

Sur la théorie du réseau optique

Autor(en): **Patry, J.F.C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **11 (1938)**

Heft III

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-110849>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur la théorie du réseau optique

par J. F. C. Patry.

(24. II. 38.)

I. Introduction.

Lord RAYLEIGH a le premier donné les principes d'une théorie dynamique du réseau optique¹⁾. Il considérait la surface sur laquelle les traits sont gravés comme une sorte de surface ondulée dont l'expression en série de FOURIER était connue. En écrivant alors les conditions aux limites pour une onde électromagnétique sur cette surface il parvint à donner approximativement l'expression des ondes réfléchies et des ondes transmises. Il est arrivé ainsi à des résultats importants valables dans des conditions bien déterminées.

VOIGT²⁾ reprit plus tard cette méthode pour l'appliquer aux réseaux métalliques opaques; il cherchait à expliquer certains phénomènes décrit par WOOD³⁾.

EXTERMANN⁴⁾ a récemment donné une théorie dynamique de la diffraction de la lumière par les ondes ultrasonores. Sa méthode qui généralise celle qu'EWALD et LAUE ont employé pour étudier la diffraction des rayons X par les cristaux, a pu aussi servir à décrire la propagation de la lumière dans les cristaux⁵⁾. Il nous a semblé intéressant de l'appliquer au problème d'un réseau optique. Ce réseau sera décrit d'une façon un peu différente de celle de RALEIGH; nous supposerons en effet que le réseau est formé d'une plaque à faces parallèles dont la constante diélectrique varie périodiquement dans une direction perpendiculaire à l'épaisseur. Notre réseau est donc formé en réalité par une tranche d'un milieu stratifié, tranche coupée perpendiculairement aux stratifications.

¹⁾ Lord RAYLEIGH, Proc. Roy. Soc. **79**, 399, 1907.

²⁾ VOIGT, Gött. Nachr., p. 40, 1911 et p. 385, 1912.

³⁾ WOOD, Phil. Mag. **4**, 396, 1902 et **23**, 310, 1912; Phys. Rev. **48**, 928, 1935. — STRONG, Phys. Rev. **49**, 185, 1936.

⁴⁾ EXTERMANN et WANNIER, Helv. Phys. Acta **9**, 520, 1936. — EXTERMANN, Helv. Phys. Acta **10**, 185, 1937.

⁵⁾ WEIGLE, Helv. Phys. Acta **11**, 159, 1938.

Dans le cas d'une constante diélectrique sautant brusquement d'une valeur constante à une autre à chaque stratification notre réseau correspond aux réseaux lamellés de WOOD, réseaux dont le creux des traits a une forme rectangulaire. Dans la théorie de RAYLEIGH, la forme des creux était quelconque; mais la matière, dans laquelle les traits étaient tracés, était homogène; dans notre théorie ce sont les propriétés de la matière qui varient périodiquement. On voit ainsi que ces deux théories dissemblables se recouvrent dans un cas particulier seulement celui des réseaux à traits rectangulaires.

Comme nous l'avons dit plus haut, la méthode dont nous nous servons a permis de résoudre des problèmes très variés; la longueur d'onde des ondes électromagnétiques pouvait être soit beaucoup plus grande que la périodicité du milieu (lumière et cristaux), soit beaucoup plus petite (lumière-ultra-sons), soit du même ordre de grandeur (rayons X et cristaux). Mais le phénomène de la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux périodiques ne sont pas caractérisés uniquement par le rapport de la longueur d'onde à la périodicité, il intervient un autre paramètre qui modifie, lui-aussi, l'aspect du problème: l'amplitude des fluctuations de la constante diélectrique. Le problème du réseau optique dont nous donnons la solution ci-dessous, s'apparente par le rapport des longueurs d'ondes à celui des rayons X dans les cristaux, mais alors que pour ce dernier, les fluctuations de la constante diélectrique sont de l'ordre de 10^{-5} , elles seront pour nous de l'ordre de l'unité.

Dans la méthode que nous emploierons, on doit tout d'abord calculer les champs d'ondes de fréquence donnée dynamiquement stables dans le milieu et cela pour différentes orientations. On les obtient en résolution les équations de MAXWELL dans le milieu infini à constante diélectrique périodique. Ensuite sur le milieu fini on fait tomber une onde extérieure et les conditions aux limites déterminent les ondes excitées parmi celles constituant les champs d'ondes dynamiquement stables.

II. Principes de la méthode.

Le milieu est décrit par une constante diélectrique de période $A = \frac{1}{b}$ qu'on peut représenter par une série de FOURIER (ainsi que son inverse):

$$\varepsilon(\vec{r}) = \sum_n \varepsilon_n e^{2\pi i(n\vec{b}, \vec{r})} \quad \psi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} = \sum_n \psi_n e^{2\pi i(n\vec{b}, \vec{r})} \quad (1)$$

\vec{b} étant le vecteur perpendiculaire aux plans de stratification.

On cherche alors des solutions des équations de MAXWELL sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \sum_n \vec{D}_n e^{2\pi i [(\vec{k}_n \vec{r}) - \nu t]} \\ \vec{E} &= \sum_n \vec{E}_n e^{2\pi i [\dots]} \\ \vec{B} = \vec{H} &= \sum_n H_n e^{2\pi i [\dots]} \end{aligned} \right\} \quad (2) \quad \left. \begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon(\vec{r}) \vec{E} \\ \text{ou} \\ \vec{E} &= \psi(\vec{r}) \vec{D} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Il résulte des équations matérielles (3) les relations :

$$\vec{k}_n = \vec{k}_0 + n \vec{b} \quad (4)$$

et

$$\vec{E}_n = \sum_m \psi_{n-m} \vec{D}_m; \quad (5) \quad \vec{D}_n = \sum_m \varepsilon_{n-m} \vec{E}_m. \quad (6)$$

En introduisant ces valeurs dans les équations de MAXWELL, on trouve soit :

$$\frac{k^2}{k_n^2} \vec{D}_n = \sum_m \psi_{n-m} D_m \perp k_n \quad (7)$$

soit

$$\frac{k_n^2}{k^2} \vec{E}_n = \sum_m \varepsilon_{n-m} E_m \perp k_n \quad \text{avec} \quad k = \frac{\nu}{c} \quad (8)$$

suivant qu'on a éliminé les E ou les D .

La dernière équation (8) n'est vraiment utile que si on connaît la direction des \vec{E}_n par rapport aux \vec{k}_n tandis que, les \vec{D}_n étant toujours perpendiculaires aux \vec{k}_n , la résolution des équations (7) est ainsi facilitée.

L'équation (4) détermine tous les vecteurs d'onde à partir de l'un d'entre eux, \vec{k}_0 par exemple. Il est donc nécessaire de calculer celui-ci et la condition qui permet de le faire est donnée par le fait que les $|E_n|$ et les $|D_n|$ doivent converger. Cette condition est en général remplie si le déterminant qu'on peut former avec les coefficients des $|D_n|$ ou des $|E_n|$, respectivement dans les équations (7) ou (8) s'annule. Cependant ce déterminant est en général trop compliqué qu'on puisse résoudre le problème de cette façon. Nous emploierons pour cela une méthode indirecte. On trouve alors toute une série de valeurs propres de \vec{k}_0 faisant converger les expressions (7) et (8). Du reste il est plus facile et plus commode pour l'introduction des conditions aux limites de rechercher les valeurs propres non pas de \vec{k}_0 , mais de la composante perpendiculaire à \vec{b} de ce vecteur pour une composante le long de \vec{b} donnée.

III. Méthode d'Extermann.

Dans ses travaux sur la diffraction de la lumière par les ondes ultra-sonores EXTERMANN est parti des équations (8) en supposant que le vecteur \vec{E}_n est perpendiculaire à \vec{k}_n . Cela est toujours approximativement vrai lorsque les fluctuations de la constante diélectrique sont petites. Pour les rayons X dans les cristaux et pour la lumière dans les ondes ultra-sonores, il est absolument inutile de considérer l'angle entre \vec{D}_n et \vec{E}_n . Ce parallélisme est par contre tout-à-fait exact, même si les fluctuations de la constante diélectrique sont grandes, pour un état particulier de polarisation de la lumière : celui dans lequel tous les \vec{D}_n sont perpendiculaires au plan des \vec{k}_n .

En effet, les équations vectorielles (7) peuvent se décomposer en deux groupes d'équations scalaires :

$$\frac{k^2}{k_n^2} D_n' = \sum_m \psi_{n-m} D_m' \quad (9)$$

$$\frac{k^2}{k_n^2} D_n'' = \sum_m \psi_{n-m} D_m'' \cos(k_m k_n) \quad (10)$$

où D' et D'' sont les composantes respectivement perpendiculaire et parallèle au plan des \vec{k}_n du vecteur \vec{D} . On voit ainsi que les ondes sont séparées en deux polarisations puisque l'amplitude des ondes perpendiculaires est indépendante de celle des ondes parallèles. Les ondes perpendiculaires en particulier forment donc une solution de notre problème. D'autre part, les équations (5) montrent que lorsque tous les \vec{D}_n sont parallèles entre eux, les \vec{E}_n ont la même direction que les \vec{D}_n , ils sont donc normaux aux \vec{k}_n .

Par conséquent les résultats d'EXTERMANN sont valables pour cet état de polarisation dans tous les cas de propagation d'ondes électromagnétiques dans les milieux périodiques. La valeur des paramètres :

$$\Theta_n = \varepsilon_n \frac{k^2}{b^2}$$

liant intimement le rapport k^2/b^2 et les fluctuations de la constante diélectrique, détermine ainsi complètement le problème.

EXTERMANN a donné les valeurs numériques des solutions pour une constante diélectrique sinusoidale de la forme :

$$\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 \cos 2\pi(b\vec{r})$$

et pour différentes valeurs du paramètre $\Theta_1 = \varepsilon_1 k^2/b^2$. Pour les

ultra-sons, ε_1 est de l'ordre de 10^{-4} et k^2/b^2 de l'ordre de 10^4 , ce qui donne à Θ_1 une valeur de l'ordre de l'unité: pour notre problème par contre ε_1 et k^2/b^2 sont tous les deux de l'ordre de grandeur de l'unité et par conséquent les résultats numériques d'EXTERMANN peuvent être employés sans autre.

Comme nous l'avons dit toutefois, ces calculs ne sont valables que pour un état particulier de polarisation. Il nous faut donc envisager un mode de calcul différent pour avoir des résultats complets. Nous donnons plus loin à titre de comparaison quelques valeurs numériques déduites directement des tables d'EXTERMANN.

IV. Méthode générale.

Dans les équations (9) et (10) on a décomposé les vecteurs \vec{D}_n en deux composantes: D_n' perpendiculaires au plan des k_n et D_n'' dans ce plan. Il est commode de désigner l'ensemble des D_n' sous le nom de polarisation perpendiculaire et les D_n'' par polarisation parallèle. Ces deux polarisations correspondent du reste, la première aux ondes ordinaires et la seconde aux ondes extraordinaires de l'optique cristalline. Pour simplifier la résolution des équations (9) et (10) nous supposerons que l'inverse $\psi(\vec{r})$ de la constante diélectrique est une fonction sinusoïdale:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0 + 2 \psi_1 \cos 2 \pi (b\vec{r}). \quad (11)$$

A. Polarisation perpendiculaire.

Les équations (9) deviennent grâce à (11):

$$\psi_1 (D_{n-1} + D_{n+1}) + \left(\psi_0 - \frac{k^2}{(\vec{k}_0 + n\vec{b})^2} \right) D_n = 0.$$

En appelant μb la composante de \vec{k}_0 parallèle à \vec{b} et lb la composante perpendiculaire, cette équation prend la forme:

$$\frac{\psi_1}{\psi_0} [l^2 + (\mu + n)^2] (D_{n-1} + D_{n+1}) + \left[l^2 + (\mu + n)^2 - \frac{k^2}{\psi_0 b^2} \right] D_n = 0. \quad (12)$$

Nous devons résoudre ce système d'équations pour les D_n et il faut en plus que ces valeurs convergent. Il faut donc, étant donné μ , trouver les valeurs propres de l , qui donnent cette convergence. Pour cela, nous avons employé une méthode qui rappelle celle d'EXTERMANN. Elle consiste à calculer les rapports

$$\frac{D_{n-1}}{D_n} \quad \text{et} \quad \frac{D_{n+1}}{D_n}$$

au moyen de fractions continues, en partant d'une valeur approchée de l . En plaçant les valeurs de ces rapports dans (12) et en résolvant pour l , on trouve en général une nouvelle valeur, avec laquelle on recommence le calcul. On trouvera dans l'appendice une description détaillée de cette méthode.

B. Polarisation parallèle.

Si l'on exprime les cosinus des équations (10) en fonction des composantes des \vec{k}_n , elles deviennent

$$\frac{\psi_1}{\psi_0} [l^2 + (\mu + n - 1)(\mu + n)] \mathfrak{D}_{n-1} + \left[l^2 + (\mu + n)^2 - \frac{k^2}{\psi_0 b^2} \right] \mathfrak{D}_n + \frac{\psi_1}{\psi_0} [l^2 + (\mu + n)(\mu + n + 1)] \mathfrak{D}_{n+1} = 0 \quad (13)$$

avec

$$\mathfrak{D}_n = \frac{D_n}{k_n}.$$

Ce système se résoud de la même manière que (12). On remarquera que (12) et (13) dépendent de deux paramètres

$$\frac{\psi_1}{\psi_0} = \Theta \quad \text{et} \quad \frac{k^2}{\psi_0 b^2} = k'^2.$$

Les résultats numériques que nous donnerons plus loin ne s'appliquent plus à une variété du problème aussi étendue que ceux de la première méthode.

V. Surfaces de dispersion.

On appelle surface de dispersion le lieu des origines des vecteurs des ondes de fréquence pouvant se propager dans le réseau. On suppose ces vecteurs tracés dans le réseau réciproque qu'on choisit arbitrairement comme origine.

La figure (1) donne une coupe de la surface de dispersion calculée pour une valeur particulière des deux paramètres Θ et k' . On a pris

$$\frac{k}{b} = 2 \quad \text{et} \quad \psi(\vec{r}) = \frac{1}{4} [3 - \cos 2\pi(\vec{b}\vec{r})]$$

et donc

$$\Theta = -\frac{1}{6} \quad k'^2 = \frac{16}{3}.$$

Ces valeurs correspondent à un milieu de constante diélectrique

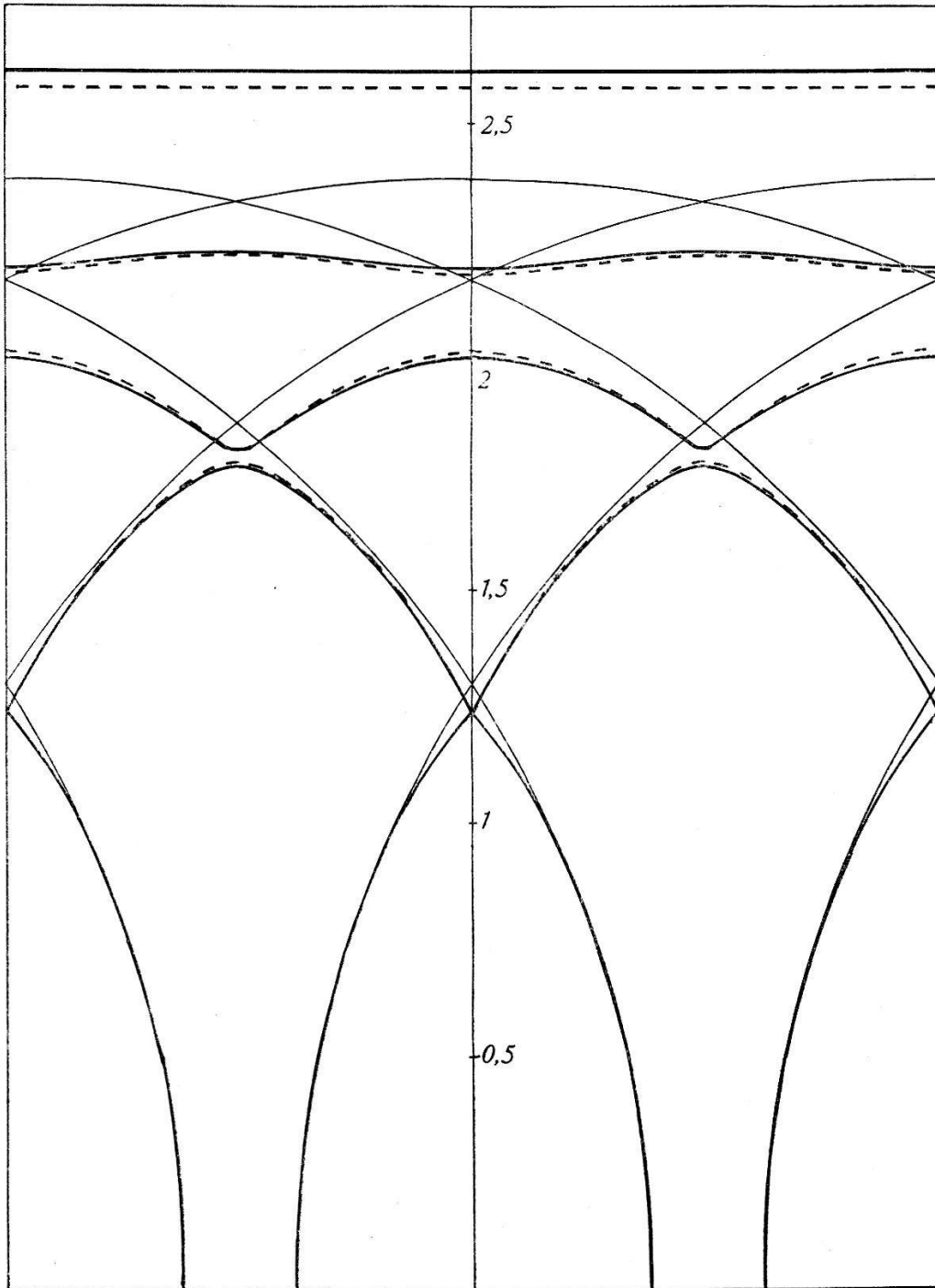


Fig. 1.

Surfaces de dispersion.

En trait plein polarisation perpendiculaire, en pointillé polarisation parallèle. Les surfaces ont été calculées pour

$$\frac{1}{\varepsilon(x)} = \frac{1}{4} (3 - \cos 2\pi b x) \quad \text{et} \quad \frac{k}{b} = 2.$$

La longueur d'onde est donc deux fois plus petite que la période du réseau et la constante diélectrique varie presque sinusoidalement entre les valeurs 1 et 2.

On remarquera que la différence entre les deux polarisation est surtout sensible pour les premières nappes des surfaces de dispersion.

moyenne 1,415. La constante diélectrique elle-même fluctue presque sinusoidalement entre les valeurs 1 et 2. Nous ne donnons pas ici les caractéristiques du milieu en fonction de l'indice de réfraction, car celui-ci n'a plus de signification précise, la vitesse des ondes variant avec leur orientation comme on peut le voir clairement sur la fig. 1.

Les deux polarisations ne donnent évidemment pas les mêmes surfaces de dispersion, les équations (12) et (13) différant, par les coefficients de D_{n-1} et D_{n+1} . Ces coefficients contiennent $\frac{\psi_1}{\psi_0} = \Theta$ en facteur et par conséquent l'effet de polarisation sera proportionnel à ce paramètre, qui mesure l'amplitude des fluctuations de l'inverse de la constante diélectrique. Cette différence entre les deux surfaces de dispersion donne à notre milieu des propriétés de biréfringence. Mais cette double réfraction ne se fera pas sentir sur la direction des ondes réfléchies ou transmises par une plaque à faces parallèles; ces ondes seront par contre partiellement polarisées. Dans le paragraphe suivant, considérant les conditions aux limites à la surface du milieu, nous aurons l'occasion de montrer que les ondes transmises sortent d'un milieu prismatique avec des directions différentes pour les deux polarisations.

VI. Conditions aux limites.

Nous avons étudié jusqu'ici le « spectre en direction » des ondes de fréquence ν pouvant se propager dans le milieu stratifié supposé infini. Nous allons maintenant laisser tomber sur le milieu, limité par un plan, une onde extérieure et chercher quelles seront les ondes intérieures qui se trouvent ainsi excitées. Il est bien évident que ces ondes devront être choisies parmi celles du « spectre en direction ». Les conditions aux limites électromagnétiques nous permettront de calculer exactement, soit les directions de ces ondes, soit leurs amplitudes et leurs phases.

Les problèmes rayons X — cristaux et lumière — ultrasons, traités par la méthode que nous avons employés, ne font pas intervenir d'ondes réfléchies directement. En effet, les fluctuations autour de l'unité de la constante diélectrique sont alors trop petites pour qu'il soit nécessaire de considérer que E diffère de D . Il n'en est plus de même pour le réseau optique et pour l'optique cristalline⁵⁾. Il nous faudra donc introduire les conditions rigoureuses de l'électromagnétisme.

A. Direction et vitesse des ondes.

Nous avons dessiné dans la figure 2 quelques points du réseau réciproque et des surfaces de dispersion schématiques ainsi que la surface de dispersion pour le vide autour du point 0, qui est simplement une sphère de rayon k . Nous avons supposé que le milieu était limité par une surface plane perpendiculaire au plan du papier

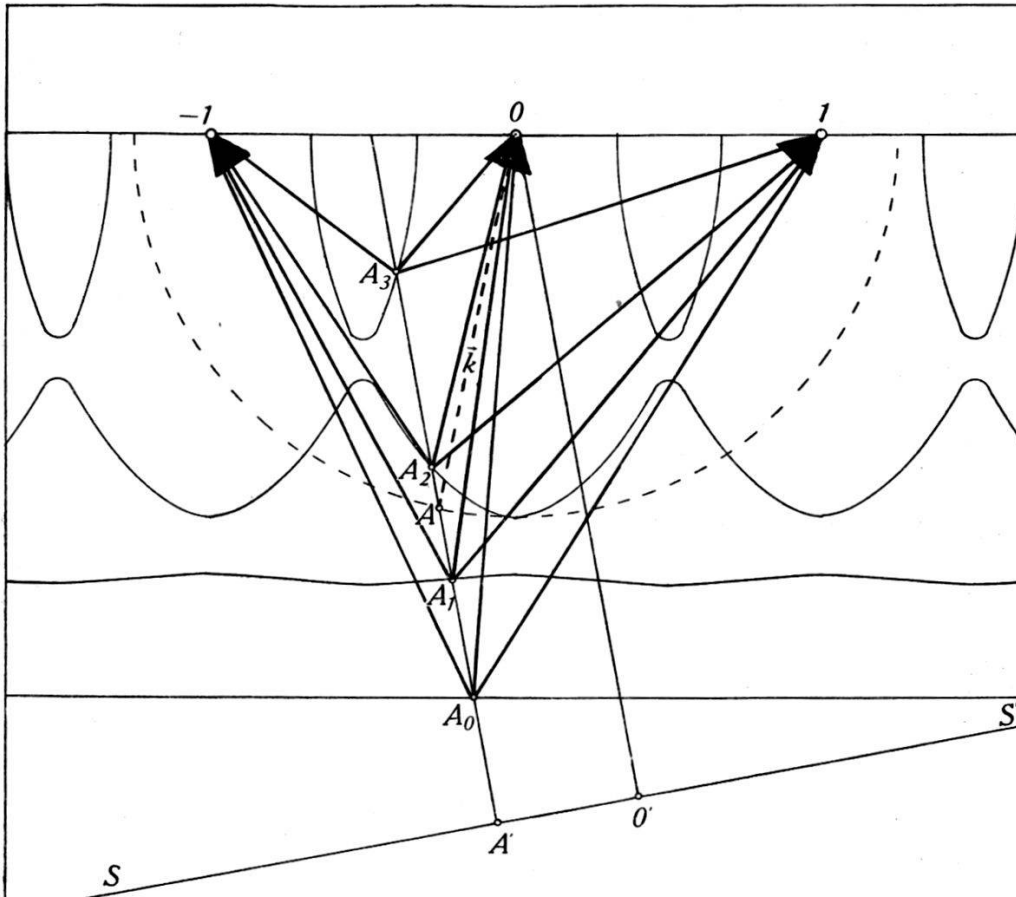


Fig. 2.

Conditions aux limites géométriques.

Les points $-1, 0, 1$ etc. forment le réseau réciproque. Les surfaces de dispersion sont schématiques, le cercle pointillé représentant la surface de dispersion pour le vide. La composante tangentielle de \vec{k} est $A'O'$ et les ondes $\vec{A_0O}, \vec{A_1O}$, etc., de l'ordre zéro, ont la même composante tangentielle, car $\vec{A'A_3}$ est la normale à la surface SS' . A chacune des ondes A_0 sont associées les ondes $A_1, A-1$, etc., formant la couche.

donnant une trace SS' . Si maintenant une onde extérieure tombe sur le milieu, on sait que les ondes réfractées doivent avoir la même composante de vitesse selon la surface de séparation, ou, ce qui revient au même, même composante de vecteur d'onde selon cette surface. D'autre part, les vecteurs des ondes réfractées doivent prendre naissance sur les surfaces de dispersion. Si donc on a

*

tracé le vecteur k de l'onde incidente aboutissant à 0, il suffira de faire passer par son origine une normale à la surface SS' pour trouver aux intersections de celle-ci avec les surfaces de dispersion les origines des vecteurs des ondes réfractées aboutissant donc au point 0. Mais, comme nous le savons, chaque onde réfractée est accompagnée d'ondes diffractées, dont les vecteurs ont même origine, mais aboutissent chacun des points du réseau réciproque. Nous dirons que toutes les ondes ayant des vecteurs d'onde prenant naissance au même point des surfaces de dispersions forment une couche, tandis que toutes les ondes dont les vecteurs se terminent sur le même point du réseau réciproque forment un ordre. Ainsi toutes les ondes d'un même ordre ont même composante de vitesse tangentielle. Les amplitudes des ondes auront deux indices D_m^l , m indiquant l'ordre et l la couche; les ordres sont numérotés d'après les points du réseau réciproque et les couches d'après les nappes des surfaces de dispersion en appelant 0 la plus éloignée de l'origine.

B. Amplitude des ondes.

Les conditions aux limites qui expriment la continuité de la composante normale à la surface de D et la continuité de la composante de E le long de la surface s'appliqueront séparément à chaque ordre puisque seules toutes les ondes d'un même ordre ont même composante de vitesse le long de la surface. On aura donc

$$\begin{aligned} E_0^i + E_0^r &= \sum_l E_0^l; & E_m^r &= \sum_l E_m^l \quad (m \neq 0) \\ (E_0^i - E_0^r) \cotg \varphi_0^i &= \sum_l E_0^l \cotg \varphi_0^l; \\ E_m^r \cotg \varphi_m^r &= \sum_l E_m^l \cotg \varphi_m^l \quad (m \neq 0) \end{aligned} \quad (14)$$

pour la polarisation perpendiculaire, et

$$\begin{aligned} (D_0^i + D_0^r) \sin \varphi_0^i &= \sum_l D_0^l \sin \varphi_0^l; & D_m^r \sin \varphi_m^r &= \sum_l D_m^l \sin \varphi_m^l \quad (m \neq 0) \\ (E_0^i - E_0^r) \cos \varphi_0^i &= \sum_l E_0^l \cos (\varphi_0^l + \alpha_0^l); & E_m^r \cos \varphi_m^r &= \sum_l E_m^l \cos (\varphi_m^l + \alpha_m^l) \quad (m \neq 0) \end{aligned} \quad (15)$$

pour la polarisation parallèle.

Dans ces expressions, nous avons écrit séparément les conditions aux limites pour l'ordre zéro car, pour celui-ci, seul intervient l'onde incidente désignée par un indice supérieur i . L'indice r

indique les ondes réfléchies. L'angle φ_0^i est l'angle d'incidence, les φ_m^l les angles de réfraction et de diffraction, les φ_m^r ceux de réflexion et les α_m^l sont les angles entre les vecteurs D_m^l et E_m^l de la polarisation parallèle.

Comme il y a autant d'ondes que de couches, on peut montrer facilement que ces équations déterminent entièrement le système.

Ces conditions sont valables sur la face d'entrée du milieu. Ce sont celles avec lesquelles nous avons fait nos calculs. Si le milieu est limité par une face de sortie plane, il se produit sur celle-ci des réflexions internes et il est nécessaire de considérer à nouveau les conditions aux limites pour les directions et pour les amplitudes des ondes. Nous avons concentré dans l'appendice 2 quelques remarques générales à ce sujet.

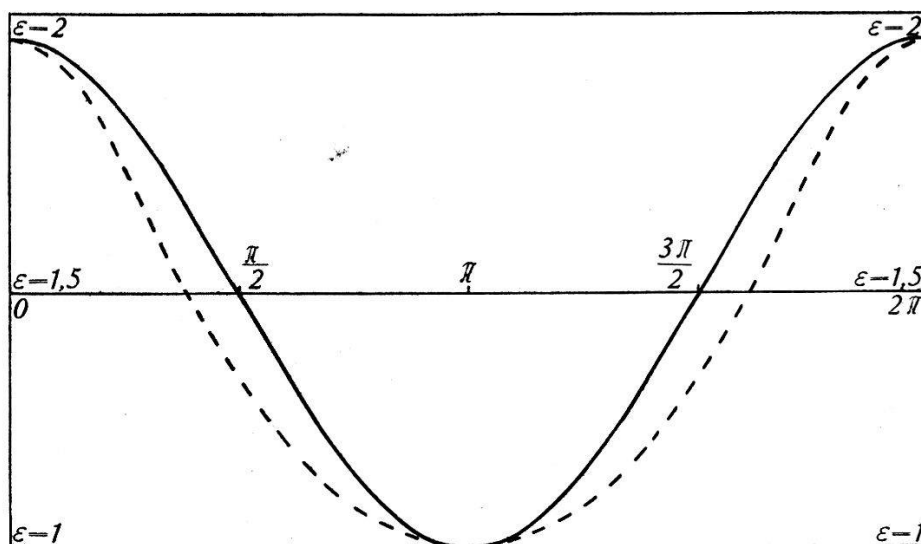


Fig. 3.

Les fonctions $\varepsilon(x)$.

Les calculs du texte ont été faits pour ces deux valeurs de $\varepsilon(x)$. La courbe en trait plein correspond à $\varepsilon(x) = 1/2[3 + \cos 2\pi b x]$ (méthode d'EXTERMANN), la courbe en trait pointillé à $\varepsilon(x) = \frac{4}{3 - \cos 2\pi b x}$ (méthode générale).

La moyenne de $\varepsilon(x)$ sur une période est plus faible pour le second cas que dans le premier.

Résultats numériques.

On trouvera dans la table ci-dessous et dans les figures 4 et 5 les résultats de nos calculs. Nous nous sommes spécialement intéressés aux réflexions se produisant sur la face d'entrée du réseau, sans introduire les réflexions internes. Le réseau est donc représenté par un milieu semi infini de constante diélectrique donnée par (11).

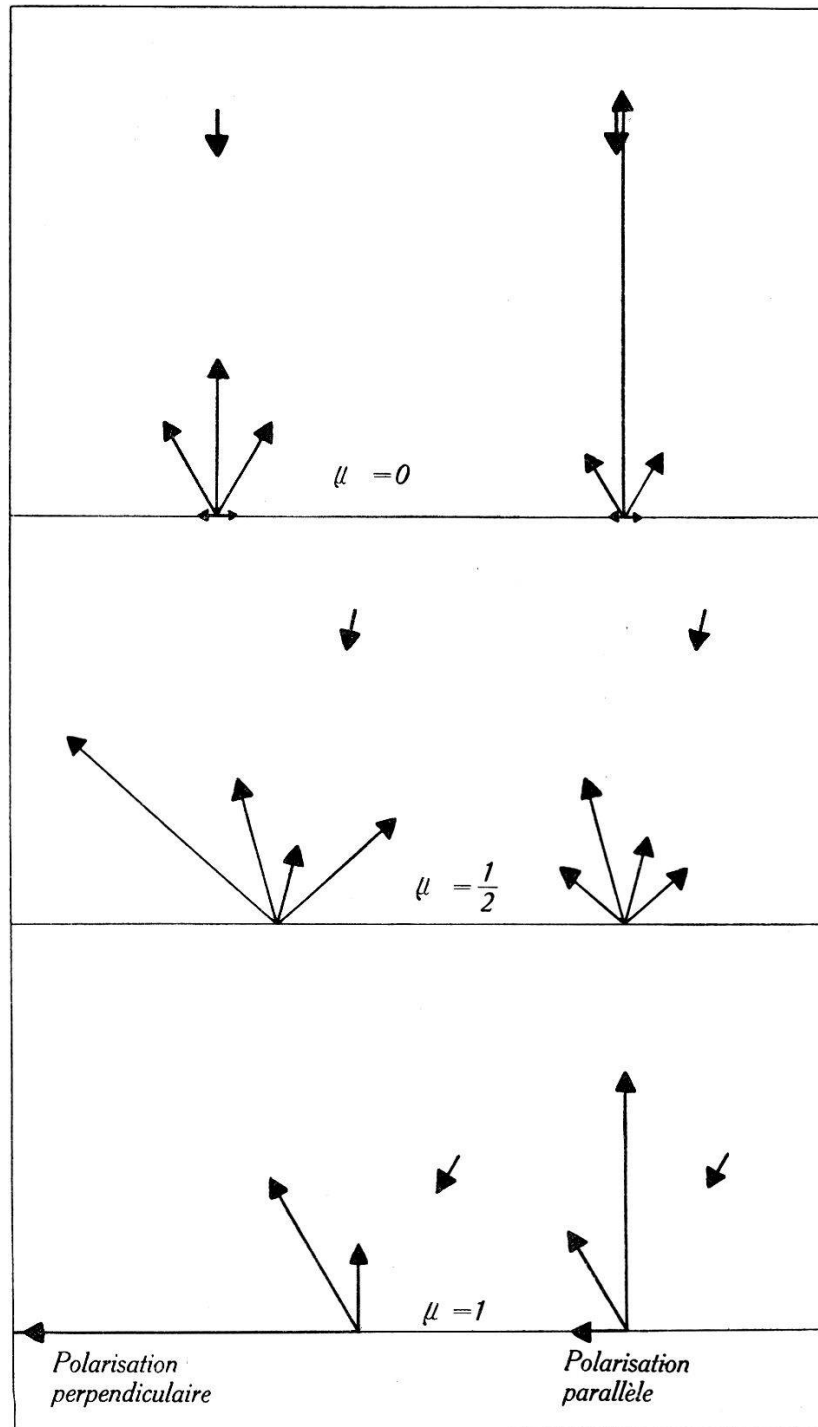


Fig. 4.

Amplitudes des ondes réfléchies pour différents angles d'incidence.

Ces figures représentent les résultats de nos calculs numériques sur le réseau représenté par

$$\frac{1}{\varepsilon(x)} = \frac{1}{4} (3 - \cos 2\pi b x)$$

avec $\lambda = \frac{1}{2} \Lambda$. La petite flèche indique la direction de l'onde incidente, les autres flèches la direction des ondes réfléchies, leur longueur étant proportionnelle aux amplitudes des ondes. Le paramètre μ se réfère à l'incidence. A gauche, les figures sont tracées pour la polarisation perpendiculaire, tandis qu'à droite, on a la polarisation parallèle. Les réflexions ont lieu évidemment dans les mêmes directions pour ces deux polarisations. On remarquera que si l'on avait envoyé sur le réseau de la lumière naturelle, tous les ordres auraient été partiellement polarisés.

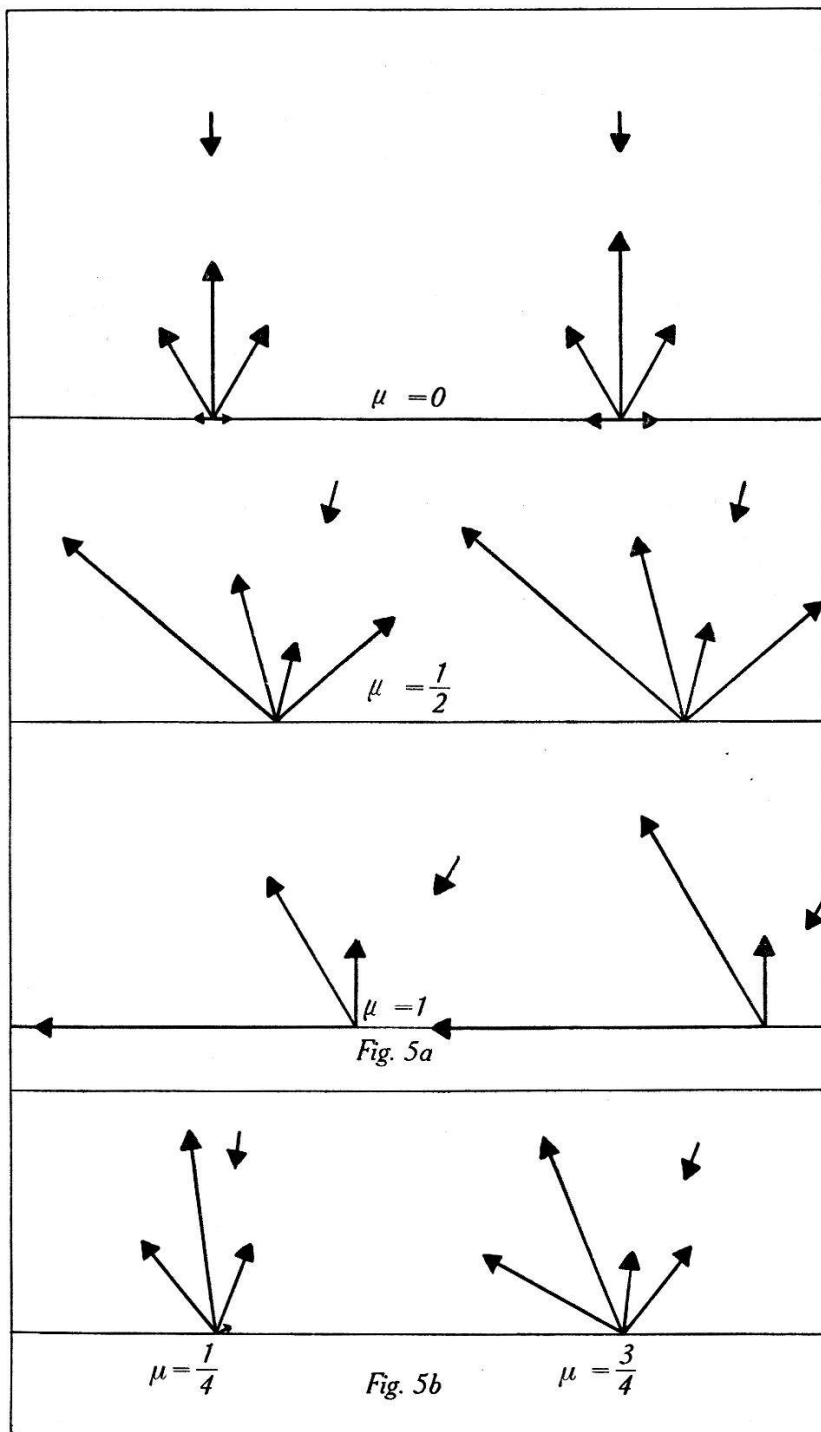


Fig. 5.

Amplitude des ondes réfléchies pour différents angles d'incidence.

Les figures a) représentent face à face des amplitudes des ondes réfléchies pour les polarisations perpendiculaires de deux réseaux de même période, mais de constantes diélectriques données par

$$\varepsilon(x) = \frac{4}{3 - \cos 2\pi b x} \qquad \varepsilon(x) = \frac{1}{2}(3 + \cos 2\pi b x).$$

Alors que la différence des constantes diélectriques a peu d'influence sur les surfaces de dispersion, on voit qu'il n'en est pas de même pour les amplitudes des ondes réfléchies. Les figures b) donnent deux autres incidences du réseau de droite.

Table.*Ondes réfléchies: Méthode générale.*

Polarisation ordre	$\mu = 0$		$\mu = \frac{1}{2}$		$\mu = 1$	
	\perp	\parallel	\perp	\parallel	\perp	\parallel
E_{-3}	—	—	—	—	-0,001	0,002
E_{-2}	-0,009	0,008	-0,078	0,041	-0,003	0,001
E_{-1}	-0,053	0,037	-0,040	0,045	-0,043	0,126
E_0	-0,077	0,253	-0,074	0,075	-0,086	0,057
E_1	-0,053	0,037	-0,138	0,042	-0,190	0,026
E_2	-0,009	0,008	—	—	—	—

Méthode d'Extermann (polarisation perpendiculaire).

ordre	$\mu = 0$	$\mu = \frac{1}{4}$	$\mu = \frac{1}{2}$	$\mu = \frac{3}{4}$	$\mu = 1$
E_{-3}	—	—	—	—	-0,001
E_{-2}	0,018	0,009	-0,090	-0,054	+0,006
E_{-1}	-0,053	-0,047	-0,049	-0,041	-0,044
E_0	-0,092	-0,099	-0,093	-0,103	-0,120
E_1	-0,053	-0,059	-0,144	-0,077	-0,163
E_2	0,018	—	—	—	—

Amplitude des ondes réfléchies.

Cette table correspond aux figures 4 et 5.

Les amplitudes sont normalisées, l'amplitude de l'onde incidente ayant été prise comme unité.

On remarquera que l'intensité totale réfléchie est faible; elle atteint 5% dans le cas le plus favorable. Cela provient de ce que la constante diélectrique moyenne est faible, 1,4 environ, ce qui correspond à un indice de réfraction moyen de 1,2 environ.

Conclusion.

La théorie du réseau optique transparent que nous avons donnée est évidemment très incomplète; en effet, elle ne s'applique qu'à un milieu dont l'inverse de la constante diélectrique est sinusoïdal et qui est infiniment épais. Il serait difficile de résoudre les équations fondamentales de récurrence avec plus de trois termes (constante non sinusoïdale) par la méthode employée; il serait par contre relativement facile de tenir compte des réflexions internes pour étudier un réseau très peu épais. Nous pensons cependant que les phénomènes principaux que nous avons mis en évidence seront encore justes pour un réseau plus général.

La théorie du réseau métallique n'aurait aucun avantage à s'inspirer des méthodes qui nous ont servi pour le réseau transparent. En effet, les ondes lumineuses sont si rapidement absorbées dans le métal que les ondes intérieures ne doivent jouer qu'un rôle très effacé alors qu'au contraire c'étaient elles qui déterminaient le problème du réseau transparent.

Appendice 1.

Méthode de résolution des systèmes (12) et (13).

Pour assurer la convergence des inconnues d'un système linéaire et homogène, il faut, en général, annuler le déterminant infini formé avec les coefficients de ces inconnues. Mais il est impossible, dans notre cas, de résoudre le problème de cette manière: les déterminants ainsi formés sont beaucoup trop compliqués. C'était d'ailleurs déjà le cas pour EXTERMANN et WANNIER¹⁾. Ils sont alors généralisé une méthode donnée par INCE²⁾ pour un système du même genre. Nos systèmes (12 et 13) sont plus généraux que ceux qu'on a considérés jusqu'ici et nous avons pensé bien faire en décrivant la méthode inspirée d'INCE dont nous nous sommes servi.

Considérons 3 équations du système (13) pour 3 valeurs successives de n :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \Theta [l^2 + (\mu + n - 2) (\mu + n - 1)] \mathfrak{D}_{n-2} + [l^2 + (\mu + n - 1)^2 - k'^2] \mathfrak{D}_{n-1} \\ & + \Theta [l^2 + (\mu + n - 1) (\mu + n)] \mathfrak{D}_n = 0; \\ \text{b) } & \Theta [l^2 + (\mu + n - 1) (\mu + n)] \mathfrak{D}_{n-1} + [l^2 + (\mu + n)^2 - k'^2] \mathfrak{D}_n \\ & + \Theta [l^2 + (\mu + n) (\mu + n + 1)] \mathfrak{D}_{n+1} = 0; \\ \text{c) } & \Theta [l^2 + (\mu + n) (\mu + n + 1)] \mathfrak{D}_n + [l^2 + (\mu + n + 1)^2 - k'^2] \mathfrak{D}_{n+1} \\ & + \Theta [l^2 + (\mu + n + 1) (\mu + n + 2)] \mathfrak{D}_{n+2} = 0. \end{aligned}$$

Si $\Theta = 0$, l'équation b) donne $l^2 = k'^2 - (\mu + n)^2$. Il y aura donc une valeur propre de l^2 associée à $k'^2 - (\mu + n)^2$; désignons-la par a^n et cherchons sa valeur.

$$\text{Posons } \varepsilon_{n-1} = \frac{\mathfrak{D}_{n-1}}{\mathfrak{D}_n} \quad \text{et} \quad \delta_{n+1} = \frac{\mathfrak{D}_{n+1}}{\mathfrak{D}_n} \quad (1)$$

L'équation b) peut alors se transformer pour donner la relation:

$$a^n = - \frac{k'^2 + (\mu + n) \Theta (\varepsilon_{n-1} - \delta_{n+1})}{1 + \Theta [\varepsilon_{n-1} + \delta_{n+1}]} - (\mu + n)^2. \quad (2)$$

¹⁾ EXTERMANN et WANNIER, *Helv. Phys. Acta* **9**, 520, 1936. — EXTERMANN, *Helv. Phys. Acta* **10**, 185, 1937.

²⁾ INCE, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **46**, 20—29, 1925; **46**, 316—322, 1926; **47**, 294—301, 1927.

Nous avons donc une expression de a^n en fonction des paramètres du problème et des deux quantités ε_{n-1} et δ_{n+1} . Ces dernières peuvent se calculer indirectement de (2) dès que l'on se donne une valeur pour a^n . En effet, considérons tout d'abord δ ; l'équation c) peut s'écrire:

$$\Theta [a^n + (\mu + n) (\mu + n + 1)] 1/\delta_{n+1} + [a^n + (\mu + n + 1)^2 - k'^2] + \Theta [a^n + (\mu + n + 1) (\mu + n + 2)] \delta_{n+2} = 0$$

d'où l'on tire:

$$\delta_{n+1} = - \frac{\Theta [a^n + (\mu + n) (\mu + n + 1)]}{a^n + (\mu + n + 1)^2 - k'^2 + \Theta [a^n + (\mu + n + 1) (\mu + n + 2)] \delta_{n+2}}.$$

En remplaçant de proche en proche δ_{n+m} en fonction de δ_{n+m+1} par des formules semblables, on obtient facilement pour δ_{n+1} la fraction continue suivante:

$$\delta_{n+1} = - \frac{\Theta [a^n + (\mu + n) (\mu + n + 1)]}{a^n + (\mu + n + 1)^2 - k'^2 -} \frac{\Theta^2 [a^n + (\mu + n + 1) (\mu + n + 2)]^2}{a^n + (\mu + n + 2)^2 - k'^2 -}. \quad (3)$$

Pour ε_{n-1} , en procédant de la même manière à partir de l'équation a), on peut obtenir une fraction continue du même type:

$$\varepsilon_{n-1} = - \frac{\Theta [a^n + (\mu + n) (\mu + n - 1)]}{a^n + (\mu + n - 1)^2 - k'^2 -} \frac{\Theta^2 [a^n + (\mu + n - 1) (\mu + n - 2)]^2}{a^n + (\mu + n - 2)^2 - k'^2 -}. \quad (4)$$

Ces fractions continues sont convergentes, comme on peut le démontrer. Pour avoir une solution approchée, on peut donc les interrompre au terme d'ordre N_1 pour δ_{n+1} et au terme d'ordre $(-N_2)$ pour ε_{n-1} . Il est alors possible de les calculer après avoir choisi une valeur a_0^n pour a^n . Nous avons pris comme première approximation $a_0^n = k'^2 - (\mu + n)^2$. Les résultats obtenus pour ε_{n-1} et δ_{n+1} , portés dans la relation (2) nous ont donné alors une valeur a_1^n différente de a_0^n . Il est théoriquement possible d'établir une formule donnant la seconde approximation a_1^n en fonction de a_0^n et de $a_0'^n$. Cette formule s'écrit toujours:

$$a_{m+1}^n = a_m^n + \frac{1}{c} (a_m'^n - a_m^n). \quad (5)$$

Mais l'expression de c est trop compliquée, aussi nous avons fait le calcul pour deux valeurs différentes de a_0^n : a_0^n donnant $a_0'^n$ et a_1^n donnant $a_1'^n$, on peut ainsi facilement déterminer c , car la valeur a_2^n trouvée doit être la même dans les deux cas:

$$a_0^n + \frac{1}{c} (a_0'^n - a_0^n) = a_1^n + \frac{1}{c} (a_1'^n - a_1^n)$$

d'où l'on tire $1/c$.

Ayant une valeur de $1/c$, nous l'avons portée dans (5). On arrive ainsi très rapidement à un résultat suffisamment approché, dont on connaît en plus l'approximation: l'erreur ne peut pas dépasser $|a_m^n - a'_m^n|$.

Pour la polarisation perpendiculaire, le système (12) se résoud lui aussi par cette méthode grâce aux équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 a^n &= \frac{k'^2}{1 + \Theta [\varepsilon_{n-1} + \delta_{n+1}]} - (\mu+n)^2 \\
 \varepsilon_{n-1} &= -\frac{\Theta [a^n + (\mu+n-1)^2]}{a^n + (\mu+n-1)^2 - k'^2} - \frac{\Theta^2 [a^n + (\mu+n-1)^2][a^n + (\mu+n-2)^2]}{a^n + (\mu+n-2)^2 - k'^2} \quad (6) \\
 \delta_{n+1} &= -\frac{\Theta [a^n + (\mu+n+1)^2]}{a^n + (\mu+n+1)^2 - k'^2} - \frac{\Theta^2 [a^n + (\mu+n+1)^2][a^n + (\mu+n+2)^2]}{a^n + (\mu+n+2)^2 - k'^2}.
 \end{aligned}$$

Il faut remarquer en plus que les surfaces de dispersion sont périodiques avec la période b c'est-à-dire que $a^n(\mu)$ est périodique avec la période 1; de plus elle est symétrique. Les calculs pour $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ donnent donc la fonction $l(\mu)$ pour toutes les valeurs de μ . La méthode précédente ne peut cependant pas s'appliquer directement pour $\mu = 0$ et $\mu = \frac{1}{2}$ car, par suite de la symétrie des formules, l'équation b) qui est le critère de l'exactitude des valeurs propres choisies est implicitement contenue dans une des fractions continues. Le moyen de tourner la difficulté nous est donné par la symétrie même:

Pour $\mu = 0$, on peut poser $D_m = \pm D_{-m}$ et $\mathfrak{D}_m = \pm \mathfrak{D}_{-m}$. Si, dans ces conditions, on examine les équations pour $n = 0$, on remarque alors que les fractions continues peuvent être interrompues à ce terme:

Prenons par exemple le système (12). L'équation avec $n = 0$ s'écrit alors: $(a^n - k'^2) D_0 + \Theta a^n (D_1 + D_{-1}) = 0$. Si l'on pose $D_m = D_{-m}$ (solutions symétriques) l'équation donne alors:

$$(a^n - k'^2) D_0 + 2 \Theta a^n D_1 = 0. \quad (7)$$

Si, par contre, $D_m = -D_{-m}$ (solutions antisymétriques) la même équation montre que $D_0 = 0$ et l'équation pour $n = 1$ peut s'écrire:

$$(a^n + 1 - k'^2) D_1 + \Theta (a^n + 1) D_2 = 0. \quad (8)$$

Pour le système (13), les relations correspondantes s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 (a^n - k'^2) \mathfrak{D}_0 + 2 \Theta a^n \mathfrak{D}_1 &= 0 \\
 (a^n + 1 - k'^2) \mathfrak{D}_1 + \Theta [a^n + 2] \mathfrak{D}_2 &= 0. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Pour $\mu = \frac{1}{2}$, on a le même phénomène : On peut poser $D_{m+1} = \pm D_{-m}$ et $\mathfrak{D}_{m+1} = \pm \mathfrak{D}_{-m}$. $m > 0$. Les relations (7—9) s'écrivent alors :

$$\left. \begin{aligned} [a^n + \frac{1}{4} - k'^2 + \Theta(a^n + \frac{1}{4})] D_1 + \Theta(a^n + \frac{1}{4}) D_2 &= 0 \\ [a^n + \frac{1}{4} - k'^2 - \Theta(a^n + \frac{1}{4})] D_1 + \Theta(a^n + \frac{1}{4}) D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} [a^n + \frac{1}{4} - k'^2 + \Theta(a^n - \frac{1}{4})] \mathfrak{D}_1 + \Theta(a^n + \frac{3}{4}) \mathfrak{D}_2 &= 0 \\ [a^n + \frac{1}{4} - k'^2 - \Theta(a^n - \frac{1}{4})] \mathfrak{D}_1 + \Theta(a^n + \frac{3}{4}) \mathfrak{D}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Cette méthode de résolution d'équations linéaires et homogènes en nombre infini et à une infinité d'inconnues peut être appliquée à des systèmes plus généraux que ceux auxquels la théorie du réseau nous a amené. Il serait intéressant de la généraliser.

Appendice 2.

Remarques sur les réflexions internes.

Si on considère une des ondes se propageant à l'intérieur du milieu, arrivant sur la face de sortie, elle va en partie se réfracter pour sortir du milieu, en partie se réfléchir et se diffracter. Si la face de sortie est parallèle à la face d'entrée, toutes les ondes d'un même ordre ont même composante tangentielle de vitesse et donnent ainsi naissance à une seule onde sortante. Il n'y a donc à la sortie qu'un nombre d'ondes égal au nombre des ordres. Il en va différemment lorsque la face de sortie n'est plus parallèle à la face d'entrée, c'est-à-dire lorsque le milieu a la forme d'un prisme. En effet, les ondes d'un même ordre n'ont plus les mêmes composantes de vitesse tangentielles et donnent chacune une onde sortante dans une direction bien déterminée. Alors que dans le premier cas toutes ces ondes interféraient pour donner une onde sortante, elles sont maintenant indépendantes. Il y aura donc une sorte de « Aufspaltung », chaque raie spectrale étant divisée en deux fois autant de raies partielles qu'il y avait d'ondes dans l'ordre, car chaque polarisation agit cette fois pour elle-même. Ces phénomènes qui, à notre connaissance n'ont jamais été observés, mériteraient d'être étudiés expérimentalement aussi bien pour les rayons X et les cristaux que pour les réseaux optiques.

Je remercie en terminant le Professeur Weigle, qui m'a proposé ce problème et qui m'a guidé dans mon travail.

Institut de Physique de l'Université.