Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 11 (1938)

Heft: II

Artikel: Über die Bestimmung der elastischen Konstanten isotroper fester Körper mit Hilfe von Ultraschallwellen

Autor: Walti, Albin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110844

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Bestimmung der elastischen Konstanten isotroper fester Körper mit Hilfe von Ultraschallwellen

von **Albin Walti.**

(17. XII. 37.)

§ 1.

Vor einiger Zeit haben Bär und Walti[1]) das Prinzip einer Methode angegeben, um mit Hilfe von Ultraschallwellen die beiden elastischen Konstanten isotroper fester Körper zu bestimmen. Die Versuchsmethode ist folgende: In einer Flüssigkeit wird eine Ultraschallwelle, deren Frequenz mindestens einige hundert kHz betragen muss, erzeugt. Der zu untersuchende feste Körper wird in der Flüssigkeit in den Schallstrahlengang gestellt und auf seine Durchlässigkeit für Ultraschallwellen geprüft. Er muss die Form eines sehr spitzen Keiles haben, und seine Länge und Breite müssen sehr gross sein im Vergleich zur Schallwellenlänge; seine Dicke darf dagegen nur wenige Schallwellenlängen betragen. Ein solcher Körper kann, wenn durch Anbringung von Blenden dafür gesorgt wird, dass innerhalb des durchstrahlten Volumens die Keildicke sich nicht merklich ändert, für den Durchgang der Schallwelle angenähert als planparallele Platte angesehen werden. Die Schalldurchlässigkeit hängt dann nur von den beiden noch willkürlich veränderlichen Parametern, Plattendicke d und Winkel ϑ zwischen Plattennormale und Schallfortpflanzungsrichtung, ab. Der durch die Platte hindurchgegangene Schall wird nachgewiesen mit Hilfe des von Debye-Sears und Lucas-Biquard entdeckten Effektes der Lichtbeugung an Ultraschallwellen. Um keine quantitative Messung der Schallintensität nach dieser Methode machen zu müssen, wozu die (noch nicht vorhandene) Kenntnis des exakten theoretischen Zusammenhangs zwischen der Schallintensität und der Lichtbeugungserscheinung notwendig wäre, werden nur die Intensitäts-Maxima (Minima) der Beugungserscheinung als Funktion von d und ϑ aufgesucht, und es wird weiter nur vorausgesetzt, dass dieselben bei den Maxima (Minima) der Schallintensität eintreten.

---

[1]) R. Bär und A. Walti, Helv. Phys. Acta **7**, 658 (1934).

Wenn die zu untersuchende planparallele Platte senkrecht zum Schallstrahl steht ($\vartheta = 0$), so werden in derselben nur Dilatations-(Longitudinal-)wellen (Wellenlänge $= \Lambda_d$) erregt, und die Durchlässigkeit hat — wie schon die elementare Theorie zeigt — ihre Maxima an den Stellen $d = n\Lambda_d/2$ ($n =$ ganze Zahl). Indem man diese Stellen maximaler Durchlässigkeit aufsucht, kann man also die Wellenlänge und daher die Geschwindigkeit der Dilatationswellen bestimmen. Solche Versuche wurden zuerst von Hiedemann und Asbach[1]) ausgeführt.

Das Ziel war nun, aus derartigen Messungen die beiden elastischen Konstanten des betreffenden Materials zu bestimmen. Hierzu ist es notwendig, auch noch die Wellenlänge der Rotations-(Transversal-)wellen nach der gleichen Methode zu messen. Um diese Wellen in der Platte anzuregen, muss der Einfallswinkel $\vartheta \neq 0$ sein. Dann entstehen aber in der Platte gleichzeitig beide Wellenarten und die Erscheinung wird daher wesentlich komplizierter. Eine exakte Bestimmung der Materialkonstanten ist deshalb nur möglich auf Grund einer Theorie, die die Schalldurchlässigkeit der Platte beim gleichzeitigen Vorhandensein beider Wellenarten in der Platte zu berechnen erlaubt.

Eine solche Theorie war zur Zeit, als Bär und Walti ihre Versuche ausführten, noch nicht vorhanden. Daher wurden, um trotzdem Zahlwerte für die Rotationsgeschwindigkeit zu erhalten, zwei Ansätze versucht: 1. Da die Dilatationsgeschwindigkeit bekanntlich grösser ist als die Rotationsgeschwindigkeit, existiert ein Bereich für den Einfallswinkel, in welchem für die Dilatationswellen schon Totalreflexion stattfindet, während Rotationswellen noch durch die Platte hindurchgehen. Es wurde nun die Annahme gemacht, dass in diesem Gebiete die Dilatationswellen ganz vernachlässigt werden dürfen, so dass die Berechnung der Durchlässigkeit der Platte so geschehen kann, als ob nur Rotationswellen vorhanden wären. Die Versuche ergaben bei dieser Interpretation aber das wenig plausible Resultat, dass die Geschwindigkeit der Rotationswellen noch vom Brechungswinkel abhängig ist. 2. In einem gewissen Bereich des Einfallswinkels, in dem noch beide Wellenarten möglich sind, liessen sich die Versuche qualitativ gut darstellen durch die aus der Seismik bekannte Annahme der Existenz sog. „Wechselwellen"; das sind Dilatations-(Rotations-)Wellen, die bei der innern Reflexion an der Oberfläche des Körpers übergehen in Rotations-(Dilatations-)Wellen. Obgleich sich mit dieser Annahme für die Rotationsgeschwindig-

[1]) E. Hiedemann und H. R. Asbach, Phys. ZS. **34**, 734 (1933).

keit ein Wert ergab, der nur wenig Richtungsabhängigkeit zeigte, so war doch klar, dass die Wechselwellen-Hypothese nur in grober Näherung zutreffen konnte.

Eine nützliche Fortsetzung der Versuche hatte daher zur Voraussetzung, dass zuvor eine Theorie ausgearbeitet wird, die eine sinnvolle Interpretation der Messungen ermöglicht. Dies ist mittlerweile in der Tat geschehen, und zwar hatte Herr Prof. Dr. H. Reissner[1]) in Berlin-Charlottenburg die Freundlichkeit, die Theorie für uns zu entwickeln. Dieselbe gestattet es, die Rotationswellengeschwindigkeit in eindeutiger Weise aus den Experimenten zu bestimmen. Man erhält jetzt, wie hier vorweggenommen sei, aus unsern Versuchen, die mit dem Jenaerglas Zk6 bei den Frequenzen 2,0 und 7,5 kHz ausgeführt wurden, für die Rotationsgeschwindigkeit einen Wert, der unabhängig ist vom Brechungswinkel und von der Plattendicke. Ausserdem stimmen die von uns gemessenen Werte für die Dilatations- und die Rotationsgeschwindigkeit innerhalb der Messfehler überein mit den Geschwindigkeiten, die sich berechnen aus den für dieses Glas bekannten statischen Elastizitätskoeffizienten.

Wir geben zuerst in § 2 eine Beschreibung der von uns zu den neuen Messungen verwendeten verbesserten Versuchsanordnung. In § 3 sind die Versuchsresultate zusammengestellt. In § 4 wird gezeigt, wie man unter Zugrundelegung der Reissnerschen Theorie die Rotationsgeschwindigkeit bestimmt. § 5 gibt dann die eingehendere Diskussion der Messungen und den Vergleich mit der Theorie. In § 6 wird schliesslich noch eine nach der Mitteilung von Bär und Walti erschienene Arbeit von Bez-Bardili[2]) besprochen, die sich mit demselben Gegenstand beschäftigt. Dieser Autor legt seinen Messungen die von Bär und Walti gegebene vereinfachte Theorie zu Grunde, trotzdem deren Mängel schon seinerzeit klar waren. Die Arbeit stellt daher gegenüber Bär und Walti keinen Fortschritt dar; insbesondere sind aber, wie in § 6 gezeigt wird, die von Bez-Bardili gezogenen Schlussfolgerungen, dass die Rotationsgeschwindigkeit von der Plattendicke und von der Schallfrequenz abhängen und erst asymptotisch den für das unendlich ausgedehnte Medium gültigen Wert annehmen soll, vollkommen unbegründet. Sie werden durch unsere neuen Versuche und deren Interpretation auf Grund der Reissnerschen Theorie widerlegt.

---

[1]) H. Reissner, Helv. Phys. Acta **11**, 140 (1938).

[2]) W. Bez-Bardili, ZS. f. Phys. **96**, 761 (1935).

§ 2. Versuchsanordnung.

A. *Optischer Teil:* Die optische Anordnung ist aus Fig. 1 ersichtlich. Das Licht der Quecksilberbogenlampe Q wurde mit dem Kondensator K auf einen vertikalen Spalt S konzentriert. Vor dem Spalt befand sich ein Zeiss'sches Monochromatfilter F und zwar bei visueller Beobachtung das Filter B (durchlässig für 5461 Å), bei photographischen Aufnahmen das Filter C (durchlässig für 4359 Å). Das vom Spalt ausgehende Licht wurde zuerst durch eine Linse L_1 parallel gemacht, fiel dann auf die Zylinderlinse Z und passierte hierauf den Glastrog T mit den Ultraschallwellen. Die Linse Z war so justiert, dass das auffallende Licht in

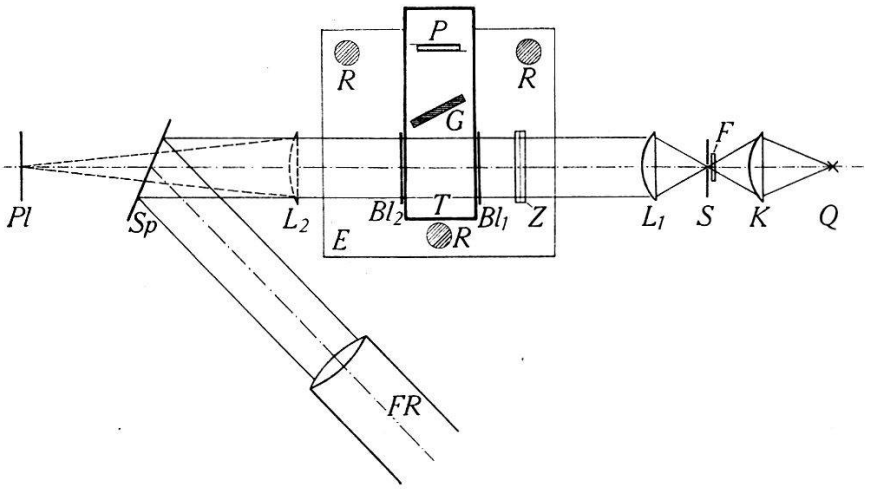

Fig. 1.
Optische Anordnung.

eine horizontale Brennlinie konzentriert wurde, die genau in der Mitte des Schalltroges lag. Zur möglichst exakten Definition des Lichtstrahls dienten ferner zwei Blenden Bl_1 und Bl_2 unmittelbar vor und hinter dem Glastrog, die die Gestalt horizontaler Spalte von 2 mm Breite hatten. Mit dieser Anordnung wurde erreicht, dass der Querschnitt des Lichtbündels an der Stelle, wo dasselbe die Schallwelle durchsetzte und wo also die zur Messung der Schallintensität dienende Lichtbeugung stattfand, in vertikaler Richtung eine Ausdehnung von weniger als 1 mm hatte. Die Schallwellen wurden von dem vertikal stehenden Piezoquarz P im Trog T (Leybold'scher Glaskasten von 10 cm Länge und 3 cm Breite) in einer Flüssigkeit (Xylol oder Wasser) in horizontaler Richtung und senkrecht zum Lichtstrahl emittiert. Dieselben waren immer rein fortschreitende Wellen, da durch Auskleiden der dem Quarz gegenüberstehenden Glaswand mit einem schallabsorbierenden Leinenbausch die Reflexion und damit das Auftreten stehender Wellen verhindert werden konnte. Zwischen dem Schwingquarz

und der Stelle im Trog, wo das Licht die Schallwellen durchsetzte, befand sich noch der Glaskeil G; er stand vertikal und konnte mit Hilfe einer weiter unten beschriebenen Einrichtung in vertikaler Richtung um exakt messbare Beträge verschoben werden. Da das Lichtbündel an der Stelle, wo es die Schallwellen durchsetzte, in der Vertikalen auf weniger als 1 mm zusammengeschnürt war, so durfte der Keil, dessen Dicke sich auf 1 mm Länge nur um höchstens $^1/_{20}$ der Dilatationsschallwellenlänge änderte, mit guter Näherung als planparallele Platte angesehen werden.

Bei unserer Anordnung befanden sich alle Blenden, die zur Definition des Flüssigkeitsvolumens, in dem die Lichtbeugung stattfand, dienten, im Lichtstrahl und nicht in der Schallwelle. Dies hatte den Vorteil, dass die Lichtbeugung an den 2 mm breiten Blenden vernachlässigt werden durfte, während, wenn solche Blenden im Schallstrahl aufgestellt worden wären, die Beugung der Schallwellen infolge der ca. 3000mal grössern Wellenlänge wohl zu merklichen Störungen Anlass gegeben hätte.

Die Beobachtung der Lichtbeugung geschah meistens subjektiv durch ein Fernrohr. In diesem Falle fiel das Licht nach dem Austritt aus dem Leyboldtrog auf einen oberflächenversilberten Spiegel Sp, der das Licht in ein seitlich neben dem Trog stehendes Fernrohr Fr reflektierte. Durch Drehen des Keils um eine vertikale Achse konnte der Einfallswinkel der Schallwelle und durch vertikales Verschieben des Keils seine wirksame Dicke verändert werden; durch gleichzeitiges Beobachten der Lichtbeugungserscheinungen wurde die Einstellung auf ein Maximum bzw. Minimum der vom Keil durchgelassenen Schallintensität ermöglicht.

Einige Messungen wurden auch mit einer Photozelle ausgeführt. Dazu wurde der Spiegel Sp (Fig. 1) weggedreht und die Linse L_2 in den Strahlengang gestellt. Die nullte Ordnung der Beugungsspektren wurde dann mit einem 2 mm dicken, schwarz emaillierten Kupferdraht abgeblendet. Das Licht der abgebeugten Ordnungen fiel diffus auf eine Selen-Sperrschichtphotozelle, so dass nahezu die ganze Oberfläche derselben belichtet war. Die Photozelle wurde mit einem Spiegelgalvanometer von $3{,}75 \cdot 10^{-9}$ Empfindlichkeit verbunden und auf einer 3 m entfernten Skala der Ausschlag abgelesen.

Was schliesslich noch die Montierung des Keils betrifft, so waren an einer 6 mm dicken, mit der optischen Bank fest verschraubten Eisenplatte E drei je 35 cm lange vertikale Rundeisenstäbe R befestigt. Auf diesen ruhte ein Teilkreis, dessen drei Stellschrauben mit ihren Spitzen in entsprechende Bohrungen der

Stäbe passten (Fig. 2). In den beweglichen Konus *Ko* des Teilkreises war ein 12 cm langer, achsial in Richtung der Keilnut *N* verschiebbarer Bolzen *B* eingepasst. Am untern Ende war eine zur Bolzenachse parallele Fläche angefräst, auf der die Keile mit ihrem dicken Ende so festgeschraubt wurden, dass ihre Mittelebenen parallel zur vertikalen Bolzenachse lagen.

Mit dem Teilkreis konnte der Einfallswinkel ϑ auf 1 Bogenminute abgelesen werden. Um die Dicke des Keils an der durchstrahlten Stelle zu finden, wurde mit einem Kathetometer eine

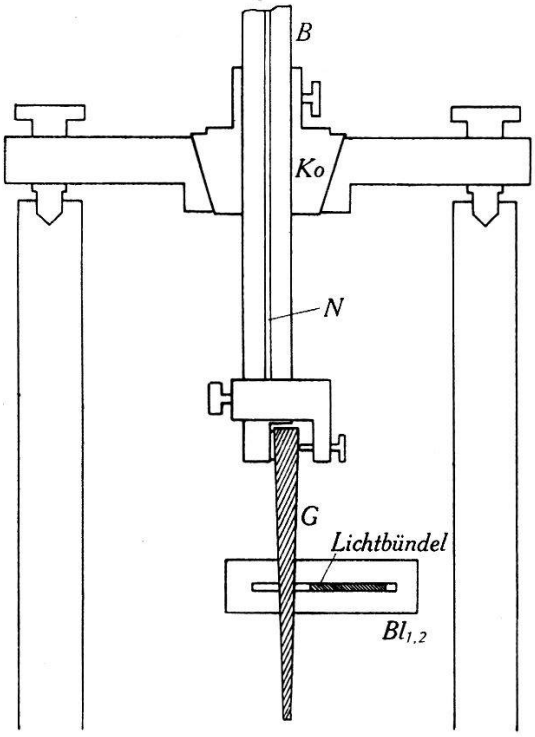

Fig. 2.
Keilhalterung.

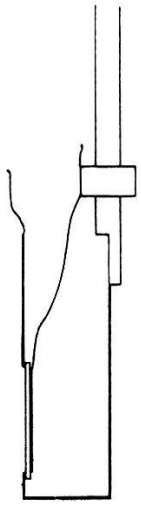

Fig. 3.
Quarzhalterung.

Marke (feine Rinne) am Bolzen anvisiert, und zwar einmal, wenn der Keil sich in der Durchstrahlungsstellung befand, und ein zweites Mal, wenn die Schneide des Keils in der Mitte der Öffnungen der Blenden Bl_1 und Bl_2 stand (Nullstellung!). Da die Dicke aller verwendeten Keile mit der Höhe genau linear zunahm, konnte hieraus dieKeildicke an der durchstrahlten Stelle berechnet werden.

B. *Ultraschallerzeugung:* Es wurden Versuche mit 4 Ultraschallwellen im Frequenzbereich $1—12 \cdot 10^6$ Hz ausgeführt. Die elektrischen Schwingungen wurden erhalten mit einem kleinen Sender mit zwei Philips CT $^{04}/_{10}$-Röhren in Gegentaktschaltung. Zur Erzeugung der Schallwellen dienten 2 Piezoquarze A und B; A hatte die Form einer kreisförmigen Scheibe von 0,4 mm Dicke

und 20 mm Durchmesser, B war ein Prisma von $20 \times 20 \times 10$ mm Kantenlänge, dessen elektrische Achse parallel zu den 10 mm-Kanten lag. Um die Piezoquarze auch in elektrizitätsleitenden Flüssigkeiten anregen zu können, mussten sie so gehaltert werden, dass nur die eine Elektrode mit der Flüssigkeit in Berührung kam. Dazu wurden sie in Messingkästchen von 35 mm Höhe, 25 mm Breite und 15 mm Tiefe eingebaut (Fig. 3). Die auf einer Seite versilberten Piezoquarze wurden von innen (mit der Silberschicht) über die etwas kleinere Öffnung in der Vorderwand der Kästchen geklebt. Diese Silberschicht bildete dann die eine Elektrode; die andere, von der Flüssigkeit isolierte, war eine auf die Rückseite des Piezoquarzes aufgeklebte Aluminiumfolie. Die Messingkästchen mit den eingebauten Piezoquarzen wurden von einem Ebonitstab, der mit der optischen Bank fest verschraubt werden konnte, gehalten.

C. *Anordnung zur Bestimmung der Ultraschallfrequenz:* Zur Bestimmung der Schallfrequenz wurde in der optischen Anordnung (Fig. 1) der Spiegel *Sp* weggedreht und die Linse L_2 so in den Lichtstrahlengang gestellt, dass auf der photographischen Platte *Pl* ein scharfes Spaltbild entstand. Für jede im Flüssigkeitstroge erzeugte Ultraschallwelle, deren Frequenz zu bestimmen war, wurden die Beugungsspektren photographiert und ihr Abstand mit einem Komparator ausgemessen. Dann wurde noch der Abstand der Beugungsspektren für eine bekannte Ultraschallfrequenz und zwar für $7{,}500 \cdot 10^6$ Hz bestimmt; hierzu wurde der Quarz A mit einem Sender erregt, der mit einem Steuerquarz für $7{,}500 \cdot 10^6$ Hz von Steeg und Reuter gesteuert war. Die Frequenzen, die bei den Versuchen benutzt wurden, bestimmten sich so zu:

	Quarz
$12{,}48 \pm 0{,}02 \cdot 10^6$ Hz	A
$7{,}55 \pm 0{,}01$ Hz	A
$2{,}007 \pm 0{,}005$ Hz	B
$0{,}903 \pm 0{,}009$ Hz	B

D. *Glaskeile:* Für unsere Glaskeile, die aus dem Jenaer Glas Zk6 hergestellt waren[1]), kennt man die elastischen Konstanten aus statischen Messungen[2]). Es ist:

[1]) Ein Stück dieses Glases wurde uns vom Jenaer Glaswerk Schott & Gen. in dankenswerter Weise kostenlos zur Verfügung gestellt; daraus wurden die Glaskeile von der Firma Steibel & Duval in Paris geschliffen.

[2]) Hermann Thiene: Glas (erster Band, Seite 182ff.). Verlag: Gustav Fischer, Jena 1931.

Elastizitätsmodul	E:	6498—6766 kg/mm²
Torsionsmodul	T:	2700 kg/mm²
Poissonsche Zahl	σ:	0,226
Dichte	ϱ:	2,562

Aus diesen Werten berechnet sich für die Geschwindigkeit der Dilatationswellen ein Wert von 5360—5460 m/sec. Für den Frequenzbereich $1—12 \cdot 10^6$ Hz, der bei unsern Messungen benützt wurde, wird die Wellenlänge also ungefähr = 5—0,5 mm. Da die Keildicke zwischen ca. ½—3 Wellenlängen variieren sollte, wurden folgende drei Keile zu den Messungen verwendet:

Glaskeil	Länge	Breite	Dicke der Schneide	Dicke des Rückens
I	81,8 mm	20 mm	0,280 mm	2,650 mm
II	81,0 mm	27 mm	2,05 mm	6,10 mm
III	81,2 mm	27 mm	4,45 mm	12,14 mm

§ 3. Messungen und Versuchsresultate.

a) *Subjektive Messungen.*

Bei der subjektiven Beobachtung der Beugungserscheinung wurden die Keilstellungen bestimmt, bei denen ein Maximum (Minimum) der Schallenergie durch den Keil hindurchgeht. Die Stellungen maximaler Durchlässigkeit sind scharf definiert, d. h. eine kleine Änderung von d oder ϑ hat eine starke Abnahme der durchgelassenen Schallenergie zur Folge. Daher nimmt in der Umgebung eines Maximums die Intensität der Beugungsspektren rasch ab, so dass d und ϑ genau gemessen werden können. In der Umgebung der Minima nimmt die Schallenergie dagegen nur schwach zu, so dass sich d und ϑ hier nur ungenau bestimmen lassen[1]).

A. Senkrechte Inzidenz: Bei senkrechter Inzidenz bilden sich im Keil nur Dilatationswellen aus, und die Durchlässigkeitsmaxima liegen bei $d = n\,\Lambda_d/2$ (n = ganze Zahl). In Tabelle 1 sind sämtliche Messungen und die daraus berechneten Werte der Wellenlänge und der Schallgeschwindigkeit w_d zusammengestellt. Man sieht: Die Dilatationsgeschwindigkeit zeigt keine Dispersion; sie beträgt 5500 ± 20 m/sec und steht mit der aus den statischen Elastizitätskoeffizienten berechneten, die je nach dem für E eingesetzten Wert 5360—5460 m/sec beträgt, wahrscheinlich innerhalb der Messfehler in Übereinstimmung.

[1]) R. W. Boyle und W. F. Rawlinson, Transact. Roy. Soc. Canada **22**, 55 (1928).

Tabelle 1.

Versuchsresultate bei senkrechter Inzidenz.

Flüssigkeit	Wasser	Wasser	Xylol	Xylol
Glaskeil	I	I	II	III
Frequenz $\cdot 10^6$ Hz	12,48	7,55	2,007	0,903
d_{max} = Keildicke bei maximaler Durchlässigkeit in mm	0,670 0,886 1,124 1,302 1,550 1,778 1,990 2,211	0,731 1,095 1,455 1,815 2,190	2,760 4,105 5,500	6,09 $9{,}07_5$
Λ_d in mm	0,441 $\pm$0,001	0,729 $\pm$0,001	2,740 $\pm$0,011	6,07 $\pm$0,02
w_d (m/sec)	5500$\pm$15	5500$\pm$10	5500$\pm$26	5480$\pm$58

B. Schiefe Inzidenz: Bei schiefer Inzidenz ($\vartheta \neq 0$) bilden sich im Keil sowohl Dilatations- als auch Rotationswellen aus. Da die Geschwindigkeit der Dilatationswellen grösser ist als die der Rotationswellen, tritt mit zunehmendem ϑ zuerst für die Dilatationswellen Totalreflexion ein, und zwar für Wasser ($v_{\text{Wasser}} = 1460$ m/sec) bei $\vartheta' = 15^0 24'$, für Xylol ($v_{\text{Xylol}} = 1310$ m/sec) bei $\vartheta' = 13^0 47'$. Wenn man, von der senkrechten Inzidenz ausgehend, den Keil verdreht, so nimmt die Durchlässigkeit erst nur wenig und vor dem Grenzwinkel ϑ' dann schnell ab; sie bleibt in einem schmalen Winkelbereich von ca. 1^0 beiderseits vom Wert ϑ' so klein, dass hier keine Beobachtungen gemacht werden konnten. Bei weiterem Verdrehen wird der Keil wieder schalldurchlässig und zwar bis zum Gebiet des Grenzwinkels ϑ'' der Totalreflexion der Rotationswellen. Im Winkelbereich B_{I} $0 \leqq \vartheta \leqq \vartheta'$ gehen sowohl Dilatations als auch Rotationswellen durch den Keil hindurch; im Winkelbereich B_{II} $\vartheta' \leqq \vartheta \leqq \vartheta''$, in dem für die Dilatationswellen Totalreflexion stattfindet, geht der Hauptteil der Schallenergie als Rotationswelle durch den Keil. Bei den Versuchen mit der Frequenz $7{,}55 \cdot 10^6$ Hz wurden im Bereiche B_{I} die Maxima und Minima gemessen; in B_{II} dagegen nur die Maxima. Bei der Frequenz $2{,}007 \cdot 10^6$ Hz wurden nur noch die Maxima in B_{II} bestimmt, weil diese theoretisch am einfachsten diskutiert werden können. Da es sich für die Diskussion der Messungen und den Vergleich mit der Reissner'schen

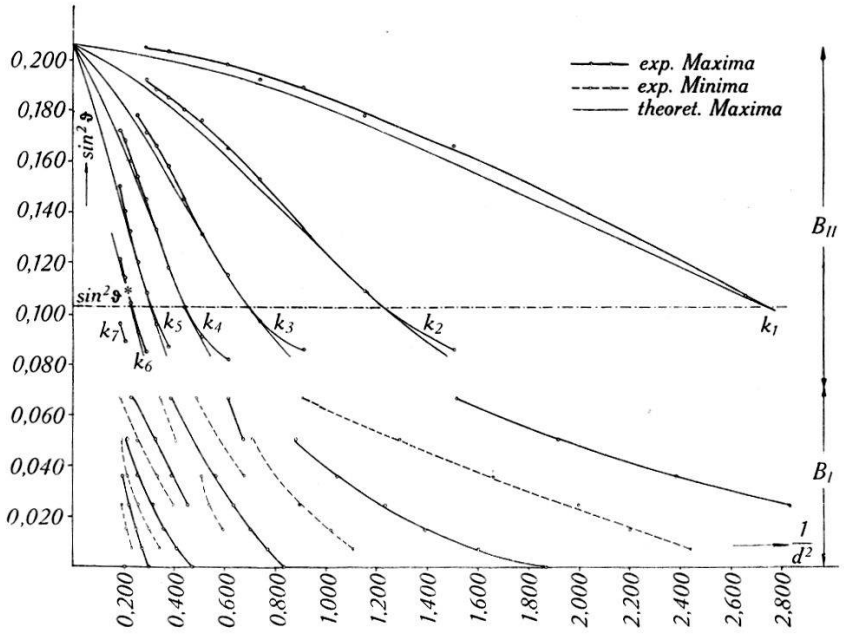

Fig. 4.

Maxima und Minima der Durchlässigkeit für die Ultraschallfrequenz $7{,}55 \cdot 10^6$ Hz; [Wasser, Glaskeil I].

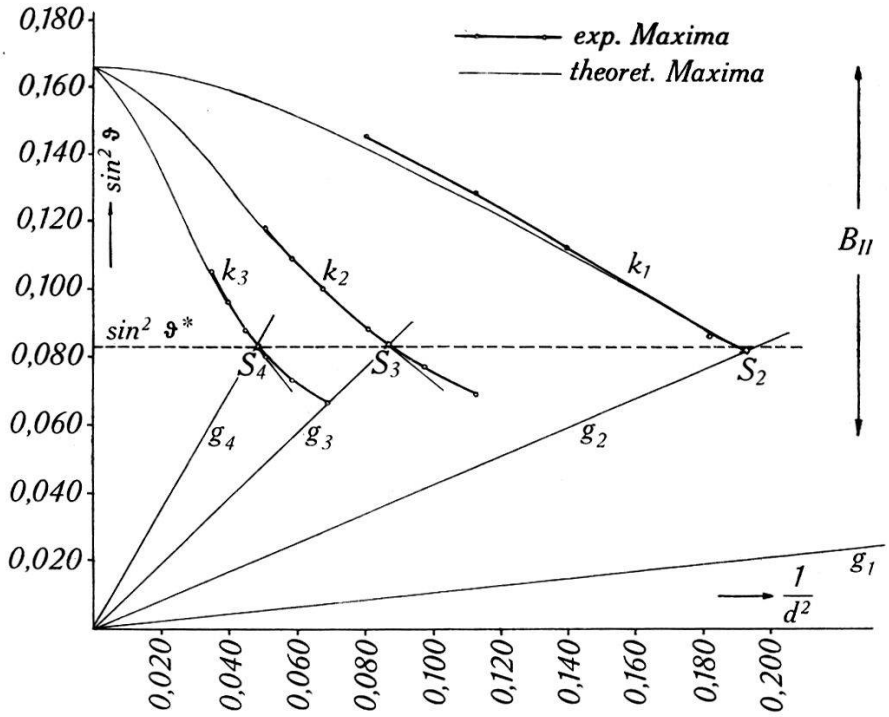

Fig. 5.

Maxima der Durchlässigkeit für die Ultraschallfrequenz $2{,}007 \cdot 10^6$ Hz; [Xylol; Glaskeil II].

Tabelle 2.

Maxima der Durchlässigkeit in B_{II}.

Frequenz: $7{,}55 \cdot 10^6$ Hz, Glaskeil I, Flüssigkeit: Wasser

Fig. 4, Kurve k_1

d(mm)	$1/d^2$	$\sin^2 \vartheta$	ϑ
0,613	2,661	0,108	19°14′
0,816	1,502	0,166	24°00′
0,932	1,151	0,178	24°55′
1,048	0,910	0,189	25°48′
1,164	0,738	0,192	26°01′
1,280	0,610	0,198	26°26′
1,629	0,377	0,203	26°48′
1,860	0,289	0,205	26°56′

Kurve k_2

d	$1/d^2$	$\sin^2 \vartheta$	ϑ
0,816	1,502	0,086	17°05′
0,932	1,151	0,109	19°16′
1,048	0,910	0,133	21°26′
1,164	0,738	0,153	23°01′
1,280	0,610	0,165	23°58′
1,395	0,510	0,176	24°48′
1,511	0,438	0,180	25°05′
1,629	0,377	0,185	25°30′
1,743	0,329	0,188	25°45′
1,860	0,289	0,192	26°00′

Kurve k_3

d	$1/d^2$	$\sin^2 \vartheta$	ϑ
1,048	0,910	0,084	16°50′
1,164	0,738	0,097	18°10′
1,280	0,610	0,115	19°51′
1,395	0,514	0,131	21°14′
1,511	0,438	0,145	22°24′
1,629	0,377	0,158	23°26′
1,743	0,329	0,166	24°06′
1,860	0,289	0,171	24°28′
1,978	0,256	0,178	24°56′

Kurve k_4

d	$1/d^2$	$\sin^2 \vartheta$	ϑ
1,280	0,610	0,082	16°42′
1,395	0,514	0,091	17°31′
1,511	0,438	$0{,}102_5$	18°40′
1,629	0,377	0,118	20°10′
1,743	0,329	0,133	21°24′
1,860	0,289	0,145	22°25′
1,978	0,256	0,154	23°10′
2,090	0,229	0,160	23°35′
2,209	0,205	0,168	24°14′
2,320	0,186	0,172	24°30′

Kurve k_5

d	$1/d^2$	$\sin^2 \vartheta$	ϑ
1,629	0,377	0,087	17°10′
1,743	0,329	$0{,}095_5$	18°02′
1,860	0,289	0,108	19°09′
1,978	0,256	0,120	20°16′
2,090	0,229	0,132	21°20′
2,209	0,205	0,140	21°56′
2,320	0,186	0,150	22°46′

Kurve k_6

d	$1/d^2$	$\sin^2 \vartheta$	ϑ
1,860	0,289	0,085	17°00′
1,978	0,256	$0{,}092_5$	17°40′
2,090	0,229	0,104	18°45′
2,209	0,205	0,114	19°42′
2,320	0,186	0,121	20°22′

Kurve k_7

d	$1/d^2$	$\sin^2 \vartheta$	ϑ
2,209	0,205	0,089	17°20′
2,320	0,186	0,096	18°02′

Theorie als vorteilhaft erweist, werden sämtliche Messungen in Diagrammen dargestellt, in denen $\sin^2 \vartheta$ als Funktion von $1/d^2$ aufgetragen ist (Fig. 4 und 5). Die Messungen in B_{II} sind ausserdem in Tabellenform zusammengestellt (Tabellen 2 und 3).

Tabelle 3.

Maxima der Durchlässigkeit in B_{II}.

Frequenz: $2{,}007 \cdot 10^6$ Hz, Glaskeil II. Flüssigkeit: Xylol.

Fig. 5, Kurve k_1			
d (mm)	$1/d^2$	$\sin^2 \vartheta$	ϑ
2,35	0,181	0,086	17°07′
2,68	0,140	0,112	19°29′
2,97	0,113	0,128	20°58′
3,52	0,081	0,145	22°24′
Kurve k_2			
d	$1/d^2$	$\sin^2 \vartheta$	ϑ
2,97	0,113	0,069	15°16′
3,20	0,098	0,077	16°10′
3,52	0,081	0,088	17°18′
3,82	0,068	0,100	18°27′
4,12	0,059	0,109	19°16′
4,42	0,051	0,118	20°08′
Kurve k_3			
d	$1/d^2$	$\sin^2 \vartheta$	ϑ
3,82	0,069	0,066	14°52′
4,12	0,059	0,073	15°42′
4,42	0,051	0,080	16°26′
4,72	0,045	0,088	17°16′
5,02	0,040	0,096	18°05′
5,32	0,035	0,105	18°54′

b) *Messungen mit der Photozelle.*

Die Messungen wurden am Glaskeil I beim Einfallswinkel $\vartheta = 11^0\,00'$ ausgeführt (Frequenz $7{,}55 \cdot 10^6$ Hz, Flüssigkeit: Wasser). Gemessen wurde bei beliebiger Keilstellung erstens die Intensität I der Beugungsspektren, wenn die Schallwellen durch den Keil hindurchgegangen waren, und zweitens die Intensität I_0 ohne Keil. Die Resultate sind in Tabelle 4 wiedergegeben und in Fig. 8 in Kurvenform dargestellt. Die so für die Maxima gefun-

denen d-Werte stimmen genau mit den subjektiven Messungen (Fig. 4) überein.

Tabelle 4.

Mit der Photozelle gemessenes Intensitätsverhältnis I/I_0 beim Einfallswinkel $\vartheta = 11^0\,00'$.

d (mm)	I/I_0	d	I/I_0
0,442	0,059	1,311	0,610
0,500	0,000	1,358	0,272
0,590	0,237	1,392	0,059
0,654	0,710	1,442	0,083
0,703	0,095	1,510	0,118
0,762	0,077	1,568	0,396
0,791	0,095	1,602	0,574
0,848	0,083	1,660	0,396
0,924	0,355	1,720	0,189
0,965	0,680	1,780	0,154
1,029	0,344	1,835	0,225
1,086	0,077	1,892	0.296
1,145	0,012	1,980	0,645
1,175	0,030	2,010	0,183
1,209	0,030	2,070	0,089
1,255	0,332	2,180	0,047

§ 4. Bestimmung der Geschwindigkeit der Rotationswellen mit Hilfe der Reissnerschen Theorie.

Es soll bedeuten:

ϱ = Dichte des Glases, ϱ_1 = Dichte der Flüssigkeit,

$w_1 = \sqrt{\lambda_1/\varrho_1}$ = Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit

$w_d = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}$ = Geschwindigkeit der Dilatationswellen im Glas

$w_r = \sqrt{\mu/\varrho}$ = Geschwindigkeit der Rotationswellen im Glas

(λ_1; λ, μ = Lamésche Elastizitätskoeffizienten für Flüssigkeit bzw. Glas).

$$\alpha = \frac{\sin\vartheta}{w_1}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{w_d^2} - \alpha^2}, \qquad \delta = \sqrt{\frac{1}{w_r^2} - \alpha^2}$$

ν = Schallfrequenz in Hertz.

$\varphi = 2\pi\nu\beta d, \quad \psi = 2\pi\nu\delta d.$

Aus der Reissnerschen Theorie ergibt sich dann (a. a. O., Formel (27)) für die Durchlässigkeit D (= Verhältnis der Intensität der durchgelassenen Strahlung zur Intensität der auffallenden) der Ausdruck

$$D = \frac{4\,N^2}{(N^2 - M^2 - 1)^2 + 4\,N^2} = \frac{4\,N^2}{(M^2 - N^2 - 1)^2 + 4\,M^2}, \tag{1}$$

wo

$$H = \frac{w_1 \cos\vartheta}{\lambda_1\,\varrho}(\varrho - 2\,\mu\,\alpha^2)^2, \quad J = \frac{4\,\alpha^2\mu^2 w_1 \cos\vartheta}{\lambda_1\,\varrho},$$

$$N = \frac{H}{\beta \sin\varphi} + \frac{J\,\delta}{\sin\psi}, \quad M = \frac{H\cos\varphi}{\beta\sin\varphi} + \frac{J\,\delta\cos\psi}{\sin\psi}$$

wird. Wenn man im Ausdruck für D Zähler und Nenner mit $(\beta \sin\varphi \sin\psi)^2$ multipliziert, wird

$$D = \frac{4\,K^2}{L^2 + 4\,K^2}, \tag{1'}$$

wo

$$K = H \sin\psi + J\,\beta\,\delta \sin\varphi$$

$$L = [H^2 + \beta^2(J^2\delta^2 - 1)]\,\frac{\sin\varphi}{\beta}\sin\psi + 2\,H\,J\,\delta(1 - \cos\varphi\cos\psi).$$

Um den Vergleich der hier benutzten Bezeichnungen mit denjenigen der Reissnerschen Arbeit zu erleichtern, sei noch bemerkt, dass gleiche Buchstaben in beiden Arbeiten auch die gleiche Bedeutung haben (nur unser ν wird bei Reissner mit n bezeichnet), und dass die von uns verwendeten Ausdrücke H und J mit den von Reissner verwendeten Ausdrücken F und G in der Beziehung

$$H = F\,\beta \sin\varphi, \quad J = G\,\frac{\sin\psi}{\delta}$$

stehen.

Wir wollen nun zeigen, dass es zwei Einfallswinkel ϑ gibt, für die sich die Formel (1) so vereinfacht, dass aus unsern Messungen die Rotationsgeschwindigkeit w_r eindeutig bestimmt werden kann. Diesen beiden Winkeln entsprechen zwei voneinander unabhängige Methoden zur Bestimmung von w_r.

A. *Erste Methode zur Bestimmung der Rotationswellen-Geschwindigkeit.*

Aus Formel (1') folgt: Es wird $D = 1$, d. h. ein Maximum, für $L = 0$ und $K \neq 0$. Wenn nun der Einfallswinkel ϑ den Wert ϑ^* annimmt, wo

$$\sin^2 \vartheta^* = \frac{w_1^2}{2\, w_r^2} \tag{2}$$

ist, so wird $\varrho - 2\,\mu\alpha^2 = 0$, also $H = 0$ und die Bedingung $L = 0$ ist erfüllt, wenn $\sin \psi = 0$ oder

$$\sin^2 \vartheta^* = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 - (n\, \Lambda_1/2)^2 \cdot \frac{1}{d^2} \tag{3}$$

ist (Λ_1 = bekannte Schallwellenlänge in der Flüssigkeit, $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Da ϑ^* in den Winkelbereich B_{II} (Totalreflexion der Dilatationswellen) fällt (vgl. Reissner, § 8[b]), muss man β durch $i\beta^{(1)}$ ersetzen, wo

$$\beta^{(1)} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{w_d^2}}$$

ist, ferner φ durch $i\,\varphi^{(1)}$ mit $\varphi^{(1)} = 2\,\pi\,\nu\,\beta^{(1)} d$. Dann wird

$$\cos \varphi = \cos i\,\varphi^{(1)} = \mathfrak{Cof}\, \varphi^{(1)} \quad \text{und} \quad \sin i\,\varphi^{(1)} = i\, \mathfrak{Sin}\, \varphi^{(1)}.$$

Also wird $K = -J\beta^{(1)}\delta\, \mathfrak{Sin}\, \varphi^{(1)} \neq 0$ und die Bedingung $D = 1$ ist daher erfüllt.

Aus (2) und (3) folgt

$$\sin^2 \vartheta^* = (n\, \Lambda_1/2)^2\, \frac{1}{d^2}\,. \tag{4}$$

Wir wollen die Formeln (2), (3) und (4) mit Hilfe der Messungen der Tabelle 2 an Hand der Fig. 6 geometrisch interpretieren. In der Figur ist als Abszisse $1/d^2$ und als Ordinate $\sin^2 \vartheta$ aufgetragen, und die Messungen stellen die schon im obern Teil der Fig. 4 wiedergegebene Schar von Kurven k dar, für die $D = 1$ ist. Zu jeder Kurve der Schar gehört ausserdem nach Gleichung (3) eine ganze Zahl n. Da dieselbe aber unbekannt ist, müssen wir die Kurven vorerst mit willkürlichen Indizes versehen. Wir bezeichnen also mit k_1 diejenige Kurve, für die bei festem Winkel ϑ die Dicke d den kleinsten Wert hat; die weiteren Kurven seien dann,

nach wachsenden d-Werten geordnet, $k_2 \ldots k_m$. In der Figur sind ferner die durch den Nullpunkt gehenden Geraden $g_1 \ldots g_n$

$$\sin^2 \vartheta = (n\, \Lambda_1/2)^2 \frac{1}{d^2} \tag{5}$$

eingezeichnet. Bei diesen ist der Index nicht willkürlich, sondern er bedeutet die in Gleichung (5) auftretende ganze Zahl n. Eine beliebige Gerade g_n schneidet nun die Kurvenschar k_m in m Punkten $S_{m,n}$. Von diesen m Punkten ist einer gesucht, nämlich derjenige, für den Gleichung (2) gilt, d. h. $\sin^2 \vartheta^* = \frac{w_1^2}{2\, w_r^2}$. Wir bezeichnen ihn mit S_n. Seine Ordinate gibt die gesuchte Rotationsgeschwindig-

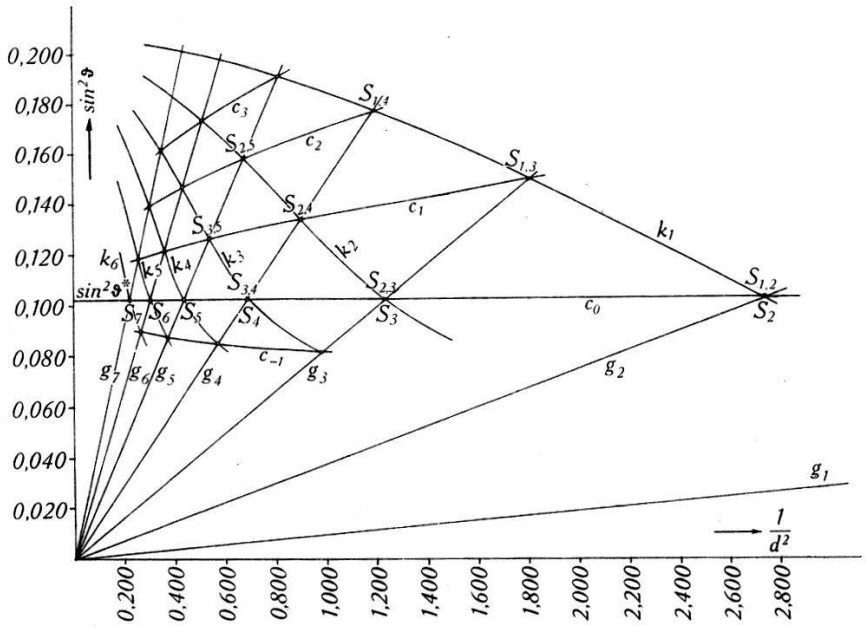

Fig. 6.

Graphische Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit und der zu den Kurven k_m gehörenden ganzen Zahlen n nach der 1. Methode.

keit, und sein Index n ist die zur Kurve k_m nach Gleichung (3) gehörende ganze Zahl n, d. h. der unbekannte, richtige Index der Kurve k_m. Für jede der Geraden g_n existiert nun ein solcher Schnittpunkt S_n; die Gesamtheit dieser Punkte S_n ist daran kenntlich, dass sie alle dieselbe Ordinate $\sin^2 \vartheta^* = \frac{w_1^2}{2\, w_r^2}$ haben.

Man hat also folgendes Verfahren zur Bestimmung von $\sin^2 \vartheta^*$ (d. h. zur Bestimmung von w_2) und zur Festlegung der zu jeder der Kurven k_m gemäss Gleichung (3) gehörenden ganzen Zahl n (d. h. dem sinngemässen Index): Von den $m \cdot n$ Schnittpunkten der Kurven k_m und der Geraden g_n liegen jeweils die Punkte $S_{m,\,p+m}$ auf einer Kurve c_p ($m = 1, 2, 3 \ldots$; $p = 0, \pm 1,$

$\pm 2, \ldots$). Eine dieser Kurven ist eine Gerade parallel zur Abszissenachse; ihre Ordinate ist $\sin^2 \vartheta^*$. Diese Gerade muss also mit c_0 bezeichnet werden, und die auf ihr liegenden Schnittpunkte sind die gesuchten Punkte S_n. Man sieht aus der Figur, dass die Auswahl, welche der Kurven c_p die Gerade darstellt, vollkommen eindeutig und willkürfrei ist. Hiermit ist die Rotationsgeschwindigkeit bestimmt, und es sind die Indizes der Kurven k_m festgelegt. Im Fall der Fig. 6 wird der richtige Index der mit k_1 bezeichneten Kurve $= 2$, und entsprechend gilt für die übrigen Kurven $n = m + 1$.

Nach dieser Methode wurde aus den Messungen der Tabelle 2 in Fig. 6 die Ordinate $\sin^2 \vartheta^* = 0{,}1028$ und aus den Messungen der Tabelle 3 in Fig. 5 $\sin^2 \vartheta^* = 0{,}083$ bestimmt; daraus ergibt sich beide Male als Geschwindigkeit der Rotationswellen derselbe Wert $w_r = 3220$ m/sec.

B. *Zweite Methode zur Bestimmung der Rotationswellen-Geschwindigkeit.*

Für hinreichend grosse Einfallswinkel ϑ (d. h. weit entfernt vom Grenzwinkel der Totalreflexion der Dilatationswellen) wird $\mathfrak{Sin}\, \varphi^{(1)} \cong \mathfrak{Cof}\, \varphi^{(1)} \gg 1$. Daher wird

$$D = \frac{-4 J^2 \beta^2 \delta^2}{\left\{\left[H^2 + \beta^{(1)2} (J^2 \delta^2 - 1)\right] \frac{\sin \psi}{\beta^{(1)}} - 2 H J \delta \cos \psi\right\}^2 + 4 J^2 \beta^2 \delta^2}. \tag{6}$$

Wegen $J \beta \delta \neq 0$ wird $D = 1$, wenn der Ausdruck in $\{\ \} = 0$ wird. Hieraus folgt

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2 H J \beta^{(1)}}{H^2 - \beta^{(1)2} (J^2 \delta^2 - 1)} \delta = k \delta, \tag{7}$$

wo

$$k = \frac{2 H J \beta^{(1)}}{H^2 - \beta^{(1)2} (J^2 \delta^2 - 1)} \neq 0.$$

Für kleines δ (d. h. in der Nähe der Totalreflexion der Rotationswellen) folgt aus $\operatorname{tg} \psi = k \delta$

$$\psi = \pi n + (-1)^n k \delta.$$

Hierin ist $\psi = 2 \pi \nu d \delta$. Also wird

$$\delta^2 = \frac{1}{w_r^2} - \frac{\sin^2 \vartheta}{w_1^2} = \left[\frac{\pi n}{2 \pi \nu d - (-1)^n k}\right]^2,$$

also

$$\sin^2 \vartheta = \left(\frac{w_1}{w_r}\right)^2 - \frac{n^2}{(2 d/\Lambda_1 - (-1)^n k/\pi w_1)^2}. \tag{8}$$

Lässt man nun $d \rightarrow \infty$ werden, so wird

$$\sin^2 \vartheta = \left(\frac{w_1}{w_r}\right)^2 = \sin^2 \vartheta''. \tag{9}$$

Die Kurve $D = 1$ schneidet also in Fig. 7 die Ordinatenaxe im Punkt $\sin^2 \vartheta''$, d. h. im Grenzwinkel der Totalreflexion der Rotationswellen.

Diese Gleichungen geben eine weitere Methode zur Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit sowie der zu den Kurven k_m gehörenden ganzen Zahlen n. Dies soll — wiederum am Beispiel

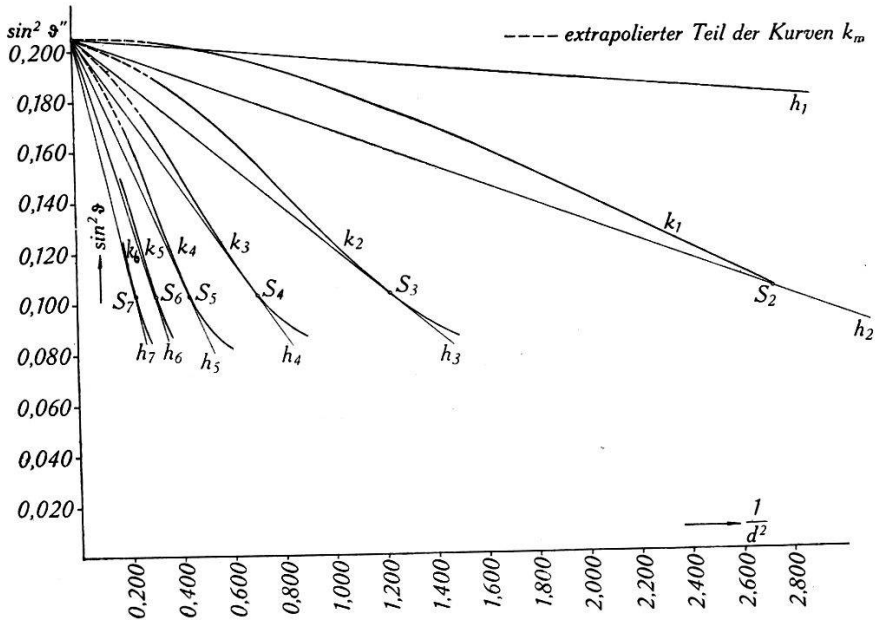

Fig. 7.

Graphische Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit und der zu den Kurven k_m gehörenden ganzen Zahlen n nach der 2. Methode.

der Messungen der Tabelle 2 — an Hand der Fig. 7 gezeigt werden. In der Figur sind als Abszisse und als Ordinate wieder $1/d^2$ bzw. $\sin^2 \vartheta$ aufgetragen. Die Messungen ergeben also dieselben Kurven k_m wie in Fig. 6; der einzige Unterschied ist, dass die Kurven k_m hier bis zum Schnittpunkt mit der Ordinatenachse extrapoliert eingezeichnet sind. Dieser Schnittpunkt, für den $1/d^2 = 0$, d. h. $d = \infty$ wird, muss nach (9) für alle Kurven der gleiche sein. Man sieht aus der Figur, dass sich die Kurven tatsächlich zwanglos derart extrapolieren lassen. Aus dem Zahlwert der Ordinate $\sin^2 \vartheta'' = 0{,}2055$ berechnet sich dann nach Gleichung (9) die Rotationsgeschwindigkeit. Der Vergleich mit Gleichung (2) zeigt, dass

$$\sin^2 \vartheta'' = 2 \sin^2 \vartheta^* \tag{10}$$

sein muss. Aus unsern Messungen hatten wir $\sin^2 \vartheta^* = 0{,}1028$

erhalten. Innerhalb der Messfehler ist also Gleichung (10) erfüllt, und man erhält daher für die Rotationsgeschwindigkeit auch denselben Wert wie nach der ersten Methode.

Nun müssen noch die zu den Kurven k_m gehörenden ganzen Zahlen n bestimmt werden. Zu diesem Zweck sind in Fig. 7 die Geraden $h_1 \ldots h_n$

$$\sin^2 \vartheta = \left(\frac{w_1}{w_r}\right)^2 - (n\,\Lambda_1/2)^2 \frac{1}{d^2} \tag{11}$$

eingezeichnet; hierbei bedeutet der Index die in Gleichung (11) vorkommende ganze Zahl n. Alle Geraden h_n schneiden die Ordinatenachse im gleichen Punkte $\sin^2 \vartheta''$. Für den Ordinatenwert $\sin^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta^*$ erfüllen diese Geraden aber wegen Gleichung (3) auch noch die Bedingung $D = 1$, d. h. jede Gerade h_n fällt an dieser Stelle mit einer Kurve k_m zusammen und der richtige Index n der Kurve k_m ist dann derjenige der betreffenden Geraden h_n. Man sieht aus der Figur, dass tatsächlich jede Kurve k_m von einer Geraden h_n tangiert wird. Die Berührungspunkte fallen, wie es sein muss, ausserdem zusammen mit den beim ersten Verfahren zur Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit mit S_n bezeichneten Punkten. Natürlich wird wieder die zu k_1 gehörende Zahl $n = 2$, und entsprechend sind auch die Indizes der übrigen Kurven k_m um 1 zu erhöhen.

§ 5. Diskussion der Messungen und Vergleich mit der Reissnerschen Theorie.[1])

Wir haben die Reissnersche Theorie bisher nur zur Bestimmung der elastischen Konstanten (w_d, w_r) benützt. Dazu war bei der ersten Methode nur die Kenntnis des Verlaufs der Kurven k_m in der Umgebung der Punkte S_n notwendig, bei der zweiten Methode ausserdem noch die Kenntnis des Schnittpunktes dieser Kurven mit der Ordinatenachse. Nachdem jetzt die elastischen Konstanten bestimmt sind, frägt es sich, wie genau die gemessenen Kurven in ihrem gesamten Verlauf mit der Reissner'schen Theorie übereinstimmen.

Die übersichtlichsten Verhältnisse hat man im Bereich B_{II} (Totalreflexion der Dilatationswellen), und zwar für die Maxima der Durchlässigkeit, d. h. für $D = 1$. Die Bedingung dafür ist Gleichung (7) oder

$$\sin \psi = \frac{2\,H J \beta^{(1)} \delta}{H^2 - \beta^{(1)2}\,(J^2 \delta^2 - 1)} \cos \psi .$$

[1]) *Anmerkung bei der Korrektur* (11. II. 38): Die hier in §§ 4 und 5 behandelten Fragen werden auch noch in einer demnächst erscheinenden Arbeit von R. Bär diskutiert werden.

Diese zwischen d und ϑ bestehende transzendente Gleichung wurde nun so gelöst, dass für eine Reihe vorgegebener Winkel ϑ aus den Gleichungen die zugehörige Plattendicke d zuerst angenähert graphisch und dann durch Interpolation mit Hilfe trigonometrischer Tabellen möglichst genau berechnet wurde. Die so für die Ultraschallfrequenz $7{,}55 \cdot 10^6$ Hz und Wasser als Flüssigkeit berechneten theoretischen Kurven sind in Fig. 4 und für die Ultraschallfrequenz $2{,}007 \cdot 10^6$ Hz und Xylol als Flüssigkeit in Fig. 5 eingezeichnet. Man sieht, dass zwischen den experimentellen und den theoretischen Kurvenscharen noch gewisse systematische Abweichungen bestehen. Nur für $\sin^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta^*$ stimmen die Kurven natürlich überein. Die für die andern Winkel bestehenden kleinen Differenzen — bei gegebenem Einfallswinkel ϑ sind die gemessenen Dicken um maximal 5% kleiner als die berechneten — scheinen ausserhalb der Beobachtungsfehler zu liegen. Ob sie durch systematische Fehler der Versuchsanordnung (z. B. Verwendung von Keilen statt exakt planparallelen Platten) verursacht sind, oder ob ein Versagen der Theorie vorliegt, muss vorerst unentschieden bleiben.

Im Bereiche B_{I} wird die theoretische Bestimmung von d oder ϑ für maximale Durchlässigkeit wesentlich komplizierter, da die Lösung der Gleichung $N = 0$ durch das Auftreten der Produkte $\sin \varphi \sin \psi$ und $\cos \varphi \cos \psi$ erschwert wird. Der Vergleich zwischen Theorie und Experiment wurde daher nur bei einem willkürlich gewählten Einfallswinkel und zwar bei $11^0 00'$ durchgeführt. Die Rechnung erfolgte bei diesem Winkel so, dass die Dicken d gesucht wurden, für die $K \simeq 0$ wird; für diese d wurde dann der Wert der Funktion L berechnet und daraus nach Gleichung (1) die Durchlässigkeit D bestimmt. Man erhält dann:

$d =$	0,668	0,963	1,216	1,365	1,627 mm
$K =$	0,02	0,64	0,41	0,01	0,65
$L =$	0,01	0,26	52,01	33,79	0,42
$D =$	0,94	0,97	0,00	0,00	0,91

Experimentell liegen Maxima bei

$d =$	0,648	0,979			1,602

und Minima bei

$d =$			1,214	1,386	

so dass also eine sehr befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment besteht.

Um noch einen Überblick über den Verlauf der theoretischen Durchlässigkeitskurve beim Einfallswinkel $11^0 00'$ zu erhalten,

wurde die Durchlässigkeit ausserdem für einige weitere dazwischenliegende, passend gewählte Keildicken berechnet. Sämtliche theoretischen Durchlässigkeitswerte sind in Fig. 8 in Kurvenform eingezeichnet. Ferner sind in der Figur die bei diesem Einfallswinkel gemessenen Lichtintensitätsverhältnisse I/I_0 eingetragen. Da der theoretische Zusammenhang zwischen Licht- und Schallintensität nicht bekannt ist, so dass die gemessene Intensität der Lichtbeugung sich nicht auf Schallintensität umrechnen lässt, kann man natürlich nur für die Abszissenwerte der Maxima und Minima der theoretischen und experimentellen Kurven Übereinstimmung erwarten. Diese ist aber innerhalb der Messfehler auch tatsächlich vorhanden.

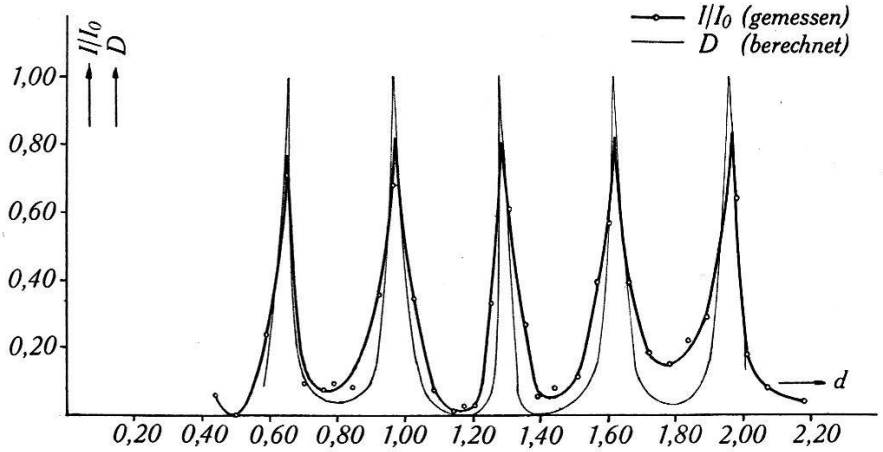

Fig. 8.
Durchlässigkeit D und I/I_0 als Funktion von d beim Einfallswinkel $\vartheta = 11^0 00'$ [$7{,}55 \cdot 10^6$ Hz, Glaskeil in Wasser].

Zusammenfassend ergibt sich also, wenn man von den oben erwähnten, noch nicht aufgeklärten systematischen Abweichungen absieht, eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Hieraus schliessen wir, dass Dilatations- und Rotationsgeschwindigkeit unabhängig von Plattendicke und Einfallswinkel sind. Die Dilatationsgeschwindigkeit wird im Gebiet $1 \cdot 10^6$—$12 \cdot 10^6$ Hz unabhängig von der Frequenz $= 5500 \pm 20$ m/sec; die Rotationsgeschwindigkeit wurde nur für $2 \cdot 10^6$ und $7{,}5 \cdot 10^6$ Hz gemessen; sie ergibt sich hier ebenfalls als frequenzunabhängig $= 3220 \pm 15$ m/sec. Aus diesen Zahlwerten für die Schallgeschwindigkeiten berechnet man die folgenden Werte für die Elastizitätskoeffizienten des Jenaer Glases Zk6.

	Ultraschall:	statisch:
Poissonsche Zahl	$\sigma = 0{,}239$	$\sigma = 0{,}226$
Elastizitätsmodul	$E = 6710$ kg/mm²	$E = 6498$—6766 kg/mm²
Torsionsmodul	$T = 2708$ kg/mm²	$T = 2700$ kg/mm²

Der Vergleich mit den daneben angeschriebenen statisch bestimmten Elastizitätskoeffizienten zeigt, dass beide innerhalb der Messfehler übereinstimmen.

§ 6. Bemerkungen zu zwei Arbeiten von Bez-Bardili.

Vor einiger Zeit hat Herr Bez-Bardili[1]) Messungen der beiden Schallgeschwindigkeiten in einigen isotropen festen Körpern veröffentlicht, die teilweise ebenfalls mit Hilfe der (damals kurz vorher) von Bär und Walti beschriebenen Methode angestellt wurden. Da die Resultate den hier mitgeteilten vollkommen widersprechen, ist es nötig, über diese Arbeit einige Bemerkungen zu machen:

1. Schon in einer früheren Veröffentlichung hatte derselbe Verfasser[2]) mit der (damals ebenfalls vorher) von Bär und Meyer[3]) beschriebenen „Lochblenden-Methode" Messungen über die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern angestellt. In methodischer Hinsicht stellten diese Versuche gegenüber Bär und Meyer keinerlei Fortschritt dar; die mitgeteilten Werte der Schallgeschwindigkeit sind aber ausserdem noch vollkommen falsch. Die Werte sind nämlich berechnet aus Messungen der Brechung des Schalls beim Durchgang durch ein Prisma des betreffenden Materials. Die scheinbar sich ergebende Dispersion der Schallgeschwindigkeit rührt daher, dass Bez-Bardili bei der Interpretation der Messungen die Tatsache vergass, dass in festen Körpern neben der Dilatations- auch noch eine Rotationsschallgeschwindigkeit existiert.

2. Gegen die zweite Arbeit kann man diesen Vorwurf nicht mehr erheben. Hier werden statt der Prismen schräg in den Strahlengang gestellte planparallele Platten verwendet (was im wesentlichen dasselbe ist wie die Benützung spitzer Keile), und es wird nun bei einem Teil der Messungen auch die kurz vorher von Bär und Walti mitgeteilte Theorie zu Grunde gelegt. Obwohl gegen die Messungen selbst ebenfalls noch eine Reihe begründeter Einwände gemacht werden können, scheint es nicht nötig, darauf näher einzugehen, da die unwahrscheinlichen Resultate, die sich ergeben, wohl hauptsächlich von der falschen Interpretation der Messungen herrühren. Bez-Bardili findet nämlich, dass beide Schallgeschwindigkeiten vom Verhältnis $V = \frac{\text{Wellenlänge}}{\text{Plattendicke}}$ ab-

[1]) W. Bez-Bardili, ZS. f. Phys. **96**, 761 (1935).
[2]) W. Bez-Bardili, Phys. ZS. **36**, 20 (1935).
[3]) R. Bär und Edgar Meyer, Phys. ZS. **34**, 393 (1933).

hängen, und zwar derart, dass für kleines V asymptotisch die Geschwindigkeit im unendlich ausgedehnten Medium erreicht wird, während für grosses V beide Geschwindigkeiten auf Null herabsinken. Dieses Resultat rührt wohl nur daher, dass Bez-Bardili die Theorie von Bär und Walti als allgemeingültig voraussetzt, obwohl von diesen Verfassern ausdrücklich betont wurde, dass ihre Theorie nur in Spezialfällen (senkrechte Inzidenz oder Gebiet der Totalreflexion der Dilatationswellen) Gültigkeit haben könne. Nachdem jetzt die strenge Reissner'sche Theorie vorliegt, sieht man, dass die frühere vereinfachte Theorie nicht einmal bei Totalreflexion der Dilatationswellen anwendbar ist. Aus unsern neuen Messungen bzw. aus deren Interpretation mit Hilfe der Reissnerschen Theorie ergibt sich, dass alle Resultate Bez-Bardili's, soweit sie nach der Bär-Walti'schen Methode erhalten wurden, hinfällig sind.

3. Bez-Bardili hat aber noch nach einer weiteren Methode Geschwindigkeitsmessungen ausgeführt, nämlich durch Versuche zur Bestimmung des Grenzwinkels der Totalreflexion. Die Anordnung ist dieselbe wie bei den unter 2. beschriebenen Versuchen; sie wird aber, da jetzt der Grenzwinkel der Totalreflexion gemessen werden soll, als „Ultraschalltotalreflektometer" bezeichnet. Zu diesem Zweck wird die Platte, ausgehend von grossen Einfallswinkeln, bei denen kein Schall durch dieselbe hindurchgeht, nach kleinen Winkeln hin verdreht und die Stellung beobachtet, wo sie anfängt, schalldurchlässig zu werden. Dieser Winkel wird als Grenzwinkel der Totalreflexion der Rotationswellen angesprochen und hieraus die Rotationsgeschwindigkeit errechnet. Beim weitern Drehen der Platte erscheinen dann die von der Interferenz der Rotationswellen herrührenden Maxima und Minima; hierauf wird die durchgelassene Intensität wieder schwächer und geht eventuell sogar ganz auf Null zurück. Bei noch kleinern Winkeln kommt dann eine zweite Stellung der Platte, wo sie wieder beginnt, schalldurchlässig zu werden. Dieser Winkel wird als Grenzwinkel der Totalreflexion der Dilatationswellen angesehen und daraus die Dilatationsgeschwindigkeit berechnet.

Gegen diese Messmethode sind nun folgende Einwände zu machen: Auch unter der Annahme, dass der Grenzwinkel der Totalreflexion mit dieser Versuchsanordnung richtig gemessen werden könnte, wäre doch die Bezeichnung „Totalreflektometer" keine glückliche; denn es wird ja der durchgelassene und nicht der reflektierte Schall gemessen. Sinngemäss wäre die Anordnung daher als „Totalrefraktometer" zu bezeichnen. Von einem einwandfreien Totalrefraktometer unterscheidet sie sich aber durch den

wesentlichen Fehler, dass nicht die von einer dicken Platte des zu untersuchenden Materials durchgelassene Intensität gemessen wird, sondern die von einer nur wenige Wellenlängen dicken Schicht. Dieser Fehler muss jedem Schalltotalrefraktometer auch notwendig anhaften, weil bei Verwendung grosser Schichtdicken der Schall vollständig absorbiert würde. Unter derartigen Versuchsbedingungen hat man aber bekanntlich im Grenzwinkel der Totalreflexion gar keine „Total"-reflexion mehr, sondern die beim Licht viel untersuchte[1]) sog. „Reflexion an einer dünnen Lamelle".

Beim Ultraschall ist diese Erscheinung wahrscheinlich noch nicht untersucht worden. Nachdem jetzt die Reissner'sche Theorie vorliegt, wären derartige Versuche, wenn sie mit quantitativen Messungen der Schallintensität verbunden würden, sicher von grossem Interesse. Wenn die Schallintensität aber aus der Lichtbeugung nur qualitativ abgeschätzt wird, wie dies bei unsern Versuchen und denjenigen Bez-Bardili's der Fall war, so kann man, wie wir nun mit Hilfe der Reissner'schen Theorie zeigen wollen, nach dieser Methode unmöglich Messungen der Schallgeschwindigkeiten ausführen. Die Voraussetzung, dass man eine Schallgeschwindigkeit mit einem Totalrefraktometer aus dem Grenzwinkel der Schalldurchlässigkeit bestimmen kann, ist natürlich die, dass ein solcher Grenzwinkel auch tatsächlich existiert. In Wirklichkeit ist dies aber, wie Fig. 9 zeigt, bei einer dünnen Lamelle nicht der Fall. In der Figur sind zwei mit Hilfe der Reissner'schen Theorie in der Umgebung des Grenzwinkels der Totalreflexion der Rotationswellen berechnete Kurven konstanter Schalldurchlässigkeit (nämlich $D = 2\%$ und 5%, sowie im Grenzwinkel selbst noch die Punkte 1% und 10%) eingetragen. Der Figur sind als Messdaten Zahlwerte zu Grunde gelegt, die übereinstimmen mit von uns ausgeführten Messungen, auf welche wir unten noch näher eingehen, nämlich: Glaskeil I in Wasser mit Grenzwinkel $\vartheta'' = 26^0 58'$; als Abszisse ist d/Λ_2 (Λ_2= Wellenlänge der Rotationswellen, in der Fig. mit $\bar{\Lambda}$ bezeichnet!) als Ordinate der Winkel ϑ aufgetragen. Die Messung des Winkels ϑ'', welche physikalisch bedeutet, dass man eine Platte der Dicke d bis zu einem solchen ϑ dreht, dass ein bestimmter Bruchteil $\varkappa$ der Schallenergie durch die Platte hindurchgeht, heisst geometrisch in Fig. 8, dass man die Kurve konstanter Durchlässigkeit $D = \varkappa$ zum Schnitt bringt mit der zu diesem d gehörigen Geraden parallel zur Ordinatenachse. Man sieht, dass erstens dieser Schnittpunkt sehr schlecht definiert ist, weil

[1]) Winkelmanns Hdb. **6**, Seite 1275 (Drude). C. Schäfer und G. Gross, Ann. d. Phys. **32**, 648 (1910). R. W. Wood, Phys. Opt. Seite 418 (3. Ed.), Mac Millan, New-York 1934.

die Kurve und die Gerade sich unter einem spitzen Winkel schneiden, und dass zweitens der Punkt je nach dem für $\varkappa$ gewählten Wert sehr viel über oder unter dem Grenzwinkel ϑ'' liegen kann. Bei Bez-Bardili ist offenbar $\varkappa$ klein; deshalb erhält er einen zu grossen Wert für ϑ'' und daher einen zu kleinen für die Schallgeschwindigkeit. Ausserdem wird diese fiktive Schallgeschwindigkeit, wie man aus der Figur sieht, noch von d abhängig, aber natürlich derart, dass sich bei Änderung der Frequenz für gleiche Werte von d/Λ_r auch gleiche Werte der Schallgeschwindigkeit ergeben.

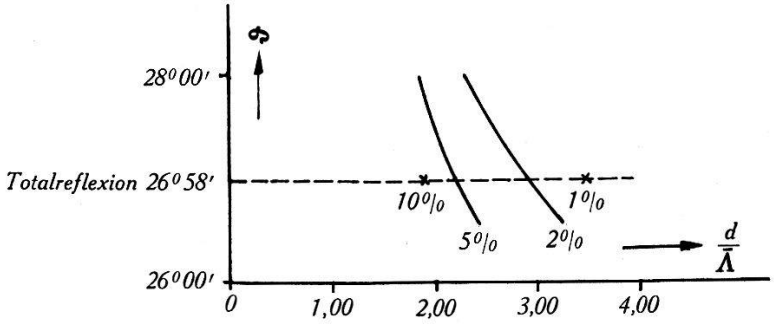

Fig. 9.
Kurven konstanter Schalldurchlässigkeit beim Grenzwinkel der Totalreflexion der Rotationswellen [Glaskeil in Wasser].

Obgleich hiermit die Erklärung der scheinbaren, von Bez-Bardili gefundenen Gesetzmässigkeiten gegeben sein dürfte, wurde doch noch versucht, dieselben auch experimentell zu reproduzieren. Zu diesem Zweck wurde am Glaskeil I bei der Frequenz $7{,}55 \cdot 10^6$ Hz in Wasser bei einer Reihe von Dicken der Grenzwinkel der Totalreflexion der Rotationswellen dadurch zu bestimmen versucht, dass auf diejenige Lage des Keils eingestellt wurde, bei der die Lichtbeugung gerade anfing, sichtbar zu werden. Die Versuchsresultate sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Man sieht,

Tabelle 5.

Messung des Winkels ϑ, für den der Keil schalldurchlässig wird im Gebiet der Totalreflexion der Rotationswellen; Glaskeil I in Wasser, $7{,}55 \cdot 10^6$ Hz.

d (mm)	d/Λ_r	ϑ	w_r (m/sec)
0,477	1,118	32°56′	2685
0,955	2,24	27°45′	3130
1,260	2,96	27°35′	3150
1,550	3,61	27°35′	3150
1,840	4,31	27°27′	3170
2,130	5,00	27°20′	3190

dass auf diese Weise nicht der Grenzwinkel der Totalreflexion $\vartheta'' = 26^0 58'$ gemessen wird, sondern irgend ein grösserer Wert, der bis zu 33^0 betragen kann. Entsprechend erhält man für w_r nicht 3220 m/sec, sondern Werte bis herab zu 2685 m/sec.

§ 7. Zusammenfassung.

1. In spitzen, aus dem Jenaer Glas Zk6 hergestellten Keilen werden die Maxima und Minima der Schalldurchlässigkeit mit Hilfe der Lichtbeugung bestimmt, und zwar bei senkrechter Inzidenz im Ultraschallgebiet von $1 \cdot 10^6$—$12 \cdot 10^6$ Hz; bei schiefer Inzidenz für 2,0 und $7{,}5 \cdot 10^6$ Hz.

2. Aus den Messungen wird mit Hilfe der Reissner'schen Theorie die Geschwindigkeit der Dilatations-(Longitudinal-)wellen $w_d = 5500 \pm 20$ m/sec und die Geschwindigkeit der Rotations-(Transversal-)wellen $w_d = 3220 \pm 15$ m/sec berechnet. Die beiden Geschwindigkeiten zeigen weder Winkel- noch Dickenabhängigkeit; sie stimmen ferner innerhalb der Messfehler überein mit denjenigen, die sich aus den statisch gemessenen Elastizitätskoeffizienten berechnen.

3. Für das Gebiet der Totalreflexion der Dilatationswellen werden die Kurven maximaler Durchlässigkeit auf Grund der Reissner'schen Theorie berechnet und mit den experimentellen Kurven verglichen. Es ergibt sich, abgesehen von kleineren systematischen Abweichungen, deren Ursache noch nicht festgestellt werden konnte, eine befriedigende Übereinstimmung. In dem Gebiete, wo Dilatations- und Rotationswellen durch den Keil hindurchgehen, wird der Vergleich zwischen der Theorie und den Messungen für einen willkürlich gewählten Wert des Einfallswinkels (nämlich $\vartheta = 11^0 00'$ für Glaskeil in Wasser) durchgeführt. Auch hier ergibt sich gute Übereinstimmung von Theorie und Experiment.

4. Es wird gezeigt, dass alle wesentlichen Ergebnisse einer Arbeit von Bez-Bardili[1]), in der das von uns behandelte Problem mit der gleichen experimentellen Anordnung untersucht wurde, unhaltbar sind, weil den Experimenten eine falsche Theorie zu Grunde gelegt wird.

Zum Schlusse spreche ich Herrn Prof. Dr. Edgar Meyer meinen herzlichsten Dank aus für das fördernde Interesse, das er dieser Arbeit immer entgegenbrachte. Herrn Prof. Dr. Richard Bär, unter dessen Leitung die Arbeit ausgeführt wurde, bin ich

[1]) ZS. f. Phys. **96**, 761 (1935).

dafür zu grösstem Dank verpflichtet. Herrn Dr. F. Levi danke ich bestens für viele wertvolle Ratschläge.

Es wurde mehrfach erwähnt, dass die Messungen dieser Arbeit nur mit Hilfe einer Theorie des Schalldurchgangs durch eine planparallele Platte sinnvoll interpretiert werden können. Daher bin ich Herrn Prof. Dr. H. Reissner in Berlin-Charlottenburg zu allergrösstem Dank verpflichtet, dass er die Bereitwilligkeit hatte, diese Theorie auszuarbeiten. Schliesslich danke ich Herrn Dr. V. Bargmann für eine nützliche Umformung der Schlussformel für die Schalldurchlässigkeit, durch welche die Rechnung wesentlich vereinfacht wurde.

Physikalisches Institut der Universität Zürich.