \alpha^3 \beta' - \alpha' \beta^3 + \alpha' \beta^2 - \alpha^2 \beta'}$$

et deux expressions semblables pour

$$\frac{D_0^2}{D_0^e} \quad \text{et} \quad \frac{D_0^3}{D_0^e},$$

qui permettent, grâce à (10), de calculer toutes les amplitudes relatives à  $D_0^e$ .

Pour calculer l'intensité des ondes sortantes, nous avons pris la moyenne de l'intensité en fonction de l'épaisseur du cristal. On obtient ainsi

$$I_p = \left( \frac{D_p^1}{D_0^e} \right)^2 + \left( \frac{D_p^2}{D_0^e} \right)^2 + \left( \frac{D_p^3}{D_0^e} \right)^2.$$

Pour les différentes longueurs d'onde, il faudrait intégrer des expressions comme celle-ci, ce que nous avons fait graphiquement. La figure 3 donne le résultat de ces calculs.

### B. Polarisation dans le plan de réflexion (équations 8).

Les équations (8) montrent que, pour cette polarisation, l'onde  $\vec{k}_0$  est indépendante des deux autres et que l'énergie ne peut passer que de  $\vec{k}_m$  à  $\vec{k}_p$  et inversement. Si donc l'onde incidente est  $\vec{k}_0$ , les deux autres « modes de vibration » ne seront pas excités et il n'y aura pas de réflexion. Cela s'explique facilement : l'onde  $\vec{k}_m$  se propageant dans une direction perpendiculaire à  $\vec{k}_0$ , ne peut pas avoir de composante de vibration dans le plan  $(\vec{k}_0, \vec{k}_m)$  puisqu'elle est produite par  $\vec{k}_0$  par réflexion sur le plan  $m$ . Or, comme l'énergie ne peut arriver dans l'onde  $\vec{k}_p$  que par l'intermédiaire de l'onde  $\vec{k}_m$  (puisque le facteur de structure  $\psi_p$  est nul), l'onde  $\vec{k}_p$  ne contiendra pas non plus de vibration dans le plan de réflexion. Remar-

quons que si  $\vec{k}_p$  était née de la réflexion directe de  $\vec{k}_0$  sur le plan  $p$ , cette onde aurait eu une composante de vibration dans le plan  $(k_0, k_p)$ .

Cet effet de polarisation est en quelque sorte une démonstration de l'existence de l'excitation indirecte puisque c'est seulement lorsque l'onde  $\vec{k}_p$  est due à  $\vec{k}_m$  et non pas directement à  $\vec{k}_0$  que cette polarisation peut se produire.

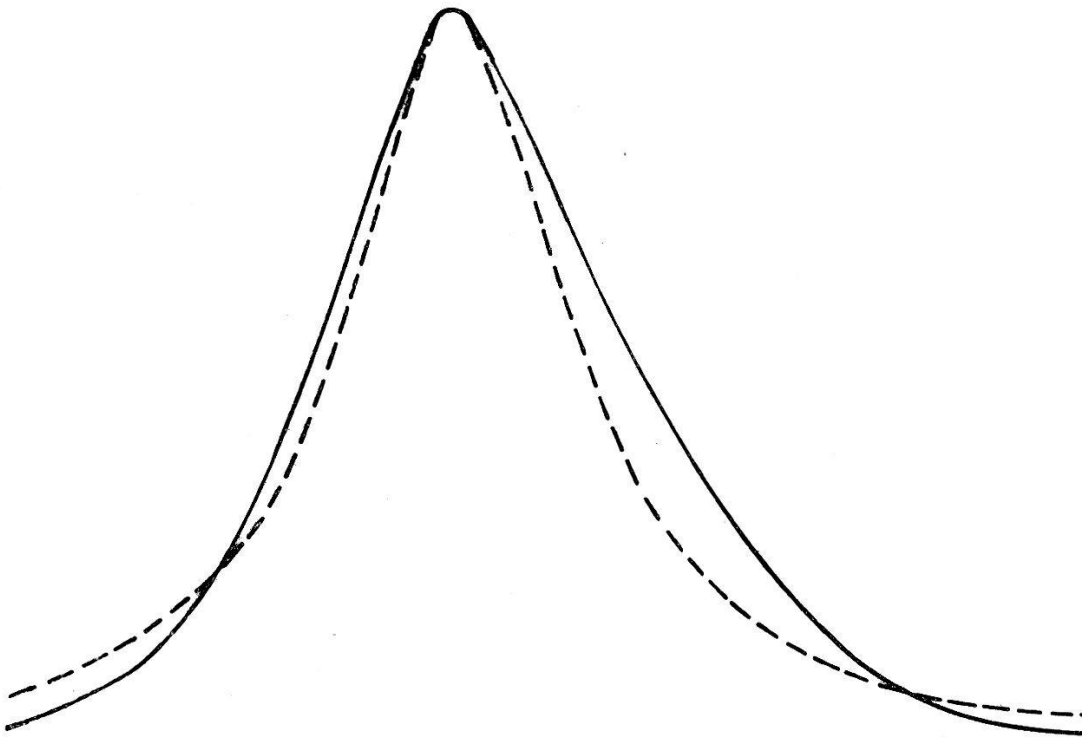


Figure 3.

Intensité et largeur de la raie d'addition en fonction de l'angle d'incidence. Le trait plein représente l'intensité empruntée au fond continu tandis que le trait pointillé donne l'intensité qui aurait été réfléchi sur le plan  $p$  pour une seule longueur d'onde en l'absence de réflexion simultanée sur le plan  $m$  (nous avons supposé  $|\psi_p| = \psi_0$  pour faire ce calcul).

On voit facilement aussi qu'un effet inverse peut se produire. Si nous supposons que le facteur de structure  $\psi_m$  du plan  $m$  soit nul alors que  $\psi_p$  ne l'est plus, les équations fondamentales prennent la forme ( $2 \Theta_m = 90^\circ$ ):

$$\left. \begin{aligned} (\psi_0 - 2 \varepsilon_0) D_0'' + \psi_{-p} \cos 2 \Theta_p D_p'' &= 0 \\ \psi_p \cos 2 \Theta_p D_0'' + (\psi_0 - 2 \varepsilon_p) D_p'' - \psi_{p-m} \sin 2 \Theta_p D_m'' &= 0 \\ - \psi_{m-p} \sin 2 \Theta_p D_p'' + (\psi_0 - 2 \varepsilon_m) D_m'' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

On voit donc que l'onde  $\vec{k}_m$  aura une composante  $D_m''$  de vibration dans le plan  $(k_0 k_m)$  alors que, si elle était née directement de  $k_0$  par réflexion sur le plan  $m$ , elle n'aurait pu en avoir

En résumé, nous avons montré théoriquement qu'un plan réticulaire dont le facteur de structure est zéro peut apparemment réfléchir les rayons X lorsqu'il y a réflexion simultanée sur un autre plan. Nous avons aussi étudié la largeur du domaine de réflexion dans un cas particulier et nous avons ainsi pu prouver que la « raie d'addition » a une largeur de l'ordre de grandeur des raies qui se formeraient par simple réflexion, largeur qui ne dépend que des propriétés du cristal. L'intensité de la raie d'addition dépend des valeurs relatives des facteurs de structure des plans jouant un rôle dans le phénomène; nous n'avons pas pu donner une expression explicite de sa valeur. On peut dire cependant que lorsque le facteur de structure du plan considéré est nul, l'intensité de la raie d'addition peut être aussi grande que si la réflexion avait eu lieu sur un des plans prenant part au phénomène (plan  $m$  ou  $p - m$ ).

Ces raies d'addition pour des plans de facteur nul ont été étudiées expérimentalement dans le beau travail de RENNIGER (loc. cit.). Cependant, l'énergie de ses raies était empruntée à une raie spectrale d'émission, tandis que la théorie ci-dessus supposait l'énergie empruntée au fond continu. La comparaison entre la forme des raies observées par RENNIGER et la forme de celles provenant du spectre continu permettrait de tirer des conclusions intéressantes sur la forme vraie des raies spectrales d'émission et sur leur largeur.

Des raies d'addition provenant du fond continu ont été observées par CAUCHOIS, HULUBEI et WEIGLE dans le travail déjà cité. Celles-ci toutefois étaient formées sur un plan dont le facteur de structure était relativement petit sans être nul.

Institut de Physique, Université de Genève.

---

**Ergänzung zum Bericht der Tagung  
der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft in Genf.**

M. WOLFKE, Warschau:

**Über die adiabatische Magnetostraktion des flüssigen Sauerstoffes.**

(Erscheint ausführlich in den Acta Physica Polonica.)

---