Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 11 (1938)

Heft: II

Artikel: Théorie de la propagation de la lumière dans un milieu atomiquement stratifié

Autor: Weigle, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110847

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorie de la propagation de la lumière dans un milieu atomiquement stratifié

par **J. Weigle.**

(22. XII. 37.)

I. Introduction.

La théorie dynamique de la propagation des rayons X dans les cristaux, due à EWALD[1]), rend compte d'une façon admirable des phénomènes de diffraction qui se produisent alors. LAUE[2]) a donné à cette théorie une forme un peu différente en remplaçant les dipoles d'EWALD par une distribution continue et périodique de constante diélectrique à l'intérieur du cristal. BRILLOUIN[3])a étudié la propagation de la lumière dans les liquides stratifiés par les ultrasons et montré comment les fonctions de MATHIEU intervenaient dans le problème. EXTERMANN et WANNIER[4]), en reprenant la méthode de BRILLOUIN mais en s'inspirant des travaux d'EWALD-LAUE, ont pu donner la théorie complète du phénomène. Enfin, EXTERMANN[5]) a montré que cette méthode pouvait se généraliser en la rattachant à la théorie des rayons X. La théorie d'EWALD-LAUE devient alors un cas particulier d'une théorie beaucoup plus générale.

Jusqu'ici, cette théorie générale n'avait été donnée que pour les cas où la longueur d'onde lumineuse était de l'ordre de grandeur de la périodicité du milieu (rayons X ou réseau optique[6])), ou alors, beaucoup plus petite que celle-ci, comme dans les ultrasons.

Il nous a semblé intéressant d'étudier le cas où la longueur d'onde de la lumière est beaucoup plus grande que les périodicités

---

[1]) EWALD, ZS. für Kristall. (A), **97**, 1, 1937.

[2]) LAUE, Ergeb. der Exakt. Naturwiss., **10**, 133, 1931.

[3]) BRILLOUIN, La diffraction de la lumière par les ultrasons. Actualités scientifiques, Hermann, Paris 1933.

[4]) EXTERMANN et WANNIER, Helv. Phys. Act. **9**, 520, 1936.

[5]) EXTERMANN, Helv. Phys. Act. **10**, 185, 1937.

[6]) PATRY, Helv. Phys. Act. (paraîtra sous peu).

du milieu dans lequel elle se propage. Ce problème est, en effet, celui de la propagation de la lumière dans les cristaux; on trouvera sa solution dans les pages qui suivent.

Nous avons supposé, pour ne pas compliquer le problème, que nous avions à faire à un milieu périodique dans une seule direction, donc stratifié, représentant le cristal. La période de stratification est de l'ordre de grandeur des dimensions atomiques (10^{-8} cm.), tandis que la lumière est visible, sa longueur d'onde étant de l'ordre de 10^{-5} cm. Il ne serait pas difficile d'étendre nos résultats à un cristal réel, périodique en trois dimensions; les calculs seuls seraient beaucoup plus compliqués, mais les résultats resteraient essentiellement semblables à ceux auxquels nous sommes arrivés. Nous avons aussi supposé que la constante diélectrique microscopique (à l'intérieur même des atomes ou des molécules composant le cristal) était donnée et qu'en plus elle était scalaire, négligeant ainsi l'anisotropie optique des molécules. Nous verrons que le cristal agit au point de vue macroscopique, comme s'il possédait une constante diélectrique tensorielle, cette anisotropie étant amenée par la répartition anisotrope des molécules dans l'espace et non pas par les propriétés anisotropes de celles-ci. Nous devons donc nous attendre à retrouver la théorie classique de la propagation de la lumière dans les cristaux pour le cas où la longueur d'onde peut être considérée comme infinie par rapport à la période du réseau matériel. C'est bien là ce qui ressort de nos calculs, mais ils donnent en plus une relation qui lie l'indice de réfraction ordinaire avec l'indice de réfraction extraordinaire, tous deux devant être calculés à partir de la constante diélectrique microscopique. Notre théorie explique donc quelle est la propriété atomique (pour des atomes isotropes) qui détermine la biréfringence et qui permet de prévoir si celle-ci doit être positive ou négative.

D'autre part, si Λ/λ (Λ période du cristal, λ longueur d'onde de la lumière) n'est pas négligeable devant l'unité, d'autres phénomènes interviennent, qui ne peuvent pas être donnés par la théorie élémentaire de Fresnel. En effet, dans ce cas, les électrons d'un même atome ne vibrent plus en phase les uns avec les autres lorsqu'ils sont excités par la lumière (ce qui aurait été le cas avec $\Lambda/\lambda \simeq 0$). Il y aura donc des ondes diffusées latéralement, ondes qui sont l'analogue des ondes des rayons X diffractées ou "réfléchies" par les plans réticulaires du cristal. Comme Λ/λ est très petit, elles auront une intensité très petite mais, dans certaines conditions, elles pourront être observées.

II. Théorie générale.

Nous supposerons le milieu stratifié donné par sa constante diélectrique

$$\varepsilon(x) = \sum_n \varepsilon_n \, e^{2\pi i n b . x} \tag{1}$$

nb étant les « vecteurs d'onde » des ondes matérielles figées ou, si l'on préfère, b étant le vecteur de base du réseau réciproque ($b = 1/\Lambda$) Λ étant la période du milieu stratifié. Ce milieu sera donc représenté dans l'espace réciproque par la série des vecteurs nb ou par une série de points équidistants de b échelonnés le long de l'axe des X (figure 1).

Nous aurons besoin, par la suite, de connaître l'expansion en série de Fourier de l'inverse de la constante diélectrique

$$\psi(x) = \frac{1}{\varepsilon(x)} = \sum_m \psi_m \, e^{2\pi i m b x} . \tag{2}$$

Elle a évidemment la même période que $\varepsilon(x)$ et par conséquent elle fait intervenir le même vecteur réciproque b.

Si l'on désire connaître les ψ_m en fonction des ε_n, il faudra résoudre une série d'équations qui seront utiles pour les calculs que nous aurons à faire. Nous poserons donc

$$1 = \frac{1}{\varepsilon(x)} \psi(x) = \sum_n \sum_m \varepsilon_n \, \psi_m \, e^{2\pi i (m+n) b x} .$$

En écrivant

$$n + m = p$$

on a

$$1 = \sum_p e^{2\pi i p b x} \sum_n \psi_{p-n} \, \varepsilon_n$$

et l'on voit que, pour satisfaire cette équation, il faut avoir

$$\begin{cases} \sum_n \varepsilon_n \, \psi_{-n} = 1 \\ \sum_n \varepsilon_n \, \psi_{p-n} = 0 \qquad p \neq 0 . \end{cases} \tag{3}$$

Ces équations sont celles qui nous permettent de calculer les ε_n en fonction des ψ_m ou inversément.

Surfaces de dispersion.

Calculons maintenant, pour une onde de fréquence ν, la solution des équations de MAXWELL dans ce milieu. En écrivant cette solution sous la forme

$$\vec{D} = \sum_n \vec{D}_n \, e^{2\pi i((\vec{k}_n \cdot \vec{r}) - \nu t)}$$

$\vec{D}$ étant le vecteur de déplacement électrique et $\vec{k}_n$ les vecteurs d'ondes des ondes planes partielles, on sait[1]) qu'on doit avoir

$$\vec{k}_n = \vec{k}_0 + n\vec{b} \tag{4}$$

et que les $\vec{D}_n$ doivent satisfaire les relations fondamentales

$$\frac{k^2}{k_n^2} \vec{D}_n = \sum_m \psi_{n-m} \vec{D}_{m \perp kn} \, . \tag{5}$$

$\vec{D}_{m \perp kn}$ est la composante de D_m perpendiculaire au vecteur $\vec{k}_n$ et $k = \nu/c$ est le vecteur d'onde de l'onde se propageant dans le vide. La grandeur du vecteur k_0 qui, pour l'instant, est indéterminée, sera fixée par une condition de convergence.

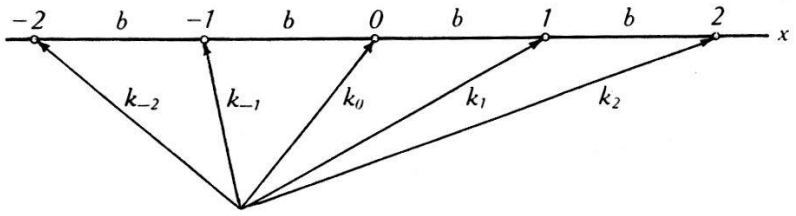

Fig. 1.
Vecteurs d'onde des ondes formant une solution des équations de MAXWELL.

L'équation (4) montre comment on obtient les vecteurs des ondes planes partielles à partir du vecteur $\vec{k}_0$ de l'une d'entre elles. Si l'on a tracé celui-ci de façon à ce qu'il aboutisse en un point du réseau réciproque auquel nous donnerons l'indice 0, les autres vecteurs d'onde partant de la même origine que $\vec{k}_0$ aboutiront en chacun des points du réseau réciproque (figure 1).

Les amplitudes relatives de ces différentes ondes partielles sont déterminées par l'équation (5). C'est alors l'ensemble de ce groupe d'ondes qui est une solution particulière des équations de MAXWELL dans le milieu périodique.

Nous désirons maintenant connaître k_0 en fonction de son orientation dans le réseau.

---

[1]) EXTERMANN, loc. cit., et LAUE, loc. cit.

Remarquons tout d'abord que tous les $\vec{k}_n$ se trouvent dans un même plan contenant le réseau réciproque. Cela nous permettra de décomposer l'équation vectorielle (5) en deux séries d'équations, l'une donnant des relations entre les composantes des $\vec{D}_n$ perpendiculaires au plan des $\vec{k}_n$, et l'autre entre les composantes contenues dans ce plan. Cela signifie que si l'onde $\vec{k}_0$ est polarisée avec son vecteur $\vec{D}_0$ perpendiculaire au plan des $\vec{k}_n$ ou au contraire dans le plan des $\vec{k}_n$, toutes les autres ondes seront polarisées de la même manière. Les équations (5) deviennent ainsi

$$\sum_m{}' \psi_{n-m} D_m' + \left(\psi_0 - \frac{k^2}{k_n^2}\right) D_n' = 0 \tag{6}$$

(polarisation perpendiculaire)

et

$$\sum{}' \psi_{n-m} D_m'' \cos(k_n, k_m) + \left(\psi_0 - \frac{k^2}{k_n^2}\right) D_n'' = 0 \tag{7}$$

(polarisation parallèle)

les sommes étant prises sur toutes les valeurs de m sauf $m = n$.

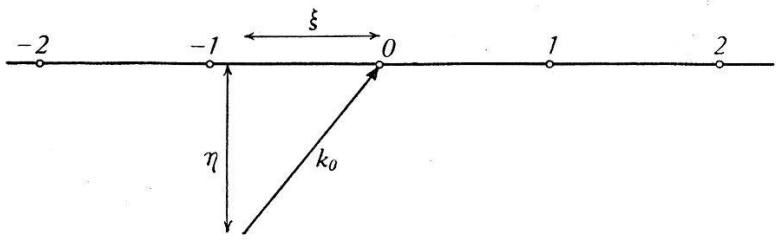

Fig. 2.

Dans les équations (6) et (7), nous remplacerons les k_n^2 par leurs valeurs tirées de (4) en fonction de k_0. Pour cela, nous introduirons le fait que la longueur d'onde $\lambda = 1/k$ de la lumière est beaucoup plus grande que la période $\Lambda = 1/b$ du milieu stratifié atomiquement:

$$\lambda \gg \Lambda \qquad \text{ou} \qquad k \ll b.$$

En appelant alors ξ et η les composantes de k_0 suivant l'axe du réseau réciproque et perpendiculaire à celui-ci respectivement (figure 2), on a

$$k_n^2 = \eta^2 + (\xi + n\,b)^2 = n^2\,b^2 \left(1 + \frac{2\,\xi}{n\,b} + \frac{k_0^2}{n^2\,b^2}\right).$$

Le facteur du terme D_n dans les équations (6) et (7) devient alors

$$\psi_0 - \frac{k^2}{n^2 b^2} \frac{1}{1 + \frac{2\,\xi}{n\,b} + \frac{k_0^2}{n^2\,b^2}} \simeq \psi_0 \qquad \text{sauf pour } n = 0$$

en supposant que k_0 est du même ordre de grandeur que k et que, d'autre part, $k^2/b^2 \ll \psi_0$.

Pour les cas qui nous intéressent, on a en effet que λ est de l'ordre de grandeur de 10^{-5} et $\Lambda\, 10^{-8}$, ce qui donne pour k^2/b^2 10^{-6} alors que ψ_0 la valeur moyenne de l'inverse de la constante diélectrique est de l'ordre de l'unité.

Nous verrons plus loin qu'il faut tenir compte des cas où k_0 est complexe et a des valeurs proches de $i\,n\,b$.

Nous nous occuperons maintenant séparément des deux polarisations.

A. *Polarisation perpendiculaire au plan des k.*

Les équations (6) deviennent alors, avec les simplifications données ci-dessus,

$$\left\{\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots + \psi_0 D_{-1}' + \psi_{-1} D_0' + \psi_{-2} D_1' + \cdots = 0 \\ \cdots + \psi_1 D_{-1}' + (\psi_0 - k^2/k_0^2)\, D_0' + \psi_{-1} D_1' + \cdot = 0 \\ \cdots + \psi_2 D_{-1}' + \psi_1 D_0' + \psi_0 D_1' + \cdots\cdot = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{8}$$

On sait que ces équations homogènes et linéaires pour les D' ne donneront des solutions convergentes que si le déterminant des coefficients s'annule:

$$\left|\begin{array}{lllll} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots & \psi_0 & \psi_{-1} & \psi_{-2} & \cdots\cdot \\ \cdots & \psi_1 & \psi_0 - k^2/k_n^2 & \psi_{-1} & \cdots\cdot \\ \cdots & \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 & \cdots\cdot \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right| = 0\,. \tag{9}$$

Il faudra donc choisir k_0 de façon à satisfaire cette condition; sa valeur sera ainsi complètement déterminée. L'équation pour k_0^2 représentée par le déterminant (9) est, comme on le voit, du premier degré et, par conséquent, donnera une valeur unique pour cette inconnue. Il n'est pas possible d'exprimer k_0 en fonction des ψ_n, mais nous allons voir qu'en fonction des ε_n introduits plus haut la solution est très simple. Nous écrirons en effet les équations (3) qui déterminent les ε_n en fonction des ψ_m sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots + \psi_0\,\varepsilon_{-1} + \psi_{-1}\,\varepsilon_0 + \psi_{-2}\,\varepsilon_1 + \cdots = 0 \\ \cdots + \psi_1\,\varepsilon_{-1} + (\psi_0 - x)\,\varepsilon_0 + \psi_{-1}\,\varepsilon_1 + \cdots = 0 \\ \cdots + \psi_2\,\varepsilon_{-1} + \psi_1\,\varepsilon_0 + \psi_0\,\varepsilon_1 + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{10}$$

avec $$x = 1/\varepsilon_0\,.$$

On sait que les ε_n sont des solutions convergentes de ce système d'équations; par conséquent, on peut dire que, pour qu'un système d'équations ayant les ψ_m arrangés comme dans (10) pour coefficients (sauf pour le terme $\psi_0\,\varepsilon_0$, dont le coefficient est $(\psi_0 - x)$) donne des solutions convergentes, il faut que x soit choisi de manière à ce que

$$x = 1/\varepsilon_0$$

ε_0 étant évidemment une fonction des ψ_m. Cette solution semble, au premier abord, purement formelle; cependant, comme $\varepsilon(x)$ est une donnée de notre problème, on peut toujours calculer les ε_n par l'expansion en série de Fourier et par conséquent ε_0.

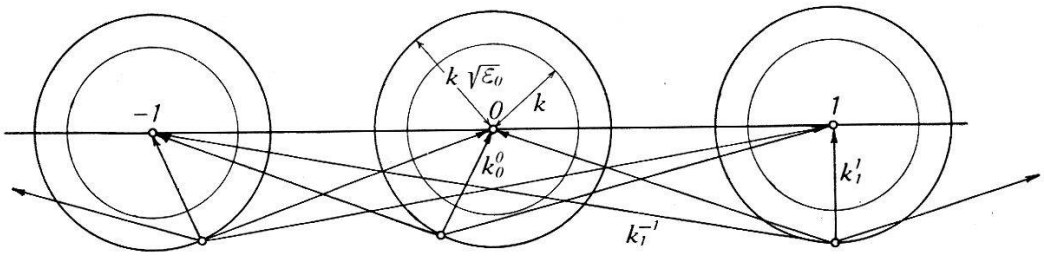

Fig. 3.

Surfaces de dispersion (polarisation perpendiculaire: onde ordinaire).

Revenant alors au déterminant (9), on voit immédiatement qu'il faut que k^2/k_0^2, qui joue le rôle de x, soit la fonction ε_0 des ψ_m pour que le déterminant soit nul.

$$\frac{k^2}{k_0^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \qquad \text{ou} \qquad k_0 = k\sqrt{\varepsilon_0}. \tag{11}$$

Pour la polarisation envisagée, la valeur de k_0 ne dépend donc pas de son orientation dans le réseau; le milieu agit comme un milieu homogène d'indice de réfraction $\sqrt{\varepsilon_0}$. On peut représenter cela géométriquement en traçant autour d'un point du réseau réciproque choisi arbitrairement comme origine une sphère de rayon $k\sqrt{\varepsilon_0}$ (fig. 3). Cette sphère, qui représente le lieu des origines des vecteurs possibles ou, si l'on veut, le spectre de direction des vecteurs d'ondes de fréquence ν, s'appelle une surface de dispersion. Nous verrons que ces surfaces sont les surfaces de Fresnel. Si une onde de vecteur $\vec{k}_0$ se propage dans le cristal, d'autres ondes, de vecteurs $\vec{k}_n = \vec{k}_0 + n\,\vec{b}$, lui sont associées. Connaissant $\vec{k}_0$ par la surface de dispersion, nous connaissons à la fois tous les vecteurs $\vec{k}_n$. Les équations (8) doivent alors être résolues pour les D_n' des diffé-

rentes ondes lorsqu'on remplace k_0 par la valeur donnée dans (11). En comparant (10) avec (8), on voit immédiatement que

$$\frac{D_n'}{D_0'} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} . \tag{12}$$

Ainsi le problème est entièrement résolu pour toute cette série d'ondes.

La surface de dispersion n'est du reste pas aussi simple qu'on pourrait l'imaginer en considérant la sphère de rayon $k\sqrt{\varepsilon_0}$. Il faut en effet considérer une telle sphère tracée autour de chaque point du réseau réciproque et ce sera l'ensemble de ces sphères qui formera la nappe des surfaces de dispersion. Nous verrons en plus que ces sphères se prolongent dans l'imaginaire donnant alors des vecteurs d'ondes complexes qui nous aiderons à comprendre d'une façon détaillée comment se propage la lumière dans les milieux atomiquement périodiques.

Nous montrerons pour commencer qu'il y a bien une sphère de rayon $k_0\sqrt{\varepsilon_0}$ autour de chaque point réciproque.

Si nous avions exprimé tous les k_m^2 en fonction de k_n au lieu de k_0, on aurait eu, en écrivant que k_n^2 est du même ordre de grandeur que k,

$$\left\{\begin{array}{llllll}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & + \psi_0 D_{n-1}' & + \psi_{-1} D_n' & & + \psi_{-2} D_{n+1}' & + \cdot\ \cdot = 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & + \psi_1 D_{n-1}' & + (\psi_0 - k^2/k_n^2) D_n' & & + \psi_{-1} D_{n+1} & + \cdot\ \cdot = 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & + \psi_2 D_{n-1}' & + \psi_1 D_n' & & + \psi_0 D_{n+1} & + \cdot\ \cdot = 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right.$$

Alors comme précédemment,

$$k_n = k\sqrt{\varepsilon_0}$$

et

$$\frac{D_m'}{D_n'} = \frac{\varepsilon_{m-n}}{\varepsilon_0}$$

car la numérotation des D' est arbitraire.

Cette nouvelle série d'ondes ayant pris naissance sur la sphère de rayon $k\sqrt{\varepsilon_0}$ autour du point n est aussi une solution particulière des équations de Maxwell. Pour la différencier de la solution précédente, nous dirons qu'elle a pris naissance sur la branche n des surfaces de dispersion et nous indiquerons son origine par un indice supérieur n. On a donc, d'une façon générale,

$$\frac{D_m'^n}{D_n'^n} = \frac{\varepsilon_{m-n}}{\varepsilon_0} . \tag{13}$$

Montrons enfin comment ces surfaces de dispersion se prolongent dans l'imaginaire. On doit avoir, pour la nappe d'indice zéro,

$$k_0^2 = k^2 \varepsilon_0$$

de façon à rendre le déterminant (9) nul. Si, en particulier, l'une des composantes ξ et η de k_0 est plus grande que k_0 mais réelle, on voit immédiatement que l'autre est imaginaire. On a en effet, avec $\xi > k_0$

$$\eta' = \pm i \sqrt{\xi^2 - k^2 \varepsilon_0}.$$

Cette valeur de η est celle de l'intersection d'une droite ξ = constante avec la sphère de rayon $k\sqrt{\varepsilon_0}$.

Le vecteur $\vec{k}_0$ est alors complexe

$$\vec{k}_0 = \vec{\xi} + i\vec{\eta}$$

quoique sa grandeur soit réelle et égale à $k\sqrt{\varepsilon_0}$.

Ces ondes sont semblables aux ondes évanescentes qui interviennent dans la réflexion totale. En effet, on a

$$e^{2\pi i((\vec{k}_0 \cdot \vec{r}) - \nu t)} = e^{\mp 2\pi\eta y} e^{2\pi i(\xi x - \nu t)}$$

et l'on voit que ces ondes planes se propagent dans la direction x avec une vitesse de phase donnée par ν/ξ, mais leur amplitude diminue ou augmente dans la direction y perpendiculaire à la direction de propagation d'une façon exponentielle.

Ondes diffusées.

En considérant une des séries d'ondes formant une solution des équations de Maxwell, on s'aperçoit que les ondes $\vec{k}_1^0$ par exemple ont des vecteurs d'onde de l'ordre de grandeur de b, c'est-à-dire beaucoup plus grands que $k\sqrt{\varepsilon_0}$. Ces ondes, dont l'amplitude est

$$D_1'^0 = D_0'^0 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$$

c'est-à-dire du même ordre de grandeur que $D_0'^0$, ont donc une vitesse de propagation dans le milieu beaucoup plus petite que l'onde k_0^0. Leur indice de réfraction apparent est donc très grand. Nous voulons montrer que ces ondes ont un vecteur électrique $E_1'^0$ très petit et que l'énergie qu'elles transportent est, elle aussi,

extrêmement petite. Les équations de MAXWELL fournissent les relations

$$\vec{E}_n^i = \sum_m \psi_{n-m} \vec{D}_m^i$$

et

$$\vec{E}_n^i k_n^{i\,2} - \vec{k}_n^i (\vec{k}_n^i \cdot \vec{E}_n^i) = k^2 \vec{D}_n^i .$$

Comme les $D_m'^i$ de notre problème sont tous dans la même direction (normaux au plan des k), la première équation montre que les $\vec{E}_n^i$ sont parallèles aux $\vec{D}_n^i$.

On a donc

$$(\vec{k}_n^i \cdot \vec{E}_n^i) = 0$$

et

$$\vec{E}_n^i = \frac{k^2}{k_n^{i\,2}} \vec{D}_n^i .$$

Nous voyons par cette équation que si $k_n^{i\,2}$ est de l'ordre de grandeur de $n^2 b^2$, l'amplitude électrique de l'onde est extrêmement petite, même si $\vec{D}_n^i$ est fini (figure 4). L'amplitude magnétique est donnée par

$$k_n^i H_n^i = k D_n^i$$

et par conséquent le vecteur de POYNTING devient

$$|S_n^i| = \frac{c}{4\pi} \frac{k^3}{k_n^{i\,3}} D_n^{i\,2}. \tag{14}$$

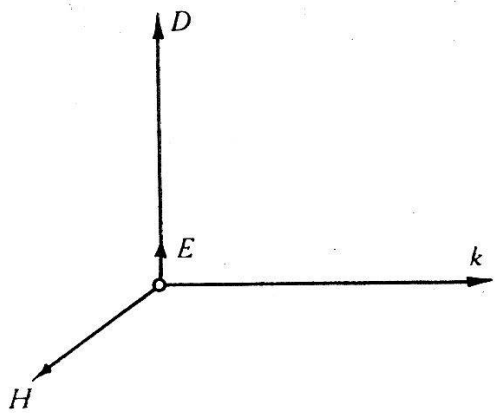

Fig. 4.
Ondes diffusées ordinaires.

Ces ondes, qui se propagent dans le milieu avec une vitesse très petite, transportent donc une énergie relative extrêmement petite (de l'ordre de k^3/k_n^3). Nous verrons que, dans certains cas, elles pourraient être observables, mais que leur petite vitesse nécessiterait des conditions spéciales pour éviter la réflexion totale et pour leur permettre de sortir du milieu.

B. *Polarisation dans le plan des k.*

Pour pouvoir écrire les équations fondamentales (7) en fonction de k_0, il est nécessaire d'exprimer tout d'abord les angles entre les différents vecteurs d'ondes qui interviennent explicitement dans les coefficients des D''_m. En appelant Θ l'angle que k_0 forme avec l'axe du réseau réciproque, on trouve, pour l'angle entre $\vec{k}_0$ et $\vec{k}_m$, la valeur

$$\Theta - \frac{\eta}{m\,b}$$

et, pour l'angle entre $\vec{k}_p$ et $\vec{k}_m$,

$$\frac{\eta}{m\,p\,b}\,(p-m) \qquad \text{si } p \text{ et } m \text{ sont de même signe,}$$

et

$$\pi + \frac{2}{m\,p\,b}\,(p+m) \qquad \text{si } p \text{ et } m \text{ sont de signes opposés.}$$

Dans ces expressions, nous avons supposé, comme précédemment, que k^2/b^2 était négligeable par rapport à l'unité. Dans cette approximation, on obtient donc

$$\cos\,(k_0, k_m) = \cos\Theta + \frac{k_0}{m\,b}\sin^2\Theta$$

et

$$\cos\,(k_m, k_p) = \begin{matrix} +1 & (p \text{ et } m \text{ de mêmes signes}) \\ -1 & (p \text{ et } m \text{ de signes contraires}). \end{matrix}$$

De même que pour la polarisation précédente, on a

$$\psi_0 - \frac{k^2}{k_m^2} \cong \psi_0 \qquad (\text{sauf pour } m=0).$$

Les équations (7) s'écrivent alors

$$\left.\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\ldots + \psi_0\,D''_{-1} \qquad\qquad - \psi_{-1}\,D_0''\left[\cos\Theta - \frac{k_0}{b}\sin^2\Theta\right] - \psi_{-2}\,D_1'' \quad - \ldots = 0 \\
\ldots - \psi_1\,D''_{-1}\left[\cos\Theta - \frac{k_0}{b}\sin\Theta\right] + D_0''\left[\psi_0 - \frac{k^2}{k_0^2}\right] + \psi_{-1}D_1''\left[\cos\Theta + \frac{k_0}{b}\sin^2\Theta\right] + \ldots = 0 \\
\ldots - \psi_2\,D''_{-1} \qquad\qquad + \psi_1\,D_0''\left[\cos\Theta + \frac{k_0}{b}\sin^2\Theta\right] + \psi_0\,D_1'' \quad + \ldots = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \quad (15)$$

Le déterminant des coefficients des D'' prend alors la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & +\psi_0 & +\psi_1 & -\psi_{-2}\left(\cos\Theta - \frac{k_0}{2b}\sin^2\Theta\right) & -\psi_{-3} & -\psi_{-4} \cdots \\ \cdots & +\psi_1 & +\psi_0 & -\psi_{-1}\left(\cos\Theta - \frac{k_0}{b}\sin^2\Theta\right) & -\psi_{-2} & -\psi_{-3} \cdots \\ \cdots & -\psi_2\left(\cos\Theta - \frac{k_0}{2b}\sin^2\Theta\right) & -\psi_1\left(\cos\Theta - \frac{k_0}{b}\sin^2\Theta\right) & \left(\psi_0 - \frac{k^2}{k_0^2}\right) & +\psi_{-1}\left(\cos\Theta + \frac{k_0}{b}\sin^2\Theta\right) & +\psi_{-2}\left(\cos\Theta + \frac{k_0}{2b}\sin^2\Theta\right) \\ \cdots & -\psi_3 & -\psi_2 & +\psi_1\left(\cos\Theta + \frac{k_0}{b}\sin^2\Theta\right) & +\psi_0 & +\psi_{-1} \cdots \\ \cdots & -\psi_4 & -\psi_3 & +\psi_2\left(\cos\Theta + \frac{k_0}{2b}\sin^2\Theta\right) & +\psi_1 & +\psi_0 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$$

En changeant les signes dans les lignes en-dessus du terme central, puis dans les colonnes à gauche de celui-ci et en décomposant, on arrive à l'expression

$$\Delta = \Delta_0 \cos^2\Theta + (\Delta_1 + \Delta_1')\frac{k_0}{b}\cos\Theta\sin^2\Theta + \left(\frac{k_0}{b}\right)^2 \sin^4\Theta\,\Delta_2$$

où les déterminants Δ_0, Δ_1, Δ_1' et Δ_2 sont

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \psi_0 & \psi_{-1} & \psi_{-2} & \psi_{-3} & \psi_{-4} \cdots \\ \cdots & \psi_1 & \psi_0 & \psi_{-1} & \psi_{-2} & \psi_{-3} \cdots \\ \cdots & \psi_2 & \psi_1 & \left(\psi_0 - \frac{k^2}{k_0^2}\right)\frac{1}{\cos^2\Theta} & \psi_{-1} & \psi_{-2} \cdots \\ \cdots & \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 & \psi_{-1} \cdots \\ \cdots & \psi_4 & \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \psi_0 & \psi_{-1} & \psi_{-2} & \psi_{-3} & \psi_{-4} \cdots \\ \cdots & \psi_1 & \psi_0 & \psi_{-1} & \psi_{-2} & \psi_{-3} \cdots \\ \cdots & -\frac{\psi_2}{2} & -\psi_1 & 0 & \psi_{-1} & \frac{\psi_{-2}}{2} \cdots \\ \cdots & \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 & \psi_{-1} \cdots \\ \cdots & \psi_4 & \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1' = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \psi_0 & \psi_{-1} & -\frac{\psi_{-2}}{2} & \psi_{-3} & \psi_{-4} \cdots \\ \cdots & \psi_1 & \psi_0 & -\psi_{-1} & \psi_{-2} & \psi_{-3} \cdots \\ \cdots & \psi_2 & \psi_1 & 0 & \psi_{-1} & \psi_{-2} \cdots \\ \cdots & \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 & \psi_{-1} \cdots \\ \cdots & \psi_4 & \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \psi_0 & \psi_{-1} & -\frac{\psi_{-2}}{2} & \psi_{-3} & \psi_{-4} & \cdots \\ \cdots & \psi_1 & \psi_0 & -\psi_{-1} & \psi_{-2} & \psi_{-3} & \cdots \\ \cdots & -\frac{\psi_2}{2} & -\psi_1 & 0 & \psi_{-1} & \frac{\psi_{-2}}{2} & \cdots \\ \cdots & \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 & \psi_1 & \cdots \\ \cdots & \psi_4 & \psi_3 & \frac{\psi_2}{2} & \psi_1 & \psi_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

En réarrangeant les lignes et les colonnes de Δ_1 et de Δ'_1, on peut montrer que si $\psi_n = \psi_{-n}$ (pas d'absorption!)

$$\Delta_1 = -\Delta_1 \quad \text{et} \quad \Delta_1' = -\Delta_1'.$$

Ces deux déterminants sont donc nuls. On a finalement

$$\Delta = \Delta_0 \cos^2 \Theta + \frac{k_0^2}{b^2} \sin^4 \Theta \, \Delta_2 .$$

Mais, comme nous négligeons les termes en $(k_0/b)^2$, on doit avoir

$$\Delta_0 = 0$$

ce qui donne, comme précédemment,

$$\left(\psi_0 - \frac{k^2}{k_0^2}\right) \frac{1}{\cos^2 \Theta} = \psi_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} .$$

On trouve donc finalement:

$$k_0 = \frac{k}{\sqrt{\psi_0 \left[1 - \cos^2 \Theta \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0 \psi_0}\right)\right]}} . \tag{17}$$

Les surfaces de dispersion sont donc des ellipsoïdes de révolution autour de l'axe x du réseau réciproque tracés autour de chaque point de celui-ci. On s'en rend facilement compte en écrivant (17) sous la forme

$$\frac{\xi^2}{k^2 \varepsilon_0} + \frac{\eta^2}{k^2/\psi_0} + \frac{\zeta^2}{k^2/\psi_0} = 1 .$$

Les axes de cet ellipsoïde sont donc $k\sqrt{\varepsilon_0}$, $k/\sqrt{\psi_0}$ et $k/\sqrt{\psi_0}$. Il est tangent à la sphère de rayon $k\sqrt{\varepsilon_0}$ à l'intersection avec l'axe du réseau réciproque (figures 5a et 5b).

On voit donc que le milieu est biréfringent puisque les ondes de différentes polarisations se propagent avec différentes vitesses. Si on néglige les ondes latérales, le milieu stratifié agit comme un cristal uniaxe, l'axe optique étant la direction de stratification

Si $^1/\psi_0$ est plus grand que ε_0, la biréfringence est négative, tandis que, dans le cas contraire, elle est positive. La polarisation perpendiculaire au plan des k correspond à l'onde ordinaire, tandis que la polarisation dans ce plan forme l'onde extraordinaire. Les surfaces de dispersion sphère et ellipsoïde ne sont pas autre chose que les surfaces de FRESNEL (surfaces des indices de réfraction) de l'optique cristalline. Cependant elles contiennent plus que ces dernières car, si l'on trace un des vecteurs d'ondes possibles ayant son origine sur ces surfaces et aboutissant à l'origine du réseau réciproque, nous avons vu que cette onde était nécessairement accompagnée d'une série d'autres ondes ayant la même origine, mais aboutissant aux autres points du réseau réciproque. On pourrait dire que la solution de FRESNEL est la solution statique de notre problème, solution exacte lorsque $k/b \rightarrow 0$. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

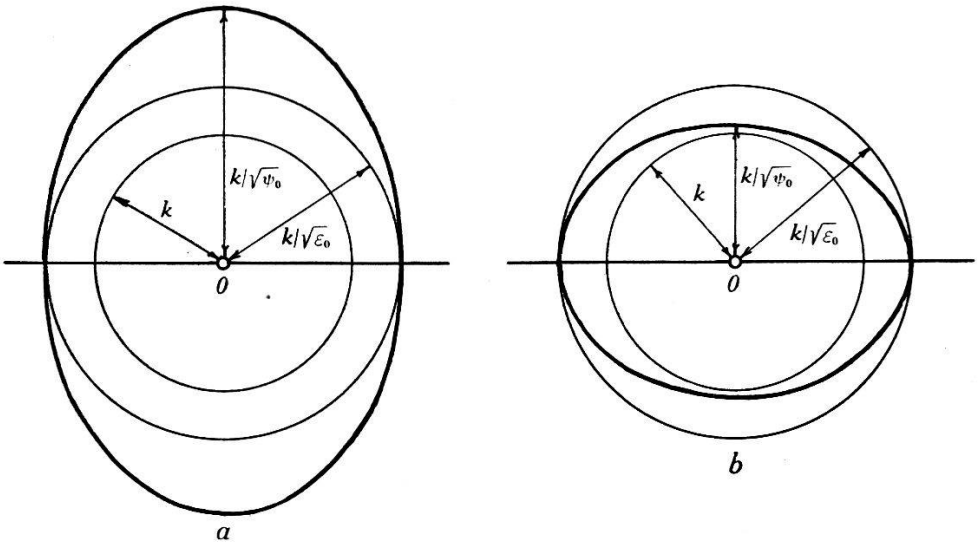

Fig. 5.
Surfaces de dispersion (polarisation parallèle: onde extraordinaire).

Pour terminer cette étude des ondes polarisées dans le plan des vecteurs k, il nous faut donner l'expression des amplitudes D''_m des différentes ondes. Comme précédemment, on trouve

$$\frac{D''_m}{D''_0} = -\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0}\cos\Theta \qquad \frac{D''_{-m}}{D''_0} = \frac{\varepsilon_{-m}}{\varepsilon_0}\cos\Theta. \qquad m>0. \tag{18}$$

Pour les autres solutions, c'est-à-dire celles dont les vecteurs prennent naissance sur l'ellipsoïde tracé autour du point n du réseau réciproque, on doit écrire

$$\frac{D''^n_{n+p}}{D''^n_n} = -\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\cos\Theta_n \quad \text{et} \quad \frac{D''^n_{n-p}}{D''^n_n} = \frac{\varepsilon_{-p}}{\varepsilon_0}\cos\Theta_n \quad p>0. \tag{19}$$

Θ_n représentant l'angle que $\vec{k}_n^n$ fait avec l'axe du réseau réciproque. Ces ondes secondaires, dont l'amplitude relative du vecteur déplacement électrique est de l'ordre de l'unité, n'ont pas, comme les ondes polarisées perpendiculairement, un vecteur électrique de l'ordre de k^2/b^2. En effet, pour ces ondes, le vecteur électrique $\vec{E}_n$ n'est pas parallèle à $\vec{D}_n$. Les équations résultant des équations de MAXWELL qui permettent de calculer les $\vec{E}_n$ en fonction de $\vec{D}_n$ sont comme précédemment

$$\vec{E}_n = \sum_m \psi_{n-m} \vec{D}_m \tag{20}$$

et, en appelant α_n l'angle entre $\vec{E}_n$ et $\vec{D}_n$,

$$E_n \cos \alpha_n = \frac{k^2}{k_n^2} D_n . \tag{21}$$

Dans l'approximation dont nous nous sommes servis, c'est-à-dire

$$\text{angle } (k_m, k_p) = \begin{matrix} 0 & (m \text{ et } p \text{ de mêmes signes}) \\ \pi & (m \text{ et } p \text{ de signes contraires}) \end{matrix}$$

et

$$\text{angle } (k_0, k_m) = \begin{matrix} \Theta & m>0 \\ \pi - \Theta & m<0 \end{matrix}$$

les équations (20) deviennent

$$\left.\begin{aligned} E_n \sin \alpha_n &= -\psi_n D_0 \sin \Theta \\ E_{-n} \sin \alpha_{-n} &= \psi_{-n} D_0 \sin \Theta \\ E_0 \sin \alpha_0 = \ldots + \psi_{-2} D_2 \sin \Theta + \psi_{-1} D_1 \sin \Theta - \psi_1 D_{-1} \sin \Theta - \psi_2 D_{-2} \sin \Theta . \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Les équations fondamentales nous permettent de mettre cette dernière équation sous la forme

$$\begin{aligned} E_0 \sin \alpha_0 &= \sin \Theta \left(\ldots + \psi_{-2} D_2 + \psi_{-1} D_1 - \psi_1 D_{-1} - \psi_2 D_{-2} - \ldots\right) \\ &= \left(\frac{k^2}{k_0^2} - \psi_0\right) D_0 \operatorname{tg} \Theta \end{aligned}$$

ou

$$E_0 \sin \alpha_0 = D_0 \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \psi_0\right) \sin \Theta \cos \Theta .$$

On voit ainsi que $E_0 \cos \alpha_0$ est du même ordre de grandeur que D_0, ainsi que $E_0 \sin \alpha_0$. On a en effet:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{cotg} \Theta - \frac{1}{\sin \Theta \cos \Theta \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0 \psi_0}\right)} .$$

Tandis que, pour les ondes secondaires, alors que $E_n \cos \alpha_n$ est beaucoup plus petit que D_0 à cause du facteur

$$\frac{k^2}{k_n^2} \cong \frac{k^2}{n^2 b^2}$$

de (21), $E_n \sin \alpha_n$ est de l'ordre de D_0. Pour ces ondes (figure 6), le vecteur électrique est donc presque entièrement dans la direction $\vec{k}_n$ de propagation de l'onde. Le vecteur de Poynting est donc presque à angle droit de $\vec{k}_n$ et l'onde marchant par exemple de gauche à droite transporte l'énergie de haut en bas.

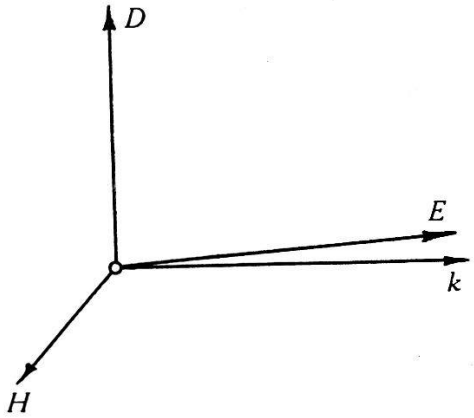

Fig. 6.
Ondes diffusées extraordinaires.

Le vecteur de Poynting est approximativement

$$|S_n| = \frac{c}{4\pi} \frac{k}{nb} \frac{\psi_n \varepsilon_n}{\varepsilon_0} D_0^2 \sin \Theta \cos \Theta . \tag{23}$$

Ainsi les ondes diffusées de la polarisation dans le plan des k, qu'on pourrait appeler les ondes diffusées extraordinaires, transportent beaucoup plus d'énergie que les ondes diffusées ordinaires dont le vecteur de Poynting contenait un facteur $k^3/n^3 b^3$.

III. Constante diélectrique macroscopique moyenne d'un milieu microscopiquement stratifié.

Nous avons pu montrer, dans les paragraphes précédents, qu'un milieu dont la constante diélectrique est scalaire et périodique donne lieu au phénomène de la biréfringence qu'on associe ordinairement à une constante diélectrique tensorielle. Cela provenait de ce que nous avons supposé que la longueur d'onde de la lumière était beaucoup plus grande que la périodicité du milieu. C'est alors la répartition anisotrope des atomes dans l'espace (et non

pas l'anisotropie propre de ceux-ci) qui est responsable de la biréfringence. Il est bien évident que si les atomes ou les molécules ont une déformabilité optique tensorielle, cette anisotropie viendra s'ajouter à celle de la distribution dans l'espace et que, d'une façon générale, la biréfringence optique qu'on observe dans les cristaux est due simultanément à ces deux causes car, dans la plupart des cristaux non cubiques, les atomes et les molécules, du fait des champs de force anisotropes qui agissent sur eux, prennent des propriétés optiques anisotropes aussi. On pourrait du reste penser que les deux effets pourraient être séparés par des mesures de la biréfringence des rayons X. Ceux-ci ont en effet une longueur onde comparable aux dimensions atomiques, donc à la période de la constante diélectrique; dans ces conditions, les calculs que nous avons conduits plus haut ne sont plus valables et le cristal n'agit plus comme s'il avait une constante diélectrique tensorielle. Seules les propriétés anisotropes des atomes entrent en jeu. Malheureusement, les électrons diffusant la lumière et les rayons X le plus activement ne sont pas les mêmes et le phénomène de la biréfringence des rayons X n'a jusqu'ici pas été découvert[1]).

Pour bien montrer comment une constante diélectrique microscopique scalaire peut donner à un milieu des propriétés macroscopiques tensorielles, nous allons rapidement calculer la constante diélectrique statique moyenne du milieu stratifié.

Considérons donc, pour un milieu de constante diélectrique donnée par (1) et (2), la solution statique des équations de MAXWELL

$$D_x = \text{constante} \qquad D_y = D_z = 0 \qquad \text{et} \quad E_y = E_z = 0 \,.$$

L'équation rot $E = 0$ montre que E_x ne peut être fonction que de x. On a donc

$$D_x = \varepsilon\,(x)\,E\,(x) \qquad \text{ou} \qquad D_x\,\psi\,(x) = E\,(x)\,.$$

En prenant la moyenne[2]) sur x des deux côtés de cette équation, on obtient (puisque D_x est constant)

$$D_x\,\psi_0 = \overline{E\,(x)}^{\,x}.$$

On voit donc que, pour cette solution statique, la constante diélec-

---

[1]) POSENER, Ann. der Phys. **19**, 849, 1934.

[2]) Cette moyenne n'a de sens que si elle est faite sur un très grand nombre de périodes du milieu. En effet, la moyenne des exponentielles de $\psi\,(x) = \sum \psi_m\, e^{2\pi i m b x}$ est nulle si la longueur x sur laquelle on a pris la moyenne est suffisamment grande par rapport à $\Lambda = 1/b$.

trique moyenne qui lie les valeurs moyennes du vecteur déplacement et du vecteur électrique est

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\psi_0} \tag{24}$$

Prenons maintenant comme solution

$$E_y = \text{constante} \qquad E_x = E_z = 0 \qquad D_x = D_z = 0\,.$$

L'équation div $\vec{D} = 0$ montre alors que D_y ne peut être fonction de y et par symétrie de z. On a donc

$$E_y\, \varepsilon(x) = D_y(x)$$

et, en prenant de nouveau la moyenne sur un très grand nombre de périodes du réseau, on trouve

$$E_y\, \varepsilon_0 = \overline{D_y(x)}^{\,x}.$$

On trouverait évidemment le même résultat pour E_z = constante, ce qui donne, pour ces solutions, des constantes diélectriques moyennes liant les E et D moyens.

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_0\,. \tag{25}$$

On montrerait facilement que les trois valeurs moyennes (24) et (25) sont les constantes diélectriques macroscopiques principales du tenseur de la constante diélectrique.

En introduisant celles-ci dans les équations de Maxwell, nous allons retrouver partiellement les résultats des paragraphes précédents. Les vecteurs E, D et H auront en facteur une exponentielle de la forme

$$e^{2\pi i\,((\vec{k}_0\cdot\vec{r})-\nu t)}$$

$\vec{k}_0$ étant le vecteur d'onde qu'il s'agit de déterminer en fonction de $k = \nu/c$ et de $\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$. On sait que D et H sont perpendiculaires à $\vec{k}_0$, tandis que E ne l'est pas et qu'on a

$$\vec{E}\, k_0^2 - \vec{k}_0\,(\vec{k}_0\cdot\vec{E}) = k^2\,\vec{D}\,.$$

En posant alors

$$E_x = D_x\,\psi_x \quad E_y = D_y\,\psi_y \quad E_z = D_z\,\psi_z$$

on obtient

$$D_x\,(k^2 - \psi_x\, k_0^2) + k_{0\,x}\,(\vec{E}\cdot\vec{k}_0) = 0$$

et deux expressions semblables pour les composantes selon y et z.

En tirant D_x, D_y et D_z de ces équations et en exprimant le fait que $\vec{D}$ est perpendiculaire à $\vec{k}_0$ sous la forme

$$(\vec{D}\cdot\vec{k}_0) = D_x k_{0x} + D_y k_{0y} + D_z k_{0z} + 0$$

on peut écrire

$$\frac{k_{0x}^2}{\psi_x k_0^2 - k^2} + \frac{k_{0y}^2}{\psi_y k_0^2 - k^2} + \frac{k_{0z}^2}{\psi_z k_0^2 - k^2} = 0 .$$

En appelant

$$\cos\Theta = \frac{k_{0x}}{k_0}, \quad \cos\beta = \frac{k_{0y}}{k_0} \quad \text{et} \quad \cos\gamma = \frac{k_{0z}}{k_0}$$

les cosinus directeurs de $\vec{k}_0$ dans le système d'axes définis par le tenseur de la constante diélectrique, cette dernière équation devient

$$\frac{\cos^2\Theta}{\psi - \frac{k^2}{k_0^2}} + \frac{\cos^2\beta}{\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{k^2}{k_0^2}} + \frac{\cos^2\gamma}{\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{k^2}{k_0^2}} = 0 .$$

En réduisant au même dénominateur, on a

$$\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{k^2}{k_0^2} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{k^2}{k_0^2}\right)\cos^2\Theta + \left(\psi_0 - \frac{k^2}{k_0^2}\right)(1 - \cos^2\Theta) = 0 .$$

Ces deux équations déterminent deux valeurs de k_0. La première donne

$$k_0 = k\sqrt{\varepsilon_0}$$

tandis que la seconde fournit

$$k_0 = \frac{k}{\sqrt{\psi_0\left[1 - \cos^2\Theta\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0\psi_0}\right)\right]}} .$$

Nous retrouvons ainsi les résultats précédents. La théorie classique montre aisément que la première valeur concerne une onde polarisée perpendiculairement à la section principale (plan k_0 — axe optique), tandis que la seconde concerne la polarisation dans cette section.

Comme on le voit, la solution statique oublie systématiquement les ondes que nous avons appelées secondaires, dont les vecteurs d'onde prennent naissance sur la surface de dispersion et aboutissent aux points du réseau réciproque. Elle ne tient donc pas compte de cette diffusion de la lumière, qui, du reste, est extrêmement petite.

Comme nous l'avons dit plus haut, cette diffusion provient de ce que les électrons d'un atome ne vibrent pas exactement en phase les uns avec les autres lorsque le rapport k/b n'est pas infiniment petit.

IV. Conditions aux limites. — Ondes diffusées à l'extérieur du cristal.

Les surfaces de dispersion que nous avons obtenues nous donnent, pour une onde de fréquence ν, tous les vecteurs des ondes possibles dans le milieu. Nous allons maintenant exciter ces ondes par une onde extérieure au cristal, se propageant donc dans le vide.

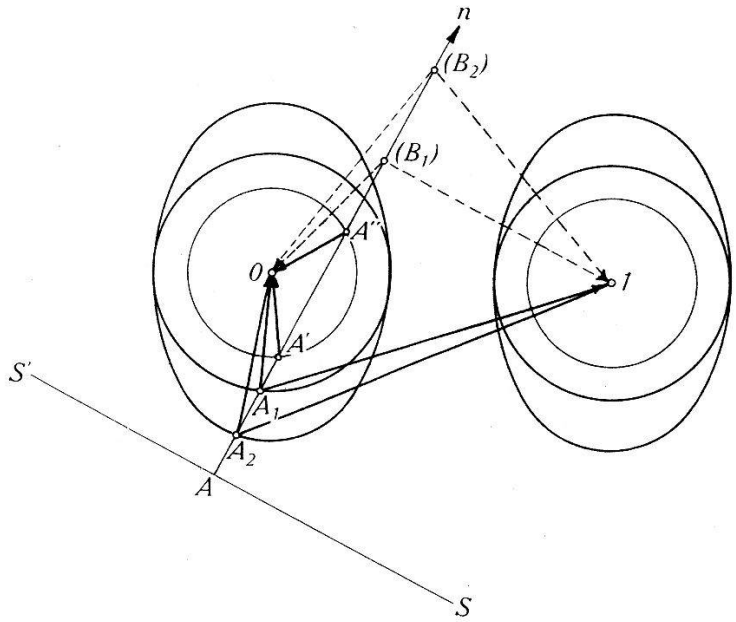

Fig. 7.

Excitation des ondes du cristal par une onde incidente.

Nous n'avons tracé que les ondes pour deux points du réseau réciproque; il faudrait donc compléter la figure par des images semblables autour des autres points 2, 3..., -1, -2, etc. L'onde incidente est $A'O$. Les ondes réfractées doivent avoir la même composante tangentielle et doivent d'autre part prendre naissance sur les figures de dispersion. On a donc tracé la normale $\vec{n}$ à la surface de séparation $S\,S'$; aux intersections A_1 et A_2 on trouve l'origine des vecteurs d'onde des ondes réfractées ordinaires et extra-ordinaires. En A'', sur la surface de dispersion pour le vide se trouve l'onde réfléchie. En réalité, on trouve en des points imaginaires (B_1) et (B_2) l'intersection avec les surfaces de dispersion tracées autour du point 1 du réseau réciproque. Des ondes de vecteurs complexes $\overrightarrow{(B_1)\,0}$ et $\overrightarrow{(B_2)\,0}$ se propageront aussi dans le cristal. Nous savons déjà qu'à chaque onde dont le vecteur se termine en 0 sont nécessairement associées toute une série d'ondes dont les vecteurs ont la même origine mais aboutissent à tous les points du réseau réciproque. Des ondes de ce type sont dessinées en $\overrightarrow{A_1\,1}$, $\overrightarrow{A_2\,1}$, $\overrightarrow{(B_1)\,1}$, $\overrightarrow{(B_2)\,1}$. Remarquons enfin que toutes les ondes dont les vecteurs aboutissent en un point déterminé du réseau réciproque ont la même composante tangentielle de vitesse.

On sait que lorsqu'une onde pénètre dans un milieu réfringent, les conditions aux limites exigent que l'onde réfractée ait la même composante de vecteur d'onde sur la surface de séparation que l'onde incidente. Nous avons tracé, dans la figure 7, les surfaces de dispersion pour le vide (sphère de rayon k) et pour le milieu stratifié. On voit ainsi comment tous les systèmes d'ondes sont excités par l'onde incidente. Pour déterminer les amplitudes de ces différentes ondes, il faut alors introduire les conditions aux

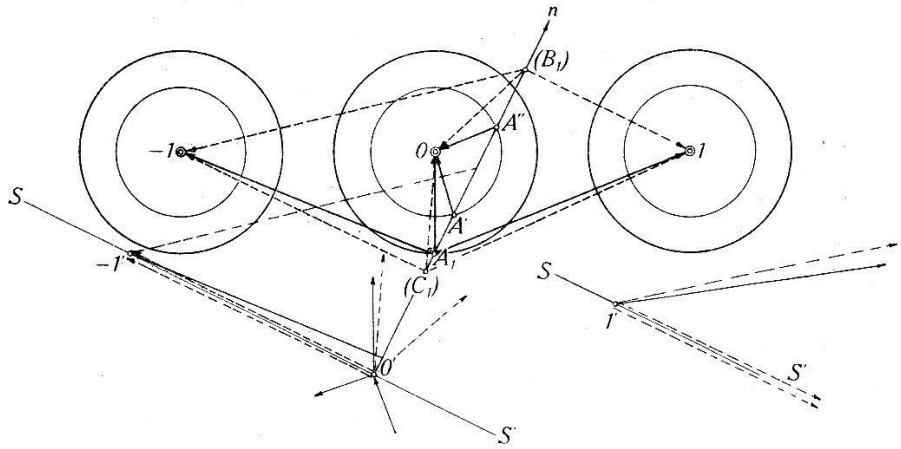

Fig. 8.
Conditions aux limites (ondes ordinaires).

Les vecteurs des systèmes d'ondes prennent naissance aux points A_1, A', A'', (B_1) et (C_1). Les points A sont les intersections de la normale avec les surfaces de dispersion tracées autour du point 0 du réseau réciproque. Les points (B_1) et (C_1) sont imaginaires et doubles; ce sont les intersections de la normale à la surface de séparation avec les surfaces de dispersion (dans le milieu et dans le vide) tracées autour des points 1 et -1 du réseau réciproque. L'un des vecteurs $\overrightarrow{(B_1\,1)}$ est celui de l'onde se propageant dans le cristal, l'autre est celui de l'onde «réfléchie» dans le vide. Ils ont la même composante de propagation réelle, mais différentes comsantes imaginaires; les deux ondes sont donc absorbées différemment dans la direction perpendiculaire à la propagation. Il faut appliquer les conditions aux limites séparément aux trois systèmes d'ondes dessinés. On voit qu'il y a 12 ondes dont on désire connaître l'amplitude en fonction de celle de l'onde incidente. On a $3\times 2 = 6$ équations de conditions aux limites et $3\times 2 = 6$ équations liant les amplitudes dans les systèmes (équation (13)).

limites sur les D normaux et les E tangentiels. Nous avons déjà vu que l'intensité des ondes diffusées était très petite (car k/b est très petit) par rapport aux ondes d'indice 0. Aussi ne donnerons-nous pas ce calcul. PATRY[1]) a du reste montré que les conditions aux limites étaient suffisantes et nécessaires pour déterminer complètement toutes les amplitudes. On trouve effectivement que les ondes d'indice 0 sont réfractées et réfléchies comme si les ondes diffusées n'existaient pas (à $1^0/_{00}$ près avec $k/b = 10^{-3}$).

[1]) PATRY, loc. cit.

Nous avons néanmoins tracé dans la figure 8 les ondes que l'on doit considérer pour appliquer les conditions aux limites.

Si nous négligeons maintenant les ondes diffusées, c'est que leur intensité est très petite par rapport aux ondes normales. Mais cette très petite intensité pourrait être mise en évidence dans certains cas. En effet, l'ordre de grandeur de l'intensité relative de la lumière diffusée par un gaz d'un volume de quelques cm^3 est de l'ordre de 10^{-9} et cependant elle est observable.

Les ondes diffusées ayant dans le milieu des vitesses très petites (indice de réfraction de l'ordre de b/k) ne sortiront du cristal que dans un domaine angulaire d'incidence très restreint (de l'ordre de $2\,k/b$). En dehors de ce domaine, elles seront réfléchies totalement vers l'intérieur du cristal. En plus, le coefficient de réflection est très grand à cause du grand indice de réfraction (ordre de $1 - k/b$) et par conséquent seule une fraction (k/b) de leur énergie se retrouvera dans l'onde sortante. Pour un cristal de $\Lambda = 10^{-8}$ cm. et $\lambda = 10^{-5}$ cm., l'intensité relative des ondes sortantes est de l'ordre de $(k/b)^4 = 10^{-12}$, donc tout à fait inobservable. Mais, pour un cristal de $\Lambda = 3.10^{-7}$ cm. et $\lambda = 3.10^{-5}$ cm., l'intensité relative devient 10^{-8} et donc parfaitement mesurable. C'est donc là un nouveau phénomène de diffusion de la lumière sans changement de longueur d'onde. Remarquons encore que si nos instruments étaient suffisamment puissants et qu'ils puissent séparer les différentes ondes diffusées, on pourrait, en étudiant celles-ci, retrouver, ce que donnent les rayons X: la répartition de la matière dans les cristaux.

Monsieur J. Patry m'a aidé à faire et à contrôler les calculs de ce travail; je l'en remercie.

Institut de Physique de l'Université, Genève.