Über einfache Spezialfälle beim Durchgang von Ultraschallwellen durch dünne Platten : Bemerkungen zu drei Arbeiten von Bär, Reissner und Walti

Autor(en): **Bär, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **11 (1938)**

Heft V

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110859

Über einfache Spezialfälle beim Durchgang von Ultraschallwellen durch dünne Platten.

(Bemerkungen zu drei Arbeiten von Bär, Reissner und Walti)[1]

von R. Bär.

(6. V. 38.)

Zusammenfassung. Vor kurzem hat REISSNER den allgemeinen Ausdruck für die Durchlässigkeit berechnet, den eine in einer Flüssigkeit befindliche, feste, planparallele Platte für auftreffende Ultraschallwellen besitzt. Im allgemeinen Fall werden bekanntlich durch die in der Flüssigkeit fortschreitenden Dilatationswellen beim Auftreffen auf die Platte zwei Dilatations- und zwei Rotationswellen in ihr angeregt, nämlich je eine an der vordern Grenzfläche gebrochene und je eine an der hintern Grenzfläche reflektierte Welle von jeder der beiden Wellenarten. Aus der Reissnerschen Theorie wird nun der Beweis erbracht, dass es vier besonders einfache Spezialfälle gibt, wo von der Vorder- zur Rückseite der Platte und in der entgegengesetzten Richtung nur je eine Welle läuft. Diese Fälle sind die folgenden: 1. Die von RAYLEIGH behandelte senkrechte Inzidenz der einfallenden Welle; in der Platte entstehen dann bei beliebigen Plattendicken nur Dilatationswellen (§ 2). 2. Der Brechungswinkel der Rotationswellen beträgt 45 Grad; bei jeder Plattendicke nur Rotationswellen (§ 3). 3. Der Einfallswinkel hat einen bestimmten, durch Gleichung (2) $f-g = +1$ gegebenen, numerischen Wert (bezüglich der Bezeichnungen vgl. S. 401); wenn dann ausserdem die Plattendicke so gewählt wird, dass die Durchlässigkeit der Platte ihren Maximalwert $= 1$ annimmt, so entsteht nur eine gebrochene Dilatationswelle, die bei der Reflexion an der Rückseite der Platte in eine Rotationswelle übergeht. 4. $f-g = -1$. Hier gibt es bei den der maximalen Durchlässigkeit entsprechenden Plattendicken nur eine gebrochene Rotations- und eine reflektierte Dilatationswelle (§ 4). Die bei 3. und 4. entstehenden „Wechselwellen“ wurden experimentell schon früher von BÄR und WALTI gefunden. In allen vier Fällen wird der Reissnersche Ausdruck für die Durchlässigkeit sehr einfach, sodass sich diese Fälle für die experimentelle Prüfung der Theorie besonders gut eignen.

[1]) R. BÄR und A. WALTI, Helv. Phys. Acta **7**, 658, 1934; H. REISSNER, Helv. Phys. Acta **11**, 140, 1938; A. WALTI, Helv. Phys. Acta **11**, 113, 1938.

§ 1. Einleitung.

Die Durchlässigkeit, die eine in einer Flüssigkeit befindliche feste und isotrope, planparallele Platte für auftreffende Ultraschallwellen besitzt, wurde in ihrer Abhängigkeit von Einfallswinkel und Plattendicke s. Z. von Bär und Walti (l. c.) zuerst gemessen. Die Komplikation gegenüber dem analogen Fall der Optik, dass Licht auf eine durchsichtige Platte auftrifft, besteht darin, dass der auffallende Schall in der Platte im allgemeinen zwei verschiedene Wellenarten, nämlich Dilatations-(Longitudinal-)Wellen und Rotations-(Transversal-)Wellen erzeugt. Nur im Falle der senkrechten Inzidenz werden bekanntlich die Dilatationswellen allein angeregt. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Dilatation grösser ist als die der Rotation existiert ferner ein Gebiet des Einfallswinkels, in dem nur Rotationswellen in die Platte hineingebrochen werden, während die Dilatationswellen Totalreflexion erleiden. Um ihre Versuchsresultate wenigstens teilweise auch theoretisch deuten zu können, hatten Bär und Walti damals die Annahme gemacht, dass in diesem letztern Gebiet des Einfallswinkels nur die Rotationswellen zur Schalldurchlässigkeit beitragen. Man kann dann zur Berechnung der Lage der Maxima und Minima der Schalldurchlässigkeit Formeln anschreiben, die analog gebaut sind zu denen, die in der Optik bei den „Farben dünner Blättchen" verwendet werden. Für senkrechte Inzidenz kommen in diesen Formeln nur die Dilatationswellen, im Bereich der Totalreflexion dieserWellen nur die Rotationswellen vor. Die Versuchsresultate ergaben zwar eine qualitative Bestätigung dieser Vorstellung, aber die Übereinstimmung war nicht so gut, dass das eigentliche Ziel der Arbeit, aus Messungen der Durchlässigkeit für Ultraschallwellen die beiden elastischen Konstanten eines isotropen festen Körpers zu bestimmen, erreicht werden konnte. Ausserdem ergab sich aus den Experimenten noch das merkwürdige Resultat, dass in einem Zwischengebiet des Einfallswinkels (merklich schräge Inzidenz, aber doch keine Totalreflexion der Dilatationswellen) die Maxima der Durchlässigkeit sich gut darstellen liessen durch die Annahme der Existenz sog. „Wechselwellen", d. h. durch die Annahme, dass beim Auftreffen des Schalls auf die vordere Plattenfläche nur die eine Wellenart in der Platte angeregt wird, und dass bei der innern Reflexion dieser Wellen an der hintern Plattenfläche dann nur die andere Wellenart entsteht, welche bei der innern Reflexion an der vordern Grenzfläche natürlich wieder nur Wellen der erstern Art erzeugt.

In der Folge wurde dann von Reissner (l. c.) eine strenge Theorie des Schalldurchgangs durch eine Platte gegeben. Bekanntlich werden beim Auftreffen der einfallenden Dilatationswellen auf die Platte im ganzen sechs neue Wellen angeregt: zwei Dilatationswellen in der Flüssigkeit, nämlich eine reflektierte an der vordern und eine durchgelassene an der hintern Grenzebene der Platte, und zwei Dilatations- und zwei Rotationswellen in der Platte, nämlich je eine gebrochene Welle an der vordern und je eine reflektierte an der hintern Plattenfläche von jeder der beiden Wellenarten. Aus der Forderung, dass die insgesamt sieben Wellen an den beiden Grenzflächen als Grenzbedingungen gleiche Normalspannungen und gleiche Normalverschiebungen und verschwindende Schubspannungen hervorrufen, konnte Reissner die Amplituden und Phasen sämtlicher Wellen berechnen und damit die vollständige Lösung des Problems anschreiben, nämlich einen Ausdruck für die Schalldurchlässigkeit der Platte, der für beliebige Einfallswinkel und Plattendicken gültig ist.

Von Walti (l. c.) wurden gleichzeitig weitere Versuche unternommen, um die Reissnersche Theorie auch experimentell zu prüfen. Da der Ausdruck für die Schalldurchlässigkeit aber im allgemeinen Fall recht kompliziert und zum Vergleich mit dem Experiment wenig geeignet ist, wurde diese Prüfung hauptsächlich in der Umgebung eines bestimmten Einfallswinkels vorgenommen, bei dem dieser Ausdruck eine besonders einfache Form annimmt. An dieser Stelle ergab sich erstens eine sehr schöne Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, und zweitens gelang es Walti nun auch, das ursprünglich gesteckte Ziel zu erreichen, nämlich aus den Ultraschallmessungen die Geschwindigkeiten der Dilatations- und der Rotationswellen zu berechnen und damit die beiden elastischen Konstanten des isotropen festen Körpers zu bestimmen.

In dieser Notiz soll nun darauf hingewiesen werden, dass es ausser dem von Walti behandelten Spezialfall, in dem der von Reissner angegebene Ausdruck eine besonders einfache Form annimmt, noch zwei weitere solche Fälle gibt, die daher auch von theoretischem Interesse zu sein scheinen und die für die experimentelle Prüfung der Theorie ebenfalls geeignet sind. Es zeigt sich nämlich, dass die von Bär und Walti gefundenen Wechselwellen, deren Zustandekommen seinerzeit nicht erklärt werden konnte, solche Spezialfälle sind, deren Existenz nun auf Grund der Reissnerschen Theorie auch leicht verstanden werden kann.

Bevor diese Wechselwellen besprochen werden, müssen noch einige Bemerkungen gemacht werden über die beiden andern Spezialfälle, nämlich denjenigen der senkrechten Inzidenz und den von Walti betrachteten.

§ 2. Senkrechte Inzidenz.

Dieser Spezialfall ist von Rayleigh[1]) gerechnet und von Boyle und Rawlinson[2]) und Hiedemann und Asbach[3]) zuerst experimentell untersucht worden. Hier soll nur noch darauf hingewiesen werden, dass die Reissnersche Formel in diesem Fall in die Rayleighsche übergeht.

Wir rekapitulieren die von Reissner benutzten Bezeichnungen:

ϑ = Einfallswinkel,

$\varphi_d, \Lambda_d, w_d$ = Brechungswinkel, Wellenlänge und Geschwindigkeit der Dilatationswellen in der Platte,

$\varphi_r, \Lambda_r, w_r$ = Brechungswinkel, Wellenlänge und Geschwindigkeit der Rotationswellen in der Platte,

Λ_1, w_1 = Wellenlänge und Geschwindigkeit der Wellen in der Flüssigkeit,

d = Plattendicke,

ϱ = Dichte der Platte,

ϱ_1 = Dichte der Flüssigkeit,

$$\varphi = 2\pi d \frac{\cos\varphi_d}{\Lambda_d},$$

$$\psi = 2\pi d \frac{\cos\varphi_r}{\Lambda_r},$$

$$F = \frac{\varrho}{\varrho_1}\frac{w_d^2}{w_1^2}\frac{\cos^2 2\varphi_r}{\sin 2\varphi_d}\sin 2\vartheta\cdot\frac{1}{\sin\varphi},$$

$$G = \frac{\varrho}{\varrho_1}\frac{w_r^2}{w_1^2}\sin 2\varphi_r \sin 2\vartheta\cdot\frac{1}{\sin\psi},$$

$$M = F\cos\varphi + G\cos\psi,$$

$$N = F + G.$$

Dann wird die Schalldurchlässigkeit

$$D = \frac{4N^2}{(M^2-N^2-1)^2+4M^2} = \frac{4N^2}{(N^2-M^2-1)^2+4N^2}. \tag{1}$$

---

[1]) Lord Rayleigh, Theory of Sound, London 1929, 2. Bd., S. 88.

[2]) R. W. Boyle & W. F. Rawlinson, Transact. R. Soc. Canad. **22**, 55, 1928.

[3]) E. Hiedemann & H. R. Asbach, Phys. Zeitschr. **35**, 26, 1934.

Für das Folgende ist eine kleine Abänderung der Reissnerschen Bezeichnungen handlicher. Wir setzen $F = f/\sin\varphi$, $G = g/\sin\psi$, also

$$\begin{aligned} f &= \frac{\varrho}{\varrho_1}\,\frac{w_d^2}{w_1^2}\,\frac{\cos^2 2\,\varphi_r}{\sin 2\,\varphi_d}\sin 2\,\vartheta \\ g &= \frac{\varrho}{\varrho_1}\,\frac{w_r^2}{w_1^2}\sin 2\,\varphi_r \sin 2\,\vartheta\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Dann erhalten wir, wenn wir noch (1) im Zähler und Nenner mit $\sin\varphi\cdot\sin\psi$ multiplizieren, als Ausdruck für die Schalldurchlässigkeit bei beliebigen Plattendicken und Einfallswinkeln (im Bereiche der Totalreflexion notwendige Abänderungen sind bei Reissner angegeben, werden aber im Folgenden nicht benutzt)

$$D = \frac{4\,(f\sin\psi + g\sin\varphi)^2}{\{2fg\,(1-\cos\varphi\cos\psi)+(f^2+g^2-1)\sin\varphi\sin\psi\}^2+4\,(f\sin\psi+g\sin\varphi)^2}\,. \tag{3}$$

Für senkrechte Inzidenz, d. h. $\vartheta = 0$ wird $\varphi_d = \varphi_r = 0$, also $\cos^2 2\,\varphi_r = 1$ und

$$\frac{\sin 2\,\vartheta}{\sin 2\,\varphi_d} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\varphi_d} = \frac{w_1}{w_d}\,.$$

Daher wird

$$f = \frac{\varrho}{\varrho_1}\,\frac{w_d}{w_1} = \varkappa_d \quad \text{und} \quad g = 0.$$

Man erhält für die Durchlässigkeit in diesem Spezialfall also den Ausdruck

$$D = D^d = \frac{4\,\varkappa_d^2}{\{(\varkappa_d^2-1)^2\sin 2\,\pi\,d/\Lambda_d\}^2+4\,\varkappa_d^2}\,. \tag{4}$$

Der Ausdruck für D enthält nun keine Grössen mehr, die auf die Rotationswellen Bezug haben (und wird daher mit D^d bezeichnet). Dies rührt daher, dass die Rotationswellen bei senkrechter Inzidenz bekanntlich nicht angeregt werden, eine Tatsache, die aus den Reissnerschen Gleichungen auch explizit ersichtlich ist: die (hier nicht angeschriebenen) Amplituden der beiden Rotationswellen werden dann nämlich einzeln gleich Null.

Man erhält nun für den Reflexionskoeffizienten

$$R^d = 1 - D^d = \frac{(\varkappa_d - 1/\varkappa_d)^2}{(\varkappa_d+1/\varkappa_d)^2+4\,\mathrm{ctg}^2\,2\,\pi\,d/\Lambda_d}\,, \tag{5}$$

d. h. den von RAYLEIGH angegebenen Ausdruck. R^d und D^d haben ausserdem dieselbe Form wie die entsprechenden Ausdrücke der analogen Interferenzerscheinung der Optik. Daher kommt es, dass die *Lagen* der Maxima bzw. Minima an den analogen Stellen liegen, nämlich für D^d bei $n\,\Lambda_d/2$ bzw. $(n+\frac{1}{2})\,\Lambda_d/2$, und dass auch die *Grössen* der Maxima und Minima ein analoges Verhalten zeigen, nämlich $D^d_{\text{Max}} = 1$, aber

$$D^d_{\text{Min}} = \left[\frac{2\,\varkappa_d}{\varkappa_d^2 + 1}\right]^2 > 0\,.$$

Da wir in § 4 hierauf Bezug nehmen, bemerken wir noch, dass die Gleichung $d = n\frac{\Lambda_d}{2}$, d. h. die Bedingung, dass für $\vartheta = 0$ $D = 1$ wird, in unserer Bezeichnungsweise auch in der Form $\varphi = \pi\,n$ geschrieben werden kann.

§ 3. Der von Walti behandelte Spezialfall ($\varphi_r = 45^0$).

Über diesen Spezialfall müssen einige Bemerkungen gemacht werden, weil seine physikalische Bedeutung von WALTI leider nicht erkannt wurde, da ihm die Reissnerschen Formeln z. Z. der Abfassung seiner Arbeit noch nicht in ihrer endgültigen, übersichtlichen Schreibweise vorlagen. Aus (2) sieht man, dass für $\varphi_r = 45^0$ $f = 0$ wird. Ferner wird dann

$$\sin 2\,\vartheta = \frac{w_1}{w_r}\sqrt{2 - \frac{w_1^2}{w_r^2}} \quad \text{also mit} \quad \varkappa_r = \frac{\varrho}{\varrho_1}\,\frac{w_r}{w_1}$$

$$g = \varkappa_r\sqrt{2 - \frac{w_1^2}{w_r^2}} = g_r\,. \tag{6}$$

Daher wird hier die Schalldurchlässigkeit

$$D = D^r = \frac{4\,g_r^2}{\left\{(g_r^2 - 1)\sin 2\,\pi\,\frac{d}{\sqrt{2}\,\Lambda_r}\right\}^2 + 4\,g_r^2}\,. \tag{7}$$

Dieser Ausdruck ist wiederum ganz analog gebaut wie (4), nur steht hier $\sqrt{2}\,\Lambda_r = 1/\cos\varphi_r\cdot\Lambda_r$ statt Λ_d und g_r statt $\varkappa_d$. Da alle auf die Dilatationswellen bezüglichen Grössen weggefallen sind, wird die Durchlässigkeit hier mit D^r bezeichnet. Man erhält also beim Brechungswinkel $\varphi_r = 45^0$ wieder, wie in der Optik, Maxima der Durchlässigkeit für

$$d = n\,\frac{\sqrt{2}\,\Lambda_r}{2}$$

und Minima für

$$d = (n + \tfrac{1}{2}) \frac{\sqrt{2}\,\Lambda_r}{2}.$$

Ferner ist wieder das Maximum = 1 und das

$$\text{Minimum} = \left[\frac{2\,g_r}{g_r^2 - 1}\right]^2 > 0.$$

Die Analogie rührt natürlich daher, dass bei diesem Brechungswinkel die einfallenden Dilatationswellen im festen Körper nur Rotationswellen erzeugen. Auch dies ist aus den Reissnerschen Ausdrücken für die Amplituden der Wellen sofort ersichtlich. Von POINCARÉ[1]) wurde schon abgeleitet, dass eine in einem festen Körper fortschreitende Rotationswelle, die unter dem Winkel 45° auf eine an das Vakuum grenzende Randebene trifft, daselbst ohne Aufspaltung reflektiert wird. Ob auch die hier erwähnte, aus den Reissnerschen Gleichungen folgende, allgemeinere Aussage bekannt ist, möchte ich nicht entscheiden; ich habe sie aber nirgends explizit formuliert gefunden.

WALTI erkannte aus dem obenerwähnten Grund leider nicht, dass der Winkel φ_r in dem von ihm in § 4A betrachteten Spezialfall 45° beträgt, obwohl seine Gleichung (2), nämlich

$$\sin^2 \vartheta = \frac{1}{2} \frac{w_1^2}{w_r^2} \tag{8}$$

dies aussagt, weil das Berechnungsgesetz

$$\frac{\sin \delta}{w_1} = \frac{\sin \varphi_r}{w_r}$$

gilt. Da dann keine Dilatationswellen entstehen, ist es klar, dass die Reissnersche Theorie wieder übereinstimmt mit der angenäherten Theorie von BÄR und WALTI. Die von diesen Autoren im Winkelbereich der Totalreflexion der Dilatationswellen als allgemein angenähert gültig angenommene Gleichung $d = n \frac{\sqrt{2}\,\Lambda_r}{2}$ oder

$$\sin^2 \vartheta = \frac{w_1^2}{w_r^2} - \left(n \frac{\Lambda_1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^2} \tag{9}$$

ist also nur für den durch (8) definierten Einfallswinkel, aber hier streng gültig. In der hier benutzten Schreibweise kann sie auch in der Form $\psi = \pi n$ geschrieben werden.

---

[1]) H. POINCARÉ, Elasticité, Paris 1892, S. 134.

Wenn man eine graphische Darstellung (vgl. Fig. 1) mit $1/d^2$ als Abszisse und $\sin^2 \vartheta$ als Ordinate benutzt, so stellt die Gleichung (9) mit $n = 1, 2, 3 \ldots$ ein System von Geraden dar, welche die Abszisse in den Punkten 0_n mit $1/d^2 = (2/n\,\Lambda_r)^2$ schneiden und mit der Ordinatenachse alle den gemeinsamen Schnittpunkt P

$$\sin^2 \vartheta = \frac{w_1^2}{w_r^2} \tag{10}$$

haben. Diese Geraden $D = 1$ der angenäherten Theorie fallen mit den (in der Fig. fett gezeichneten) Kurven $D = 1$ der strengen Theorie für $\varphi_r = 45^0$ zusammen; und zwar sind die Geraden, da in f der Faktor $\cos^2 2\,\varphi_r$ steht, an dieser Stelle Tangenten an die Kurven $D = 1$. Die von Walti gelöste Aufgabe der Bestimmung der Rotationswellengeschwindigkeit aus Schalldurchlässigkeits-

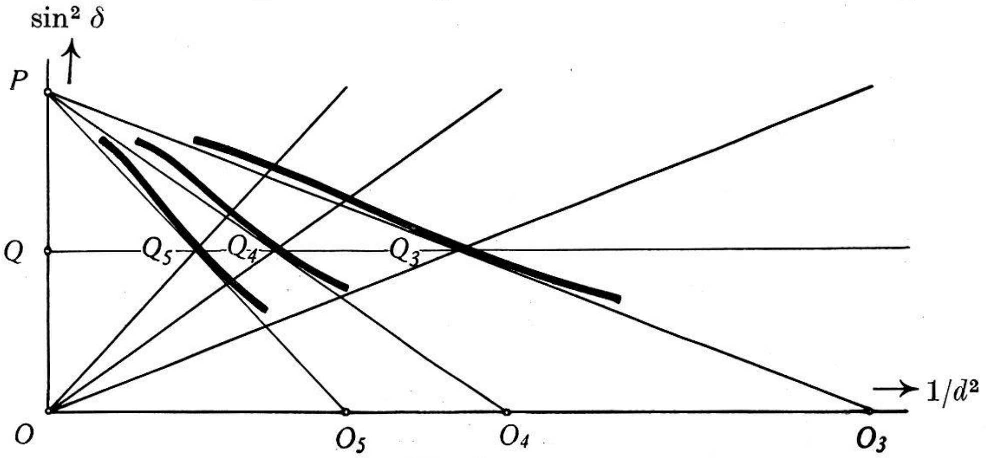

Fig. 1.

Erläuterung der Waltischen Methode A zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Rotationswellen.

messungen läuft also im wesentlichen darauf hinaus, diese Stelle zu finden, d. h. den Punkt Q der Ordinatenachse, für den die Gleichung (8) $\sin^2 \vartheta = \frac{1}{2}\, w_1^2/w_r^2$ gilt. Hierzu hat Walti zwei Methoden verwendet. Die weniger genaue Methode B besteht darin, die experimentellen Kurven $D = 1$ bis zu dem gemeinsamen Schnittpunkt P mit der Ordinatenachse zu extrapolieren und w_r aus (10) zu berechnen. Die einwandfreie Methode A ist, die Geraden (9) an der durch den Punkt Q gehenden Parallelen zur Abszisse zu spiegeln und die Schnittpunkte dieser (in Fig. ebenfalls eingezeichneten) gespiegelten Geraden mit den experimentellen Kurven $D = 1$ zu bestimmen, was bei Walti ausführlich beschrieben ist. Der wesentliche Punkt ist, dass diese gespiegelten Geraden ohne Kenntnis von w_r berechnet werden können, weil sie durch den Koordinatenursprung O gehen und ihre Neigung, wie diejenige der Geraden (9) unabhängig von w_r ist.

§ 4. Die „Wechselwellen".

Es soll nun gezeigt werden, dass die von Bär und Walti an den Maxima der Durchlässigkeit experimentell gefundenen Wechselwellen auch theoretisch existieren müssen. Die von Bär und Walti für die Maxima der Durchlässigkeit aufgestellte Wechselwellengleichung lautet in der hier benutzten Schreibweise

$$\varphi + \psi = 2\pi n. \tag{11}$$

Genau wie die von diesen Autoren für die Dilatationswellen aufgestellte Gleichung $\varphi = \pi n$ streng nur für senkrechte Inzidenz und die für Rotationswellen aufgestellte Gleichung $\psi = \pi n$ nur für $\varphi_r = 45^0$ gültig ist, so kann auch (11) nur für bestimmte diskrete Einfallswinkel gültig sein, die wir jetzt suchen wollen. Hierzu setzen wir die Bedingung (11) in den allgemein gültigen Ausdruck (3) für die Durchlässigkeit D ein und erhalten dann

$$D = \frac{4\,(f-g)^2}{\{1-(f-g)^2\}^2 + 4\,(f-g)^2}.$$

Man sieht, dass jetzt $D = 1$ wird für

$$f - g = \pm 1. \tag{12}$$

Gleichung (11) stellt eine Beziehung zwischen Einfallswinkel und Plattendicke dar; in Gleichung (12) dagegen tritt nur der Einfallswinkel auf. Wenn man also jetzt in den allgemein gültigen Ausdruck (3) für D die Beziehung (12) einsetzt, so erhält man die Durchlässigkeit für die durch (12) definierten Einfallswinkel, aber bei beliebigen Plattendicken. Man findet so die Wechselwellen-Durchlässigkeit

$$D^w = \frac{\left(2\,f \sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} \mp \sin\varphi\right)^2}{\left\{2\,f\,(f\mp 1)\sin^2\frac{\varphi+\psi}{2}\right\}^2 + \left(2\,f\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} \mp \sin\varphi\right)^2}. \tag{13}$$

Jetzt wird für

$$\varphi + \psi = 2\pi n \qquad D^w = \text{Maximum} = 1,$$

dagegen liegen die Minima nicht genau an der Stelle

$$\varphi + \psi = (2\,n + 1)\,\pi.$$

Um zu zeigen, dass der Ausdruck „Wechselwelle" für $D^w = 1$ tatsächlich berechtigt ist (er wurde seinerzeit nahegelegt, weil hier die Beziehung $\varphi + \psi = 2\pi n$ gilt), muss man aus den von Reissner angegebenen Formeln die Amplituden der verschiedenen Wellen in der Platte berechnen. Seien A_1 bzw. A_2 die Amplituden der an der vordern Platte gebrochenen bzw. an der hintern Platte reflektierten Dilatationswellen und B_1 bzw. B_2 die Amplituden der entsprechenden Rotationswellen. Man erhält dann, wenn die Plattendicke so gewählt wird, dass ein Maximum der Durchlässigkeit zustande kommt (also $\varphi+\psi = 2\pi n$) und der Einfallswinkel dem Wert $f-g = +1$ entspricht, durch eine einfache Rechnung aus den Formeln der Reissnerschen Arbeit

$$A_1 = e^{i\varphi}\cdot \frac{\cos 2\varphi_r}{\sin 2\varphi_d} \sin 2\vartheta, \quad B_2 = e^{i\psi}\cdot \sin 2\vartheta, \quad A_2 = B_1 = 0.$$

Für die gleichen Plattendicken, aber mit $f-g = -1$ wird

$$A_2 = -e^{-i\varphi}\cdot \frac{\cos 2\varphi_r}{\sin 2\varphi_d} \sin 2\vartheta, \quad B_1 = e^{i\psi}\cdot \sin 2\vartheta, \quad A_1 = B_2 = 0.$$

Man sieht also, dass in beiden Fällen tatsächlich Wechselwellen auftreten; für $f-g = +1$ ist die gebrochene Welle eine reine Dilatationswelle und die reflektierte eine reine Rotationswelle; für $f-g = -1$ ist das Umgekehrte der Fall.

Es ist klar, dass die Einfallswinkel, bei denen Wechselwellen auftreten und bei denen daher die Durchlässigkeit eine besonders einfache Form annimmt, auch für die experimentelle Prüfung der Theorie besonders geeignet sind. Allerdings ist es mir nicht gelungen, eine Methode zu finden, um diese Einfallswinkel ohne Kenntnis des Wertes der Rotationsgeschwindigkeit zu bestimmen, sodass die Gleichungen (12) keine neue Methode zur Bestimmung der elastischen Konstanten des festen Körpers geben. Vielleicht rührt dies daher, dass die Wechselwellen bei diesen Einfallswinkeln nicht für beliebige Plattendicken auftreten, sondern nur, wenn die Dicke einem Maximum der Durchlässigkeit entspricht.

Was schliesslich noch die Frage betrifft, wie die Entstehung der Wechselwellen physikalisch zu erklären ist, so sei in erster Linie auf eine demnächst erscheinende Arbeit von Levi und Nagendra Nath[1]) verwiesen, in der dieses Problem von einem andern Gesichtspunkt aus eingehend behandelt wird.

Einen Hinweis erhält man aber auch aus unsern Überlegungen, wenn man sich die beiden Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit diese Wellenart zustande kommt, einzeln ansieht. Die erste dieser Bedingungen, nämlich $f-g = \pm 1$, bestimmt nur den Einfallswinkel. Die zweite, $\varphi+\psi = 2\pi n$, legt die Plattendicke fest;

[1]) F. Levi und N. S. Nagendra Nath, Helv. Phys. Acta, **11**, 408 (1938).

sie ist eine Phasenbeziehung zwischen den beiden in der Platte angeregten Wellen. An der Rückseite der Platte, wo durch die *einzige* einfallende Dilatations-(Rotations-)Welle die in die Flüssigkeit austretende und die in die Platte reflektierte Rotations-(Dilatations-)Welle angeregt wird, genügt offenbar die Erfüllung der ersten Bedingung, da die Phasenbeziehungen zwischen den drei Wellen schon durch die Anregungsart festgelegt sind. An der vordern Grenzfläche dagegen, wo gleichzeitig zwei Wellen einfallen, nämlich die aus der Flüssigkeit auftreffende und die von der hintern Plattenebene reflektierte, und eine Welle in die Flüssigkeit reflektiert und eine in die Platte gebrochen wird, muss offenbar ausserdem noch die zweite Bedingung erfüllt sein, damit die *beiden* einfallenden Wellen die richtige Phasenbeziehung haben.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Reissner für wichtige briefliche Hinweise zu danken; Herrn Dr. Fritz Levi bin ich für zahlreiche Diskussionen, in denen sich wesentliche Klarstellungen ergaben, zum grössten Dank verpflichtet.

Physikalisches Institut der Universität Zürich.