Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 11 (1938)

Heft: V

Artikel: Theoretische Behandlung einiger Probleme aus der heterochromen Photometrie

Autor: König, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110861

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Theoretische Behandlung einiger Probleme aus der heterochromen Photometrie

von **H. König** (Bern).
(Mitteilung aus dem Eidg. Amt für Mass und Gewicht.)

(18. V. 38.)

Zusammenfassung: Es werden die Anleitungen zur systematischen Behandlung folgender Fragen gegeben:

I. Ableitung der Hellempfindlichkeitsfunktion $V(\lambda)$ des menschlichen Auges aus einer beschränkten Anzahl Ergebnissen von Messungen mit Farbgläsern unter Heranziehung einer Näherungsfunktion $V^{(0)}(\lambda)$ als Ausgangsfunktion;

II. Bestimmung der Koeffizienten eines Kombinations-Blaufilters für spektralrichtige Umfärbung schwarzer Strahlung in ebensolche anderer Farbtemperatur;

III. Angleichung der Durchlässigkeitsfunktion $\sum^{i} x_i \tau_i(\lambda)$ eines Kombinationsfilters an die internationale Hellempfindlichkeitsfunktion.

Eine Reihe weiterer Probleme kann auf obige Typen zurückgeführt werden.

Die Lösung erfolgt vollständig durch beste Angleichung im Sinne von Gauss (Minimum des Fehlerquadrates) oder näherungsweise durch sukzessive Approximation.

Anstoss zu vorliegender Notiz gab das Bedürfnis, die Ergebnisse der experimentellen Neubestimmung der Hellempfindlichkeitsfunktion $V(\lambda)$ systematisch auszuwerten. Wenn wir bei diesem Anlass die Frage der Behandlung einiger weiterer Probleme anschneiden, so geschieht dies sowohl wegen der weitgehenden Ähnlichkeit, als auch weil gerade die Unterschiede in Fragestellung und Behandlung die Eigenart der einzelnen Probleme gut in Erscheinung treten lassen.

In allen Fällen ist versucht worden, der Fragestellung eine solche Form zu geben, dass sie auf ein lineares Gleichungensystem führt, welches oft dank der Möglichkeiten der an formalen Schönheiten so reichen Theorie der orthogonalen Funktionen leicht in eine für praktische Berechnungen brauchbare Form gebracht werden kann.

Da sich unter Umständen dasselbe Ziel näherungsweise auf einem ganz anderen und, vom praktisch rechnerischen Standpunkt aus, nicht uninteressanten Weg erreichen lässt, scheint es angebracht, die verschiedenen Behandlungsweisen einmal vergleichend zu betrachten.

Eine ganze Reihe von Fragestellungen, die die Kombination von Filtern bzw. der Ergebnisse von Messungen mit solchen betreffen, können auf einen der drei nachgenannten Problemtypen I, II oder III zurückgeführt werden.

Vollständige Lösung.

Aufgabe I: Gegeben sind die in Fig. 1 dargestellten Durchlässigkeitsfunktionen $\tau_k(\lambda)$, $k = 1 \ldots \omega$ von ω Farbfiltern, sowie die $\omega + 1$-Ergebnisse M_k der flimmerphotometrischen Ausmessung dieser Filter durch einen farbtüchtigen Beobachter, welche dadurch gewonnen werden, dass vor eine Glühlampe mit der Energieverteilung $E(\lambda, T)$ (λ Wellenlänge, T Farbtemperatur, Energieverteilung als schwarz vorausgesetzt) zuerst das Filter $\tau_0(\lambda) = 1$ (also *kein* Filter) und hierauf die Gläser $\tau_k(\lambda)$ eingeschoben und die durchgelassenen Lichtströme mit einem konstanten Vergleichs-Lichtstrom verglichen werden. Gesucht ist die Hellempfindlichkeitsfunktion $V(\lambda)$ des Beobachters.

Da über die Normierung von $V(\lambda)$ nichts vorausgesetzt wird, kann man unmittelbar die relativen Messergebnisse

$$M_k = \int E(\lambda T)\, V(\lambda)\, \tau_k(\lambda)\, d\lambda \tag{1}$$

setzen. Von Interesse sind nur die Durchlässigkeiten

$$\bar{\tau}_k = \frac{\int E(\lambda)\, V(\lambda)\, \tau_k(\lambda)\, d\lambda}{\int E(\lambda)\, V(\lambda)\, d\lambda} = \frac{M_k}{M_0}. \tag{2}$$

Sicher ist, dass man $V(\lambda)$ als *Funktion* nicht aus einer endlichen Anzahl von Bestimmungsstücken ableiten kann. Ohne Willkür in der Wahl der Form der bestenfalls an Stelle von $V(\lambda)$ bestimmbaren Näherung $V'(\lambda)$ kommt man nicht vorwärts. Wir wählen für $V'(\lambda)$ die Form

$$V'(\lambda) = V^{(0)}(\lambda) \sum^{k} x_k\, \tau_k(\lambda), \qquad k = 0 \ldots \omega \tag{3}$$

aus folgenden Gründen:

1. $V'(\lambda)$ unter Weglassung des Faktors $V^{(0)}(\lambda)$ durch die Linearkombination der $\tau_k(\lambda)$ darstellen zu wollen wäre unbefriedigend, weil die Anpassungsfähigkeit der Linearkombination bei der gemäss Fig. 1 getroffenen Wahl der τ_k namentlich im Blau zu gering ist, um die weiche Krümmung, wie sie bei V zu erwarten ist, auch nur halbwegs wiederzugeben. Wählt man aber $V'(\lambda)$ als Produkt mit einer Näherungsfunktion $V^{(0)}(\lambda)$, als welche sich

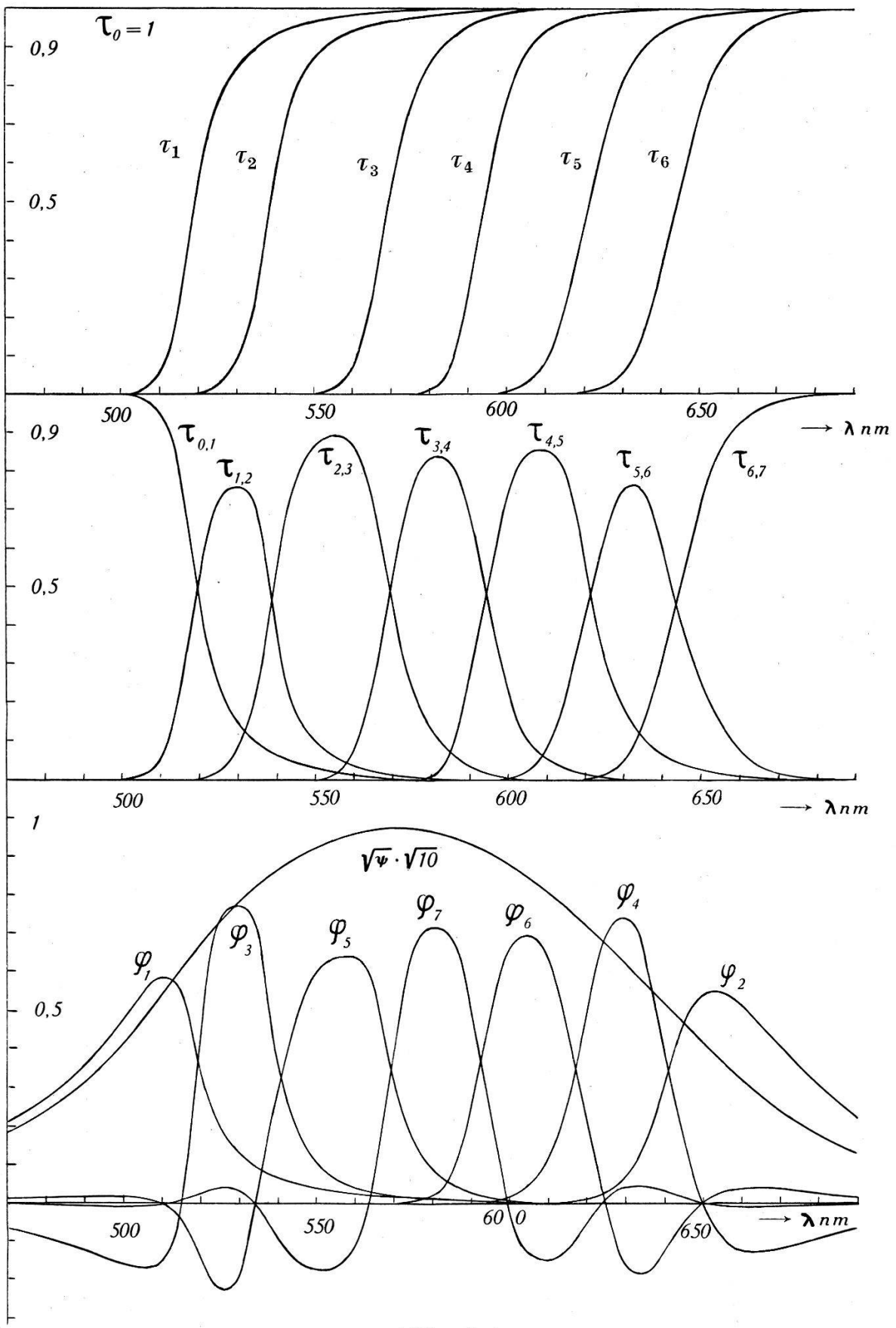

Fig. 1.
Zerlegung des Spektrums für die Hellempfindlichkeits-Bestimmung.
Oben: Schott-Filter τ_k (in Klammer die Schmelznummer):
τ_1: 2 mm OG 4 (15064), τ_2: 2 mm OG 1 (27188), τ_3: 2 mm OG 2 (27878),
τ_4: 2 mm OG 3 (25016), τ_5: 1 mm RG 2 (24321), τ_6: 2 mm RG 2 (22460).
Mitte: Hieraus abgeleitete Differenzfilter $\tau_{k,\,k+1}$.
Unten: Aus $\tau_{k,\,k+1}$ abgeleitetes Orthogonalsystem φ_i, zur Belegungsfunktion ψ gehörig.

die bisherige internationale Hellempfindlichkeitsfunktion V_{int} ganz natürlich darbietet, so hat man den kombinierten Vorteil, dass einerseits der im Verlauf von $V^{(0)} = V_{int}$ niedergelegte Reichtum an Erfahrungen interpolatorisch herangezogen werden kann und andererseits der Linearausdruck nur die Unterschiede zwischen V und V_{int} zum Ausdruck bringen muss, was an dessen Anpassungsfähigkeit nur geringe Anforderungen stellt.

2. Der Umstand, dass es gemäss 1) gelingt, den Linearausdruck zu entlasten, ist allein kein Grund, gerade die τ_k als Funktionensystem zur Darstellung von V' zu wählen. Es besteht aber auch kein Grund, ein *anderes* System zu wählen, und ausserdem ginge der Hauptvorteil, den die Linearität in $\tau_k(\lambda)$ in sich birgt nämlich die praktisch rechnerische Möglichkeit der Orthogonalisierung und Trennung der Unbekannten x_k, bei jeder anderen Wahl verloren.

3. τ_0 muss mit Rücksicht auf das blaue Ende des Spektrums zur Darstellung herangezogen werden.

Die Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der x_k fliessen aus der ganz *natürlichen* Forderung, dass V' die Beobachtungsergebnisse richtig darstellen lasse:

$$\bar{\tau}_k' = \frac{\int E(\lambda T)\, V'(\lambda)\, \tau_k(\lambda)\, d\lambda}{\int E(\lambda T)\, V'(\lambda)\, d\lambda} = \bar{\tau}_k = \frac{\int E(\lambda T)\, V(\lambda)\, \tau_k(\lambda)\, d\lambda}{\int E(\lambda T)\, V(\lambda)\, d\lambda}, \tag{4}$$
$$\mathrm{k} = 0 \ldots \omega.$$

Im vorliegenden speziellen Beispiel *kann* man, ohne das Problem der Lösbarkeit von (4) zu berühren, den Umstand, dass V' noch nicht normiert ist, benutzen, um die lästigen Nenner wegzuschaffen durch die später stets „Nennergleichung" genannte Setzung:

$$\int E(\lambda T)\, V'(\lambda)\, d\lambda = \int E(\lambda T)\, V(\lambda)\, d\lambda, \tag{5a}$$

was nach (4) die „Zählergleichungen"

$$\int E(\lambda T)\, V'(\lambda)\, \tau_k(\lambda)\, d\lambda = \int E(\lambda T)\, V(\lambda)\, \tau_k(\lambda)\, d\lambda, \quad k = 0 \ldots \omega \tag{5b}$$

bedingt. In der Tat ist *im vorliegenden Fall* $\tau_0(\lambda) = 1$, also (5a) in (5b) enthalten, so dass die für die $\omega + 1$ Zahlen x_k zulässige Zahl von Gleichungen durch die Massnahme (5a) nicht überschritten wird.

Es ist interessant, festzustellen, dass die Forderung der richtig wiedergegebenen Durchlässigkeiten (4) sich wegen der Zulässigkeit

von (5b) deuten lässt als beste Angleichung im Sinne des Minimums des Gauss'schen Fehlerquadrates[1]). Im Variationsproblem

$$\delta \int \psi(\lambda) [F'(\lambda) - F(\lambda)]^2 \, d\lambda = 0 \tag{6}$$

bedeutet $\psi(\lambda)$ eine Belegungsfunktion und

$$F'(\lambda) = \sum^{k} x_k \, \tau_k(\lambda), \tag{7}$$

die durch Variation der x_k einer festen Funktion $F(\lambda)$ bei festem Funktionensytem $\tau_k \lambda)$ möglichst anzunähernde gesuchte Funktion. Es folgt

$$\int \psi(\lambda) [F'(\lambda) - F(\lambda)] \frac{\partial F'(\lambda)}{\partial x_k} \, d\lambda = \int \psi(\lambda) [F'(\lambda) - F(\lambda)] \, \tau_k(\lambda) \, d\lambda = 0, \tag{8}$$

was in der Tat mit (5b) identifiziert werden kann, wenn man

$$F' = \frac{V'}{V^{(0)}}, \qquad \psi = E V^{(0)}, \qquad F = \frac{V}{V^{(0)}} \tag{9}$$

setzt. Aus (1), (7) und (8) wird

$$\sum^{i} x_i \, t_{ik} = M_k, \tag{10}$$

wobei

$$t_{ik} = \int \psi \, \tau_i \, \tau_k \, d\lambda. \tag{11}$$

Die Lösung ist

$$x_i = \begin{vmatrix} t_{00} \ldots t_{i-10} & M_0 & t_{i+10} \ldots . t_{w0} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ t_{0\omega} \ldots t_{i-1\omega} & M_\omega & t_{i+1\omega} \ldots . t_{\omega\omega} \end{vmatrix} : |t_{ik}|. \tag{12}$$

Wenn die Ordnung $\omega + 1$ der Determinanten (12) hoch wird (z. B. 7), so ist die praktische Berechnung auf diesem Wege mühsam, und man versucht zweckmässig, durch lineare Transformation des τ_k-Systems in ein *orthogonales* System die Matrix der Gleichungen (10) in eine Diagonalmatrix umzuformen[2]). Um ein gewöhnliches normiertes Orthogonalsystem ohne Belegungsfunktion zu erhalten, für welches

$$\begin{aligned} \int \varphi_i \, \varphi_k \, d\lambda &= (\varphi_i \, \varphi_k) = 0 \quad \text{für } i \neq k, \\ \int (\varphi_i)^2 \, d\lambda &= (\varphi_i \, \varphi_i) = 1 \end{aligned} \tag{13}$$

ist, setzt man

$$\varphi_i(\lambda) = \sqrt{\psi(\lambda)} \sum a_{ik} \, \tau_k(\lambda). \tag{14}$$

Die notwendige lineare Unabhängigkeit der φ_i ist durch diejenige der τ_k gewährleistet. Nennt man die Koeffizienten der Zerlegung von $\sqrt{\psi}\,F'$ im φ_i-System y_i, so wird

$$\sqrt{\psi}\,F' = \sum^{i} y_i\,\varphi_i = \sqrt{\psi}\sum^{i}\sum^{k} y_i\,a_{ik}\,\tau_k = \sqrt{\psi}\sum^{k} x_k\,\tau_k\,, \tag{15}$$

also

$$x_k = \sum^{i} y_i\,a_{ik}\,, \tag{16}$$

wobei nach (13)

$$y_i = \int \sqrt{\psi}\,F'\,\varphi_i\,d\lambda\,; \tag{17}$$

aus dem Gleichungensystem (8) wird

$$\sum^{k} a_{ik}\int \psi\,F'\,\tau_k\,d\lambda = \sum^{k} a_{ik}\,M_k = \int \sqrt{\psi}\,F'\,\varphi_i\,d\lambda = y_i \tag{18}$$

und mit (16)

$$x_k = \sum^{i}\sum^{m} a_{im}\,M_m\,a_{ik} = \sum^{i}\sum^{m} \tilde{a}_{ki}\,a_{im}\,M_m = \sum^{m} A_{km}\,M_m. \tag{19}$$

Hierin wurde mit $\tilde{a}_{ki} = a_{ik}$ die zu (a_{ik}) transponierte Matrix gekennzeichnet. Die Bestimmung der Zerlegung (3) erfordert also nichts anderes als die Ermittlung der Transformation (a_{jk}). Die Matrixelemente

$$A_{mk} = A_{km} = \sum^{i} \tilde{a}_{ki}\,a_{im} \tag{20}$$

sind von der speziellen Wahl des Hilfssystems φ_i, deren es ja unendlich viel gibt, unabhängig.

Der schrittweise Aufbau eines Orthogonalsystems aus einem vorgegebenen System v_i erfolgt in bekannter Weise[3]), wobei man sich unter den $v_0, v_1, v_2 \ldots$ aus der Reihe $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \ldots$ beliebig herausgegriffene oder aus dem τ_k linear kombinierte Funktionen zu denken hat:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0' = \sqrt{\psi}\,v_0\\
&\varphi_0 = \sqrt{\psi}\,v_0\,(\varphi_0'\,\varphi_0')^{-\frac{1}{2}} \ldots\ (\varphi_0\,\varphi_0) = 1\,;\\
&\varphi_1' = \sqrt{\psi}\,v_1 + c_{10}\,\varphi_0\\
&(\varphi_1'\,\varphi_0) = 0 \ldots\ c_{10} = -(\sqrt{\psi}\,v_1, \varphi_0)\\
&\varphi_1 = \varphi_1'\,(\varphi_1'\,\varphi_1')^{-\frac{1}{2}} \ldots\ (\varphi_1\,\varphi_1) = 1\,;\\
&\varphi_2' = \sqrt{\psi}\,v_2 + c_{21}\,\varphi_1 + c_{20}\,\varphi_0\\
&(\varphi_2'\,\varphi_0) = 0 \ldots\ c_{20} = -(\sqrt{\psi}\,v_2, \varphi_0)\\
&(\varphi_2'\,\varphi_1) = 0 \ldots\ c_{21} = -(\sqrt{\psi}\,v_2, \varphi_1)\\
&\varphi_2 = \varphi_2'\,(\varphi_2'\,\varphi_2')^{-\frac{1}{2}} \ldots\ (\varphi_2\,\varphi_2) = 1\,;\\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

Einheitliche Filter, die in einem nicht zu breiten Spektralbereich eine hohe Durchlässigkeit aufweisen, existieren nicht. Am

nächsten kommen ihnen die Differenzfilter, die man aus der *OG-RG*-Reihe der Schott'schen Farbgläser aufbauen kann, weil dieselben steile τ-Kurven aufweisen. Fig. 1 zeigt Beispiele solcher Kurven, wobei die spektralphotometrisch gemessenen Durchlässigkeitswerte durch die maximale Durchlässigkeit im Durchlassbereich dividiert worden sind. Dementsprechend seien auch unter M_k (siehe (1)) nicht die unmittelbar gemessenen, sondern die durch die maximale Durchlässigkeit dividierten Messwerte verstanden. Die ebenfalls in Fig. 1 dargestellten Differenzen

$$\tau_{k,\,k+1}(\lambda) = \tau_k(\lambda) - \tau_{k+1}(\lambda) \quad (\tau_7 = 0), \tag{21}$$

geben eine recht gute Roh-Einteilung des Spektrums in $\omega + 1 = 7$ Bezirke. Sich streng ausschliessend, also orthogonal sind nur $\tau_{2,3}$ und $\tau_{6,7}$, fast orthogonal ist die Gruppe $(\tau_{0,1}, \tau_{1,2}, \tau_{2,3})$ in bezug auf die Gruppe $(\tau_{5,6}, \tau_{6,7}\,(= \tau_6))$. Dies bedingt rechnerische Erleichterungen. Wir wählen daher:

$$\begin{array}{lll} v_0 = \tau_{0,1} & v_3 = \tau_{5,6} & \\ v_1 = \tau_{6,7} & v_4 = \tau_{2,3} & \\ v_2 = \tau_{1,2} & v_5 = \tau_{4,5} & v_6 = \tau_{3,4}. \end{array}$$

Entsprechend dem Umstand, dass die experimentelle Untersuchung[4]) mit einer Lampe der Farbtemperatur 2720° durchgeführt worden ist, wird im Beispiel $\psi = E\,(\lambda, 2720^0) \cdot V_{\text{int}}\,(\lambda)$ gewählt.

Die Integrale werden als Summen von 10 zu 10 nm berechnet.

Das numerische Ergebnis der Orthogonalisierung und Normierung, nach (14) charakterisiert durch eine Transformation (a^d_{ik}) (der Index oben erinnert daran, dass die Differenzfunktionen (21) Gegenstand der Transformation sind) lautet:

$$(a^d_{ik}) = \begin{pmatrix} +3{,}6227 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0013 & +5{,}5132 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}2415 & 0 & +4{,}3336 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0076 & -1{,}7121 & -0{,}0005 & +5{,}1217 & 0 & 0 & 0 \\ +0{,}1002 & +0{,}0001 & -1{,}3021 & -0{,}0003 & +2{,}4863 & 0 & 0 \\ -0{,}0178 & +0{,}4823 & -0{,}0073 & -1{,}9136 & -0{,}0249 & +3{,}1560 & 0 \\ -0{,}0878 & -0{,}1154 & +0{,}2658 & +0{,}4711 & -0{,}7017 & -0{,}9142 & +2{,}943 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Die Berechnung der hier nicht wiedergegebenen Matrix A_{km} bzw. A_{km} nach (20) bzw. (20a) (s. unten) vereinfacht sich wegen der Symmetrie der letzteren:

$$A_{km} = A_{mk}. \tag{23}$$

Die zur Belegungsfunktion $E\,(2720^0)\,V_{\text{int}}$ gehörigen φ_i sind in Fig. 1 gezeichnet. Für die Auswertung der Ergebnisse M_k zur Aufstellung von V' werden sie nicht weiter benutzt.

Die Transformation a^d_{ik} bezieht sich auf das System (21) bzw. an Stelle von (1) auf die Messergebnisse

$$M_{k,\,k+1} = M_k - M_{k+1}\,(M_7 = 0) \tag{24}$$

und die Unbekannten $q_{k,\,k+1}$, definiert durch

$$V'(\lambda) = V_{\text{int}}(\lambda) \sum^{k} q_{k,\,k+1}\,\tau_{k,\,k+1}(\lambda). \tag{3a}$$

Es gelten also die zu früheren analogen Beziehungen:

$$\sum^{i} q_{i,\,i+1}\,t^d_{ik} = M_{k,\,k+1} \tag{10a}$$

$$\varphi_i(\lambda) = \sqrt{\psi(\lambda)} \sum^{k} a^d_{ik}\,\tau_{k,\,k+1}(\lambda) \tag{14a}$$

$$q_{k,\,k+1} = \sum^{m} A^d_{km}\,M_{m,\,m+1} \tag{19a}$$

$$A^d_{km} = \sum^{i} \tilde{a}^d_{ki}\,a^d_{im} = A^d_{mk}. \tag{20a}$$

Ein Konflikt zwischen Zählergleichungen und Nennergleichung entsteht nicht, da die notwendige Abhängigkeit der Nennergleichung wegen

$$\sum^{k} \tau_{k,\,k+1}(\lambda) = 1 \tag{25}$$

gewährleistet ist.

Wir stellen der Übersichtlichkeit halber die vom φ_i-System *unabhängigen* Beziehungen zwischen dem τ_k und dem $\tau_{k,\,k+1}$-System zusammen:

$$\begin{aligned}
&\tau_{k,\,k+1} = \tau_k - \tau_{k+1}\\
&M_{k,\,k+1} = M_k - M_{k+1}\\
&A_{km} = A^d_{km} + A^d_{k-1,\,m-1} - A^d_{k-1\,m} - A_{k\,m-1}\\
&x_k = q_{k,\,k+1} - q_{k-1,\,k}\\
&\frac{V'}{V^0} = \sum^{k} q_{k,\,k+1}\,\tau_{k,\,k+1} = \sum^{k} x_k\,\tau_k\,.
\end{aligned} \tag{26}$$

Aufgabe II: Gegeben sind die in Fig. 2 dargestellten Durchlässigkeitsfunktionen $\tau_k(\lambda)$, $k = 1 \ldots 4$. Es handelt sich um die von uns an anderer Stelle[5]) beschriebenen Komponenten des Kombinations-Blaufilters, leicht abgeändert und ergänzt durch τ_4, welches die Verbesserung der Anpassung bis 420 nm hinunter gewährleisten soll[6]). Die Ergebnisse e_k von Messungen mit einem Empfänger, dessen Empfindlichkeitskurve zwischen 420 und 700 nm weitgehend beliebig verlaufen darf, mit Faktoren x_k linear kom-

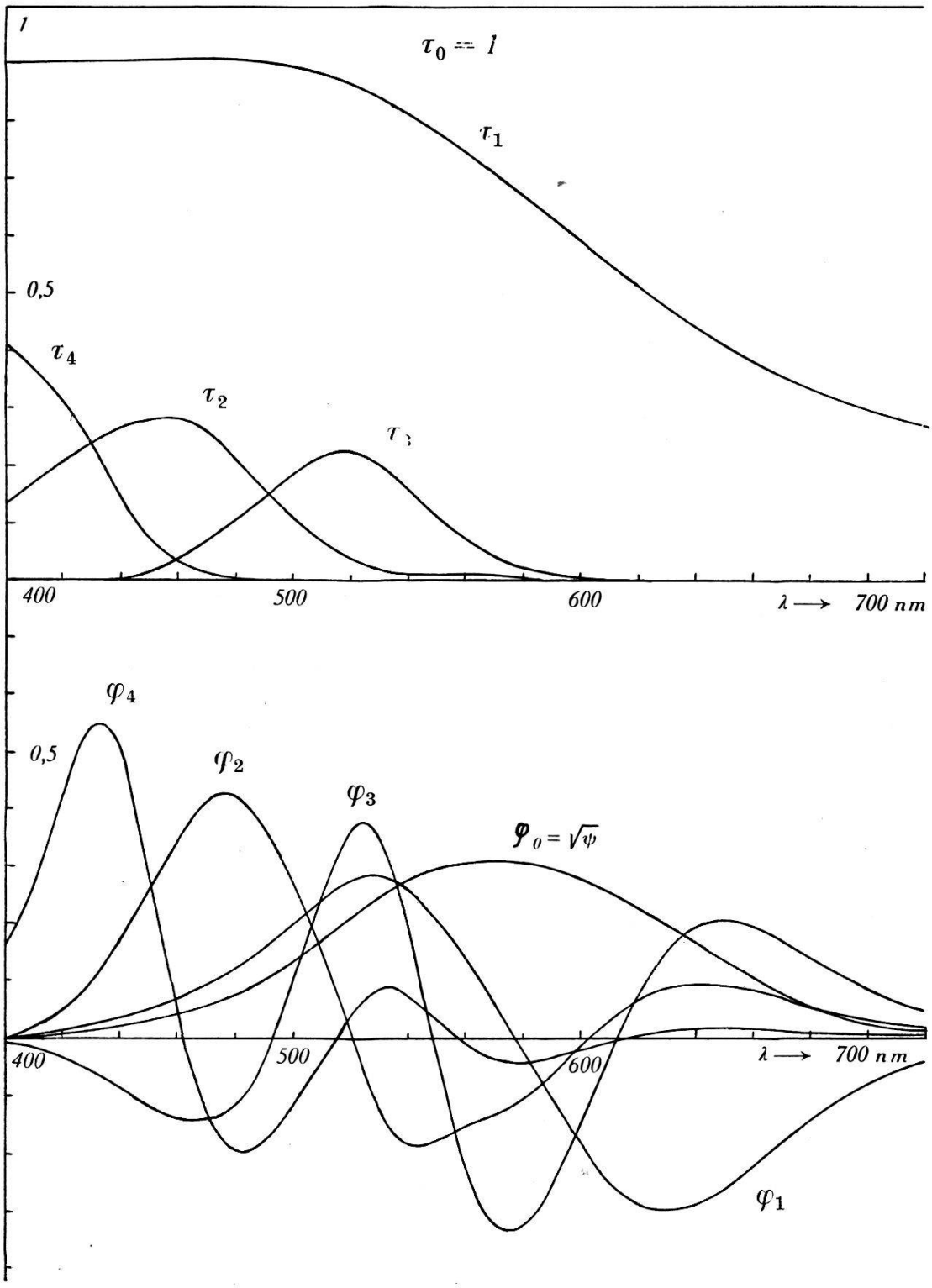

Fig. 2.
Kombinations-Blaufilter.

Oben: Komponenten desselben:

τ_0: kein Filter, τ_1: 1 mm BG 14,
τ_2: 1 mm BG 6 + 2 mm BG 14 + 1 mm BG 7
τ_3: 2 mm VG 2 + 1 mm BG 7,
τ_4: 2 mm BG 2 + 2 mm BG 18.

Unten: Aus den τ_k abgeleitetes orthogonales φ-System.

biniert: $\sum^{k} x_k e_k$, entsprechen *einer* Messung mit einem Kombinations-Blaufilter

$$F'(\lambda) = \sum^{k} x_k \tau_k(\lambda), \quad k = 0 \ldots 4. \tag{7}$$

Gesucht sind die x_k derart, dass $F'(\lambda)$ sich im sichtbaren Gebiet wegen der Gültigkeit des Wien'schen Strahlungsgesetzes mit

$$F(\lambda; T_1, T_2) = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)} \tag{27}$$

möglichst deckt, was mit einer spektralrichtigen Umfärbung schwarzer Strahlung der Temperatur T_1 in eine ebensolche der Temperatur T_2 gleichwertig ist.

Wir haben bisher die Koeffizienten x_i dieses Mehrfilterverfahrens durch Probieren bestimmt[6]), was bei einiger Übung wohl ebenso rasch geht wie mit nachstehend beschriebenen systematischen Verfahren, doch scheint uns hier der geeignete Ort zu sein, auf die Möglichkeit der Behandlung der Aufgabe als exakt definiertes Problem hinzuweisen, um so mehr als der Prozess der Koeffizientenbestimmung durch Probieren für jeden Farbensprung $\Delta \frac{1}{T} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}$ vollständig neu durchgeführt werden muss, während die Bestimmung der Transformation (20), die auch hier die Hauptrolle spielen wird, für alle $\Delta 1/T$ bei gegebenem T_1 gemeinsam ist.

Im Gegensatz zu Aufgabe I besteht zunächst kein Anlass, über irgendwelche Durchlässigkeiten Forderungen zu stellen, und man wird daher versuchen, die Fragestellung als Minimalproblem (6) bzw. als Lösung von

$$\int \psi(\lambda) [F'(\lambda) - F(\lambda)] \tau_k(\lambda) \, d\lambda = 0 \tag{8}$$

aufzufassen, worin F' durch (7) und F durch (27) definiert sind. Die Linearkombination der τ_k erscheint hier nicht nur als Korrekturfunktion, sondern sie ist mit F' direkt identisch. Die experimentelle Hauptaufgabe besteht also in der geschickten Auswahl der $\tau_k(\lambda)$, weil die Anforderungen an das Anpassungsvermögen ausschliesslich auf der Linearkombination ruhen.

Eine gewisse Willkür in der Wahl von ψ ist unvermeidlich, aber es liegt nahe, auch hier ψ, als *Gewichts*funktion der Bewertung der Abweichungen, proportional V_{int} zu wählen. Ferner kann man nicht umhin, (8) als Bedingung für die Intensitätsverteilung des das Kombinationsfilter verlassenden Lichtes anzusehen, so dass in ψ noch ein Faktor $E(\lambda, T_1)$ enthalten sein muss. Es ist bedauerlich, liegt aber in der Natur der Sache, dass die optimalen

x_k folglich von T_1 abhängen, weil der Schwerpunkt in der Angleichung sich mit wachsendem T_1 nach Blau verschiebt. Die Anpassungsfähigkeit von F' an F ist aber bekanntlich[5]) so hoch, dass es praktisch bedeutungslos ist, ob man den Orthogonalisierungsprozess für die Belegungsfunktion $\psi = E\ (2600^0)\ V_{\text{int}}$ oder für $E\ (2720^0)\ V_{\text{int}}$ durchführt (im Gegensatz zu Aufgabe I, wo der Anschluss an die Messungen M_k die Wahl von T bestimmte!).

Da $\tau_i = 1$ in der Filterserie enthalten ist, ist mit (8) auch die Nennergleichung

$$\int \psi(\lambda)\,[F'(\lambda) - F(\lambda)]\,d\lambda = 0 \tag{28}$$

erfüllt, so dass

$$\frac{\int \psi(\lambda)\,F'(\lambda)\,\tau_k(\lambda)\,d\lambda}{\int \psi(\lambda)\,F'(\lambda)\,d\lambda} = \frac{\int \psi(\lambda)\,F(\lambda)\,\tau_k(\lambda)\,d\lambda}{\int \psi(\lambda)\,F(\lambda)\,d\lambda} \tag{4a}$$

geschrieben werden darf. Dies kann man anschaulich so deuten: Wenn man für eine zweite, der ersten Serie τ_k identische Filterserie die Durchlässigkeiten $\bar{\tau}_k'$ und $\bar{\tau}_k$ bezogen auf die Strahlungen $E\,(T_1)\,V_{\text{int}}\,F'$ und $E\,(T_1)\,V_{\text{int}}\,F = E\,(T_2)\,V_{\text{int}}$ messen würde, so würden laut (4a) für die gefundene Annäherung $F'\,(\lambda)$ die Durchlässigkeiten aller Teilfilter richtig heraus kommen, d. h. gleich wie für $F\,(\lambda)$.

Die weitere Behandlung erfolgt wie bei Aufgabe I. Mit

$$v_1 = \tau_0,\ v_2 = \tau_1,\ \ldots\ v_5 = \tau_4$$

folgt für $T_1 = 2720$, also für $\psi = E\ (\lambda,\ 2720^0)\ V_{\text{int}}$, die Transformationsmatrix

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4{,}888 & +7{,}177 & 0 & 0 & 0 \\ +2{,}414 & -4{,}219 & +33{,}650 & 0 & 0 \\ +6{,}378 & -11{,}960 & +1{,}812 & +25{,}55 & 0 \\ +0{,}695 & -1{,}356 & -13{,}504 & +5{,}209 & +176{,}39 \end{pmatrix} \tag{32}$$

welche gemäss

$$\varphi_i\,(\lambda) = \sqrt{\psi}\,\sum^{k} a_{ik}\,\tau_k\,(\lambda) \tag{14}$$

die τ_k in die ebenfalls in Fig. 3 dargestellten φ_i überführt. Für (20) folgt

$$(A_{km}) = \begin{pmatrix} +71{,}882 & -122{,}489 & +83{,}403 & +166{,}578 & +122{,}590 \\ -122{,}489 & +214{,}190 & -146{,}330 & -312{,}641 & -239{,}185 \\ +83{,}403 & -145{,}330 & +1317{,}96 & -24{,}045 & -2381{,}97 \\ +166{,}578 & -312{,}641 & -24{,}045 & +679{,}93 & +918{,}815 \\ +122{,}590 & -239{,}185 & -2381{,}97 & +918{,}815 & +31113{,}43 \end{pmatrix} \tag{33}$$

In

$$x_k = \sum^{m} A_{km} M_m \tag{19}$$

sind nun noch die M_k zu berechnen:

$$M_k (T_2) = \int E (\lambda, 2720^0) V_{\text{int}} (\lambda) \cdot F (\lambda; 2720^0, T_2) \tau_k (\lambda), \quad k = 0 \ldots 4. \tag{1a}$$

Wir geben in Fig. 3 als Kreise die Angleichung $F' = \Sigma x_k \tau_k$ in Form von F'/F für den Fall $T_2 = 5000^0$, welcher dem Umfärbungsgrad $\Delta\, 1/T = 1676$ mired (mikroreziproke (Grade $10^{-6} T^{-1}$) in der

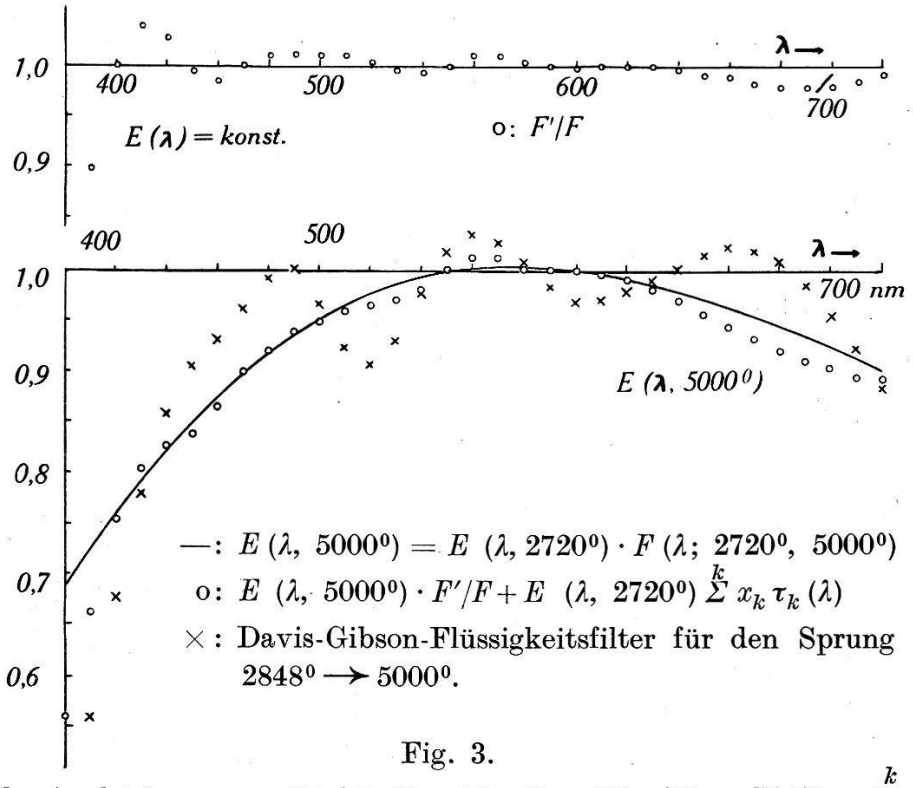

Fig. 3.

Optimale Angleichungen mittelst Kombinations-Blaufilter $F'(\lambda) = \sum^{k} x_k \tau_k (\lambda)$.
Oben: Annäherung des energiegleichen Spektrums,
unten: Annäherung der schwarzen Strahlung von 5000^0 durch schwarze Strahlung von 2720^0 und Kombinationsfilter.

Bezeichnungsweise von PRIEST) entspricht. Die zugehörige F-Kurve ist mit $E(\lambda, 5000^0)$ bezeichnet[7]). Die Annäherung von F' an F ist besser als bei dem nahezu entsprechenden ($T_1 = 2848^0$, $T_2 = 5000^0$) Davis-Gibson-Filter[8]), welches in Fig. 3 durch Kreuze angedeutet ist.

Das Problem kann auch so gestellt sein, dass die Herstellung eines energiegleichen Spektrums verlangt wird. $F'(\lambda)$ muss in diesem Fall die Strahlung

$$E(\lambda, T_1) = \text{konst.} \cdot \lambda^{-5} \cdot e^{\frac{c_2}{\lambda} \cdot \frac{1}{T_1}} \text{ in } E(\lambda) = \text{konst.}$$

überführen. Wir führen dieses Beispiel etwas näher aus, da die theoretische Herstellung der Strahlung $E(\lambda) = \text{konst.}$ in dieser Vollkommenheit in der Literatur bisher noch nicht beschrieben worden ist.

Es wird gemäss (1) für die in Frage stehende Filterserie

$$M_k = \int V_{\text{int}}(\lambda)\, \tau_k(\lambda)\, d\lambda \begin{cases} M_0 = 1 \\ M_1 = 0{,}72306 \\ M_2 = 0{,}02419 \\ M_3 = 0{,}08817 \\ M_4 = 0{,}001218 \end{cases}$$

und für $T_1 = 2720^0$:

$$x_k = \sum^m A_{km} M_m \begin{cases} x_0 = 0{,}169 \\ x_1 = 0{,}986 \\ x_2 = 5{,}18 \\ x_3 = 1{,}006 \\ x_4 = 10{,}93\,. \end{cases}$$

In Fig. 3, oben, ist das Ergebnis durch Kreise dargestellt. Die Angleichung darf füglich als ausgezeichnet betrachtet werden und zeigt angesichts der Grösse des Farbensprungs erneut die Leistungsfähigkeit des Kombinationsgedankens.

Kontrollen. Allfällige Rechenfehler in (a_{ik}) findet man mittelst folgender allgemeiner Kontrolle: Für $F = F' = 1$, also $M_k(T_2) = M_k(T_1)$, m. a. W. wenn die Strahlung $E(T_1)$ überhaupt nicht umgefärbt zu werden braucht, muss

$$x_1 = \sum^m A_{1m} M_m(T_1) = 1$$

$$x_s = \sum^m A_{sm} M_m(T_1) = 0, \quad s = 1 \ldots 4$$

sein. Man erkennt, dass die Rechengenauigkeit ziemlich gross sein muss, da die Zahlen $A_{im} M_m$ von der Grössenordnung 100 sind! Im vorliegenden Fall, wo $\tau_0 = 1$ und $\varphi_0 = \sqrt{\psi}\,\tau_0 = \sqrt{\psi}$ ist, ist folgende spezielle Kontrolle möglich: Für $F = F' = 1$ lautet hier die Lösung von (16):

$$y_0 = 1;\; y_s = 0,\; s = 1 \ldots 4,$$

also muss nach (18)

$$\sum^k a_{0k} M_k = 1$$

$$\sum^k a_{sk} M_k = 0,\; s = 1 \ldots 4$$

sein.

Aufgabe III: Gegeben sind die in Fig. 4 dargestellten Durchlässigkeitsfunktionen $d_k(\lambda)$, $k = 1 \ldots 8$, aus denen sich, wie wir zeigen konnten[9]), durch lineare Kombination

$$V'(\lambda) = \sum^{k} c_k \, d_k(\lambda)$$

ein $V'(\lambda)$ aufbauen lässt, welches V_{int} sehr nahe kommt, so dass dieses Kombinationsfilter zusammen mit einem nicht-selektiven Empfänger, z. B. einer Thermosäule, ein sehr leistungsfähiges künstliches Präzisionsauge darstellt. Gesucht sind die c_k, die wir im Anschluss an die Aufgaben I und II mit x_k bezeichnen wollen, derart, dass V' im Sinne von Gauss eine beste Angleichung an V_{int} darstellt.

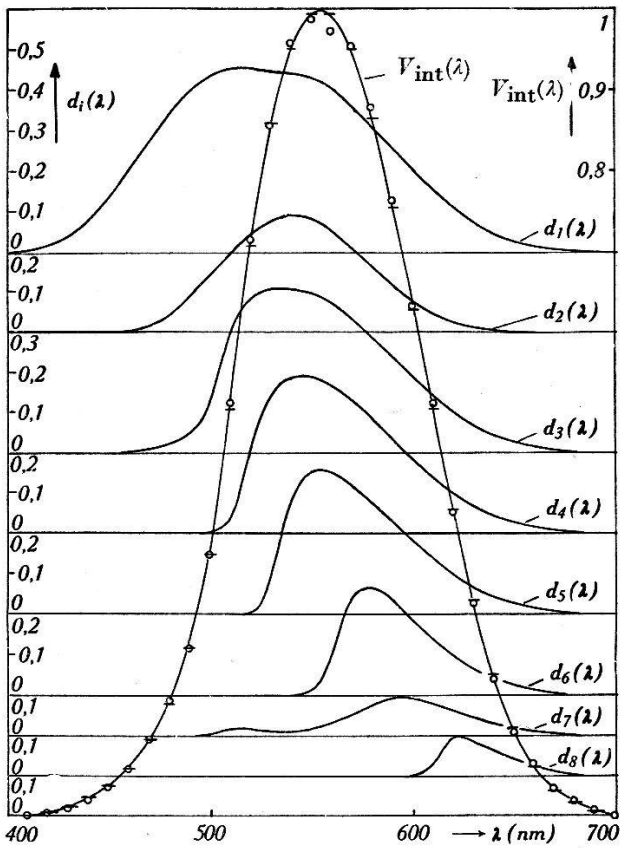

Fig. 4.

Zu nicht-selektivem Empfänger gehöriges Kombinationsfilter

$$V'(\lambda) = \sum^{k} c_k \, d_k(\lambda) = d_1(\lambda) \sum^{k} c_k \, d_k'(\lambda), \quad d_1'(\lambda) = 1.$$

$d_2'(\lambda)$: 2 mm VG 4	$d_6'(\lambda)$: 1 mm OG 2
$d_3'(\lambda)$: 1 mm OG 4	$d_7'(\lambda)$: 2 mm OG 4
$d_4'(\lambda)$: 2 mm OG 1	+ 2 mm RG 6
$d_5'(\lambda)$: 2 mm OG 1	$d_8'(\lambda)$: 2 mm RG 1

Die Werte für $V'(\lambda)$ sind durch Kreise gekennzeichnet, die Werte für $V_{\text{int}}(\lambda)$ durch Striche.

*

Der Umstand, dass zufälligerweise, wie die Angaben unter Fig. 4 erkennen lassen, bei diesem Kombinationsfilter alle Komponenten d_k als Bestandteil d_1 enthalten, hat zur Folge, dass man auch die Zusatzfilter $d_k/d_1 = d_k'$ mit den τ_k der unter I entwickelten Theorie identifizieren kann. Wir machen aber zunächst hiervon keinen Gebrauch, sondern betrachten die $d_k(\lambda)$ unmittelbar als Funktionenreihe

$$\tau_k(\lambda) \equiv d_k(\lambda),$$

auf die sich die aus der Minimumsforderung (6) fliessenden Gleichungen

$$\int \psi(\lambda)\,[F'(\lambda) - F(\lambda)]\,d_k(\lambda)\,d\lambda = 0, \quad k = 1 \ldots \omega \tag{8a}$$

beziehen soll. Im Gegensatz zu (9) ist hierin

$$F' = V' = \sum^{i} x_i\, d_i\,, \quad F = V_{\text{int}}\,.$$

In bezug auf die Wahl von ψ ist man weitgehend frei. Wohl liegt es nahe, (8) wie unter II als Bedingungen für die das Kombinationsfilter verlassenden Lichtströme anzusehen, also $\psi(\lambda)$ als Energieverteilung $E(\lambda)$ anzusehen; eine besondere Beziehung zur schwarzen Strahlung wie bei II oder noch mehr bei I besteht aber nicht, und man kann daher die Minimumsforderung auf die neutrale Strahlung $\psi(\lambda) = E(\lambda) =$ konst. beziehen. Wir behalten aber ψ in den Formeln bei.

Wesentlich neu an Problem III gegenüber I und II ist der Umstand, dass die Veranschaulichung von (8) durch die Forderung (4) richtig wiedergegebener Durchlässigkeitskoeffizienten im allgemeinen nicht mehr möglich ist. In der Tat: (4) führt statt zu (10) zum *homogenen* System

$$\sum^{i} x_i\,(t_{ik} - \bar{\tau}_k\, t_i) = 0, \quad i, k = 1 \ldots \omega, \tag{27}$$

wobei

$$t_i = \int \psi\, \tau_i\, d\lambda\,. \tag{28}$$

Die Bedingung für die Lösbarkeit ist das Verschwinden der Determinante

$$|t_{ik} - \bar{\tau}_k\, t_i| = 0\,. \tag{29}$$

Nun lässt sich (29) durch Entwickeln auf die Form bringen:

$$\sum^{i} t_i \cdot \begin{vmatrix} t_{11} \ldots t_{1\,i-1} & M_0 \cdot \bar{\tau}_1 & t_{1\,i+1} \ldots t_{1\,\omega} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ t_{\omega 1} \ldots t_{\omega i-1} & M_0\, \bar{\tau}_\omega & t_{\omega i+1} \ldots t_{\omega\,\omega} \end{vmatrix} : |t_{ik}| = M_0\,(|t_{ik}| \neq 0). \tag{30}$$

(30) ist aber gleichwertig der Nennergleichung

$$\int \psi F' \, d\lambda = \sum_{i=1}^{\omega} x_i \, t_i = \int \psi F \, d\lambda = M_0, \tag{5a}$$

wenn in derselben die x_i durch die Lösungen (12) der *Zähler*-gleichungen ersetzt werden. Die Lösbarkeitsbedingung (30) besagt also, dass die Lösung der Zählergleichungen die Nennergleichung befriedigen muss, was im allgemeinen nicht der Fall sein wird. Die Lösbarkeit ist äquivalent der Möglichkeit, die Zählergleichungen linear zur Nennergleichung zu kombinieren. Sie ist insbesondere erfüllt, wenn die Funktionen τ_k selbst sich linear zu 1 kombinieren lassen, wie es bei I und II der Fall war.

Wir betrachten weiter den Fall, wo die Nennergleichung keine Folge der Zählergleichungen ist.

Es gäbe einen mittleren Weg, die widersprechende Nennergleichung zu berücksichtigen und zwar durch Lösung des Variationsproblems

$$\delta \int \psi [F' - F]^2 \, d\lambda = 0$$

mit

$$\int \psi [F' - F] \, d\lambda = 0$$

als Nebenbedingung. Physikalische Erwägungen, welche zu dieser Behandlungsweise Anlass geben könnten, sind uns aber nicht bekannt; das Ergebnis ist theoretisch komplizierter als die Lösung der Zählergleichungen und für die praktische Durchrechnung auch in der orthogonalisierten Form unvorteilhaft.

Das einfachste ist, die überbestimmende Nennergleichung fallen zu lassen. Anschaulich formuliert bedeutet dies, dass die Teilfilter in bezug auf V' und V nicht gleiche, sondern *proportionale* Durchlässigkeiten aufweisen, wobei der Proportionalitätsfaktor bei der hohen Güte der Anpassung sehr nahe an 1 ist. Immerhin wird es stets zur Allgemeinbeurteilung der Angleichung von Interesse sein, diesen Faktor als

$$\frac{\int E(\lambda) \, V'(\lambda) \, d\lambda}{\int E(\lambda) \, V(\lambda) \, d\lambda}$$

zu berechnen.

Auf die oben gemachte Bemerkung, wonach zufälligerweise d_1 in allen d_k enthalten sei, zurückkommend, möchten wir darauf hinweisen, dass die Betrachtung mit der Gleichheit der Durchlässigkeiten (4) sich aufrecht erhalten lässt, wenn man die τ_k mit den veränderlichen Zusatzanteilen identifiziert:

$$\tau_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \quad k = 1 \ldots \omega$$

und als Strahlung $\psi(\lambda)$ nicht in die d_1 eintretende $(E(\lambda))$, sondern die d_1 verlassende Strahlung, also $E(\lambda)\, d_1(\lambda)$ und als F' nach wie vor

$$F' = \sum^{i} x_i\, d_i = d_1 \sum x_i\, \tau_i$$

setzt. Dann sind die Zählergleichungen

$$\int \psi F' \tau_k d\lambda = \int E d_1 \cdot d_1 \sum^{i} x_i \frac{d_i}{d_1} \cdot \frac{d_k}{d_1} d\lambda = \int E d_1 \cdot F \cdot \frac{d_k}{d_1} d\lambda \tag{8b}$$

identisch mit (8a); die Nennergleichung jedoch lautet:

$$\int E\, d_1\, F'\, d\lambda = \int E\, d_1\, F\, d\lambda,$$

ist also mit einer der Zählergleichungen (8a) identisch und somit erfüllt.

In bezug auf die rechnerische Durchführung ist gegenüber I und II kein Unterschied zu vermerken, ausser etwa dem, dass sie recht langwierig ist, weil keine zwei der Ausgangsfunktionen $d_k(\lambda)$ auch nur annähernd orthogonal zueinander stehen, wie es bei I der Fall war.

Überblicken wir die drei behandelten Aufgaben, so erkennen wir, dass von den Forderungen, die gestellt wurden, um eine *exakte* Problemstellung zu erhalten, nur der Interpretation als Variationsproblem, d. h. der Forderung bester Angleichung im Gauss'schen Sinn, eine allgemeine Bedeutung zukommt, so dass es sich empfiehlt, Aufgaben solcher Art als *Variationsprobleme* anzupacken, sofern das Bedürfnis nach exakter Behandlungsweise vorliegt.

Was die rechnerische Durchführung anbelangt, so möchten wir den Sinn dieser Ausführungen nicht dahin verstanden wissen, dass die Reduzierung der Matrizen (t_{ik}) durch Orthogonalisierung des zugehörigen Funktionensystems stets der empfehlenswerteste, weil methodisch eleganteste Weg ist. Einzig bei Beispiel II ist die für Blaufilter *aller* Umfärbungsgrade nur *einmal* auszuführende Orthogonalisierung vorbehaltlos als der praktisch zweckmässige Weg zu bezeichnen. Bei andern Beispielen ist von Fall zu Fall neu zu überlegen, ob das gesteckte Ziel den hier aufgezeigten systematischen Weg zu beschreiten als lohnend erscheinen lässt.

Noch in einer andern Hinsicht möchten wir einem allfällig möglichen Missverständnis vorbeugen. Es sei daher der Voll-

ständigkeit halber das Problem der Präzisionsmessung von Hg-Mischlicht erwähnt, über welches später im Zusammenhang mit den experimentellen Ergebnissen berichtet werden soll. Theoretisch besteht dieses Problem einfach in der Bestimmung von fünf Koeffizienten $q_{k,\,k+1}$ im Ausdruck

$$V'(\lambda) = Z(\lambda) \sum^{k} q_{k,\,k+1} \cdot \tau_{k,\,k+1}$$

derart, dass trotz Abweichung der Empfindlichkeitsfunktion $Z(\lambda)$ des Empfängers von V_{int} durch Beiziehung von fünf Messungen mit den fünf Filtern $\tau_0 = 1$, τ_1, τ_2, τ_3 und τ_4 erreicht wird, dass

1) das Verhältnis zweier Glühlampenstrahlungen der Farbtemperaturen T_1 und T_2,

2) die (zwei) Verhältnisse zwischen Hg-Strahlungen verschiedener Zusammensetzung (wobei nur die drei Linien 435, 546 und 577/79 berücksichtigt werden), und

3) das Verhältnis zwischen Glühlampenlicht der Farbtemperatur T_1 (oder T_2) und im Sinne von 2) beliebiger Hg-Strahlung richtig wiedergegeben werden.

Diese vier Forderungen einschliesslich der Normierungsbedingung finden ihren mathematischen Ausdruck in fünf linearen Gleichungen, aus denen sich die fünf $q_{k,\,k+1}$ berechnen lassen.

Dieses Problem hat in keiner Weise den Charakter eines Variationsproblems. Für die Auflösung der Gleichungen ist als wesentlicher Unterschied gegenüber I ... III hervorzuheben, dass nicht nur ein *auf sich selbst bezogenes* Funktionssystem (welches zu symmetrischen Matrixelementen

$$t_{ik} = \int \psi\, \tau_i\, \tau_k\, d\lambda = t_{ki} \tag{11}$$

führt, bei denen das Produkt zweier *demselben* System angehörenden Funktionen unter dem Integral steht), sondern zwei getrennte Funktionensysteme vorkommen, die zu Ausdrücken

$$r_{ik} = \int \psi\, \tau_i\, \varrho_k\, d\lambda \neq r_{ki} \tag{11b}$$

führen. Die Reduktion der Hauptmatrix auf eine Diagonalmatrix würde gleichbedeutend sein mit der Aufgabe, das ϱ-System orthogonal zum τ-System zu machen, was wiederum auf fünf Gleichungen führt, deren Matrix nicht halb-reduziert ist wie (a_{ik}) in (14) bzw. (22) oder (32). Die Lösung dieser neuen Gleichungen wäre um nichts einfacher als diejenige der Primärgleichungen, so dass eine Orthogonalisierung keine Erleichterung bedeuten würde.

Dies nur als Beispiel eines Problems, das nicht in die oben beschriebene Problemgruppe fällt. Probleme solcher Art, bei

denen das primär Gegebene ein Gleichungensystem (mit symmetrischer oder unsymmetrischer Matrix) ist, wird nach der Determinantentheorie gemäss (12) oder z. B. nach einem der im folgenden Teil erwähnten Approximationsverfahren behandelt.

Zwei weitere Probleme, die sich auf Typus I zurückführen lassen:

Aufgabe Ia: Problem $V \rightarrow Z$. Gegeben sei eine Differenzfilterreihe gemäss Fig. 1, gegebenenfalls erweitert durch ein Schott'sches GG-Filter, welches das Gebiet zwischen 400 und 520 nm passend unterteilt. Gesucht die Empfindlichkeitsfunktion $Z(\lambda)$ eines an V_{int} roh angepassten Empfängers (Beispiele: Zwei-Filter-Kombination, Photron-Element, Viscor-Zelle). Es handelt sich also um die *Ableitung* einer Näherung Z' aus V $(= V_{\text{int}})$.

Natürlicher Ausgangspunkt $Z^{(0)}$ ist V, Ziel ist Z bzw.

$$Z' = V \sum^{k} {}_{z}Q_{k,\,k+1}\, \tau_{k,\,k+1},$$

worin die ${}_{z}Q_{k,\,k+1}$ die Koeffizienten der Zerlegung von Z'/V nach $\tau_{k,\,k+1}$ bedeuten. Lösung wie bei Aufgabe I: Das zugehörige Gleichungensystem lautet:

$$\sum^{k} {}_{z}Q_{k,\,k+1} \int E\,V\, \tau_{k,\,k+1}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda = \int E\,V \cdot \frac{Z}{V}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda, \tag{5c}$$

woraus

$${}_{z}Q_{k,\,k+1} = \sum^{m} A^{d}_{km}[V] \cdot {}_{z}M_{m,\,m+1}; \tag{19c}$$

die

$${}_{z}M_{m,\,m+1} = \int E\,Z\, \tau_{m,\,m+1}\, d\lambda \tag{24c}$$

werden durch Vorschalten der $\tau_{m,\,m+1}$ vor die Zelle mit derselben gemessen. Mit der eckigen Klammer hinter A ist angedeutet, dass sich diese Grössen auf $\psi = EV$ beziehen.

Zu dieser Aufgabe gibt es eine inverse

Aufgabe Ib: Problem $Z \rightarrow V$: gegeben wie oben die $\tau_{k,\,k+1}(\lambda)$ und ein Empfänger mit bekannter Empfindlichkeitsfunktion $Z(\lambda)$. Gesucht eine Kombination von Messungen, ausgeführt mit Z und $\tau_{k,\,k+1}$ derart, dass die Linearkombination äquivalent *einer* Messung mit $V(\lambda)$ ist. Es handelt sich also um den Aufbau eines V' aus Z:

$$V' = Z \sum^{k} {}_{v}Q_{k,\,k+1}\, \tau_{k,\,k+1}.$$

Die Gleichungen lauten:

$$\sum^{k} {}_{v}Q_{k,\,k+1} \int EZ\, \tau_{k,\,k+1}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda = \int EZ \frac{V}{Z} \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda\,, \tag{5d}$$

woraus

$${}_{v}Q_{k,\,k+1} = \sum A^{d}_{km}[Z] \cdot {}_{v}M_{m,\,m+1}\,; \tag{19d}$$

die

$${}_{z}M_{m,\,m+1} = \int E\, V\, \tau_{m,\,m+1}\, d\lambda \tag{24d}$$

werden aus E, V und $\tau_{m,\,m+1}$ berechnet. $[Z]$ deutet auf die Beziehung auf

$$\psi = EZ$$

als Gewichtsfunktion hin! Dies ist nun unangenehm, da es die Neuvornahme des ganzen Orthogonalisierungsprozesses bedingt, was sich für die spezielle Funktion Z nicht lohnt. Nun wird aber Z von V nicht sehr verschieden sein, so dass eine andere Wahl der Gewichtsfunktion das Ergebnis nur in höherer Ordnung beeinflusst. Man darf statt (5d) setzen:

$$\sum^{k} {}_{v}Q_{k,\,k+1} \int EV\, \tau_{k,\,k+1}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda = \int EV \frac{V}{Z} \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda \tag{5e}$$

und demgemäss

$${}_{v}Q_{k,\,k+1} = \sum^{k} A^{d}_{km}[V] \cdot {}_{v}M_{m,\,m+1} \tag{19e}$$

$${}_{v}M_{m,\,m+1} = \int EV \frac{V}{Z} \tau_{m,\,m+1}\, d\lambda\,. \tag{24e}$$

(5e) hat dieselbe Matrix wie (5c); die individuellen Eigenschaften von Z finden in (24e) ihren Ausdruck.

Besonderes Interesse verdient die Problemstellung, die wir mit

Aufgabe IV bezeichnen möchten und die sich von Ib nur dadurch unterscheidet, dass $Z(\lambda)$ *nicht* bekannt vorausgesetzt sei. In diesem Falle kann man derart vorgehen, dass man zunächst Ia löst und das Ergebnis Z' mangels Kenntnis von Z in Ib bzw. (24e) einführt. Befriedigend ist diese Lösung aber nicht, denn 1) ist die Lösung nicht eigentlich die gesuchte, da das Ersetzen von Z durch Z' das Endergebnis beeinflussen muss, und 2) ist die Behandlungsart etwas schwerfällig.

Eine offensichtlich zweckmässigere Behandlungsweise, nämlich als Problem mit unsymmetrischer Matrix (11b), wird im Anschluss an die Besprechung der Approximationsverfahren angegeben.

Lösung durch sukzessive Approximation.

Die nicht zu unterschätzende Rechenarbeit, die mit der Orthogonalisierung verbunden ist, und der man sich ohne weiteres nur dann unterziehen wird, wenn die τ_k bzw. $\tau_{k,\,k+1}$ eine grössere Bedeutung besitzen, d. h. mehrfach (sei es im selbigen Problem oder in verschiedenen Problemstellungen) verwendet werden können, legt den Versuch nahe, sich durch sukzessive Approximation wenigstens Näherungsresultate zu verschaffen. Es sei gleich bemerkt, dass allen nachgenannten Näherungsverfahren der gemeinsame Nachteil anhaftet, dass für jede Wertreihe $M_{k,\,k+1}$ in (10a) die *ganze* Rechnung neu durchgeführt werden muss.

Die Zahl der Rezepte aus den s-ten Näherungswerten $Q^{(s)}_{i,\,i+1}$ verbesserte Werte $Q^{(s+1)}_{i,\,i+1}$ abzuleiten, ist recht gross. Die nachstehende Besprechung beschränkt sich auf drei Ansätze, die unter sich charakteristische Unterschiede aufweisen. Um die vielen Formeln nicht zweimal, nämlich für die einfachen Filter τ_k und für die Differenzfilter $\tau_{k,\,k+1}$ hinschreiben zu müssen und zugleich um zu betonen, dass eine gute Konvergenz der Verfahren nur im Falle von sich wenigstens einigermassen gegenseitig ausschliessenden (fast-orthogonalen) Funktionen zu erwarten ist, beziehen wir die Darstellung auf den Fall der Differenzfilter. Im besonderen bezieht sich das nachgenannte Verfahren A) *nur* auf die Differenzfilter-Serie.

Die angestrebte Funktion sei mit $U(\lambda)$ bezeichnet. Von ihr kennen wir nur die Integralwerte

$$M_{i,\,i+1} = \int E(\lambda)\, U(\lambda)\, \tau_{i,\,i+1}(\lambda)\, d\lambda. \tag{24}$$

Ausgangsfunktion und zugleich nullte Näherung sei die als bekannt anzusehende Funktion $U^{(0)}(\lambda)$.

Wir suchen den Grenzwert

$$U^{(\infty)} = \lim_{s \to \infty} U^{(s)}$$

der Folge von Näherungen $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)} \ldots$.

Verfahren A): Der Ausgangsfunktion $U^{(0)}$ seien die Werte

$$M^{(0)}{}_{i,\,i+1} = \int E U^{(0)}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda$$

zugeordnet. Die Quotienten

$$Q^{(0)}_{i,\,i+1} = \frac{M_{i,\,i+1}}{M^{(0)}_{i,\,i+1}}$$

messen die relativen Abweichungen vom Sollwert. Sicher ist nun

$$U^{(1)}(\lambda) = U^{(0)}(\lambda) \sum^{i} Q^{(0)}_{i,\,i+1}\, \tau_{i,\,i+1}(\lambda)$$

eine bessere Annäherung an U als $U^{(0)}$, weil in der Wellenlängenzone $(i, i+1)$ die Kurve gehoben wird, wenn $M^{(0)}_{i,\,i+1} < M_{i,\,i+1}$ ausfällt, oder umgekehrt. Man bestimmt:

$$M^{(1)}_{i,\,i+1} = \int E U^{(1)}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda\,,$$

setzt zur Abkürzung

$$Q^{(1)}_{i,\,i+1} = \frac{M_{i,\,i+1}}{M^{(1)}_{i,\,i+1}}$$

und wählt nun als Definition A) für die nächste Näherung

$$U^{(2)} = U^{(1)} \sum^{i} Q^{(1)}_{i,\,i+1}\, \tau_{i,\,i+1}\,,$$

allgemein

$$U^{(s+1)} = U^{(s)} \sum^{i} Q^{(s)}_{i,\,i+1}\, \tau_{i,\,i+1}\,, \qquad \text{A)}$$

worin

$$Q^{(s)}_{i,\,i+1} = \frac{M_{i,\,i+1}}{M^{(s)}_{i,\,i+1}} = \frac{\int E U\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda}{\int E U^{(s)}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda}\,. \qquad (34)$$

Diese Definitionen sind vernünftig, denn wenn $U^{(s)}$ gegen $U^{(\infty)}$ konvergiert, konvergiert $M^{(s)}_{i,\,i+1}$ gegen $M^{(\infty)}_{i,\,i+1} = M_{i,\,i+1}$, bzw. $Q^{(\infty)}_{i,\,i+1} = 1$, was mit $\Sigma \tau_{i,\,i+1} = 1$ in Übereinstimmung steht.

Interessant und als Kontrollbeziehung im praktischen Rechnen angenehm ist bei diesem Verfahren die Erhaltung der Normierung:

$$\int E U^{(s+1)}\, d\lambda = \int E U\, d\lambda\,. \qquad (35)$$

In der Tat ist

$$\int E U^{(s+1)}\, d\lambda = \sum^{i} Q^{(s)}_{i,\,i+1} \int E U^{(s)}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda = \sum M_{i,\,i+1} = \int E U\, d\lambda\,,$$

wegen $\Sigma \tau_{i,\,i+1} = 1$.

Von Interesse ist ferner die Tatsache, dass das Ergebnis $U^{(\infty)}$ nicht von der Form: $U^{(0)}$ mal eine lineare Kombination der $\tau_{i,\,i+1}$ ist. Im Fall einer Aufgabestellung wie sub I stört dies nicht, wohl aber, wenn es sich um das Problem Ib handelt, wo man an den linearen Aufbau von $U^{(\infty)}$ aus physikalischen Gründen gebunden ist.

Betreffs der Güte der Annäherung haben wir an einem extrem gewählten Beispiel, von dem nur soviel erwähnt sei, als dass es

sich um die Überführung eines gleichseitigen Dreiecks als $U^{(0)}$ ($U^{(0)} = 0$ bei $\lambda = 400$ und 720 nm, Spitze bei $\lambda = 560$ nm) in die internationale Augenkurve V_{int} als U handelte, festgestellt, dass die beste Annäherung im Sinne von Gauss, also gegeben durch die Lösungen $q_{k,\,k+1}$ von (10a), auch gefühlsmässig etwas besser aussieht als die Lösung im Sinne von A). Die Unterschiede sind aber niemals von praktischer Bedeutung, denn wenn eine Funktion eine andere nicht über ein gewisses Mass hinaus darzustellen vermag, so ist es in den Grenzen dieser Annäherung gleichgültig, ob die Näherungsfunktion so oder ein bisschen anders verläuft.

Verfahren B: Auch hier werde

$$U^{(1)} = U^{(0)} \sum^{i} Q^{(s)}_{i,\,i+1}\, \tau_{i,\,i+1}$$

als erste Verbesserung gewählt, mit der gleichen Definition für $Q^{(0)}_{i,\,i+1}$. Wesentlich ist nun aber die Forderung B):

$$U^{(s+1)} = U^{(0)} \sum^{i} Q^{(s)}_{i,\,i+1}\, \tau_{i,\,i+1}\,, \qquad \text{B)}$$

wonach $U^{(s+1)}$ das $U^{(0)}$ und eine Linearkombination der $\tau_{i,\,i+1}$ als Faktoren enthalte. Damit nun $U^{(s+1)}$ überhaupt gegen ein $U^{(\infty)}$ konvergieren kann, muss für die $Q^{(s)}_{i,\,i+1}$ eine einfache Form gesucht werden derart, dass $Q^{(s)}_{i,\,i+1}$ gegen $Q^{(\infty)}_{i,\,i+1}$ (± 1) konvergiert, wenn $M^{(s)}_{i,\,i+1}$ gegen $M^{(\infty)}_{i,\,i+1} = M_{i,\,i+1}$ konvergiert. Dieser Forderung genügt die Definition

$$Q^{(s)}_{i,\,i+s} = \frac{M_{i,\,i+1}}{M^{(s)}_{i,\,i+1}} \cdot Q^{(s-1)}_{i,\,i+1} = \prod_{p=0}^{s} \left(\frac{M_{i,\,i+1}}{M^{(p)}_{i,\,i+1}} \right), \tag{36}$$

worin wiederum

$$M^{(s)}_{i,\,i+1} = \int E U^{(s)}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda\,. \tag{24}$$

Die Normierung bleibt, im Gegensatz zu A), *nicht* erhalten; es ist

$$\int E U^{(s+1)} d\lambda = \sum^{i} M^{(s+1)}_{i,\,i+1} \neq \int E U\, d\lambda = \sum^{i} M_{i,\,i+1}\,.$$

Jedoch ist natürlich

$$\sum^{i} M^{(\infty)}_{i,\,i+1} = \sum^{i} M_{i,\,i+1}\,.$$

Wenn die $U^{(s)}$-Folge konvergiert, so ist aus Eindeutigkeitsgründen das Resultat, d. h. die Zahlenfolge $Q_{k,\,k+1}$, identisch mit den $q_{k,\,k+1}$ eines Problems vom Typus (10a) bzw. I, sofern die Transformationsmatrix

$$(t^d_{ki}) = (t^d_{ik}) = \left(\int \psi\, \tau_{i,\,i+1}\, \tau_{k,\,k+1}\, \mathrm{d}\lambda \right) \tag{11a}$$

für die Belegungsfunktion $\psi = E U^{(0)}$ berechnet wird.

Für die praktische Ausrechnung steht (t_{ik}) mehr im Vordergrund als beim Orthogonalisierungsverfahren. In der Tat folgt:

$$M^{(1)}_{i,\,i+1} = \int E U^{(1)}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda = \sum^{k} Q^{(0)}_{k,\,k+1} \int E U^{(0)}\, \tau_{k,\,k+1}\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda$$
$$= \sum Q^{(0)}_{k,\,k+1}\, t^{d}_{k\,i};$$

analog:

$$M^{(s+1)}_{i,\,i+1} = \sum^{k} Q^{(s)}_{k,\,k+1}\, t^{d}_{k\,i} \tag{37}$$

und

$$Q^{(s)}_{i,\,i+1} = \frac{M_{i,\,i+1}\, Q^{(s-1)}_{i,\,i+1}}{\sum^{k} Q^{(s-1)}_{k,\,k+1}\, t^{d}_{k\,i}}. \tag{38}$$

Mit $M_{i,\,i+1}$, $M^{(0)}_{i,\,i+1}$ und $t^{d}_{i\,k}$ ist also schrittweise jede weitere Grösse berechenbar.

Zur Suche nach Fehlern in der Berechnung von $t^{d}_{i\,k}$ dient die Folge von Kontrollformeln:

$$\left.\begin{aligned} &\sum^{k} \psi\, \tau_{i,\,i+1}\, \tau_{k,\,k+1} = \psi\, \tau_{i,\,i+1} \\ &\int \psi\, \tau_{i,\,i+1}\, d\lambda = \sum^{k} t^{d}_{i\,k} = M^{(0)}_{i,\,i+1} \\ &\sum^{i} M^{(0)}_{i,\,i+1} = \sum^{i} \sum^{k} t^{d}_{i\,k} = \int \psi\, d\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Verfahren C): Sog. Iterationsverfahren[10]). Wenn in einem Gleichungensystem

$$\sum^{i} Q_{i,\,i+1}\, t^{d}_{i\,k} = M_{k,\,k+1} \tag{10a}$$

jeweils das Glied $i = k$ dadurch eine ausgezeichnete Rolle spielt, dass t^{d}_{kk} wesentlich grösser als t^{d}_{ik} $(i \neq k)$ ist, liegt es nahe, nach der betreffenden Unbekannten aufzulösen:

$$Q_{k,\,k+1} = \frac{M_{k,\,k+1}}{t^{d}_{k\,k}} - \sum{}' \frac{t^{d}_{i\,k}}{t^{d}_{k\,k}} \cdot Q_{i,\,i+1}$$

und eine Folge von Lösungen $Q^{(s)}_{i,\,i+1}$ zu definieren durch

$$Q^{(s)}_{k,\,k+1} = \frac{M_{k,\,k+1}}{t^{d}_{kk}} - \sum{}' \frac{t^{d}_{i\,k}}{t^{d}_{kk}} \cdot Q^{(s-1)}_{i,\,i+1}, \quad s = 0 \ldots \infty, \tag{C}$$

wobei

$$Q^{(0)}_{k,\,k+1} = \frac{M_{k,\,k+1}}{t^{d}_{k\,k}}. \tag{40}$$

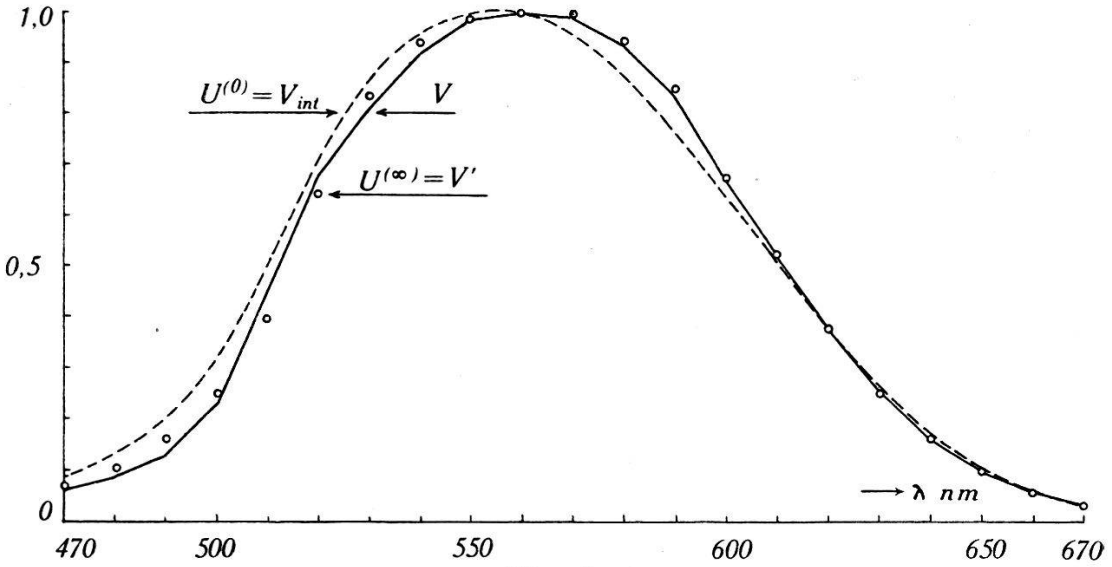

Fig. 5.
Annäherung der gemessenen Funktion V durch $V' = U^{(\infty)}$, ausgehend von $U^{(0)} = V_{\text{int}}$, mittelst sukzessiver Approximation.

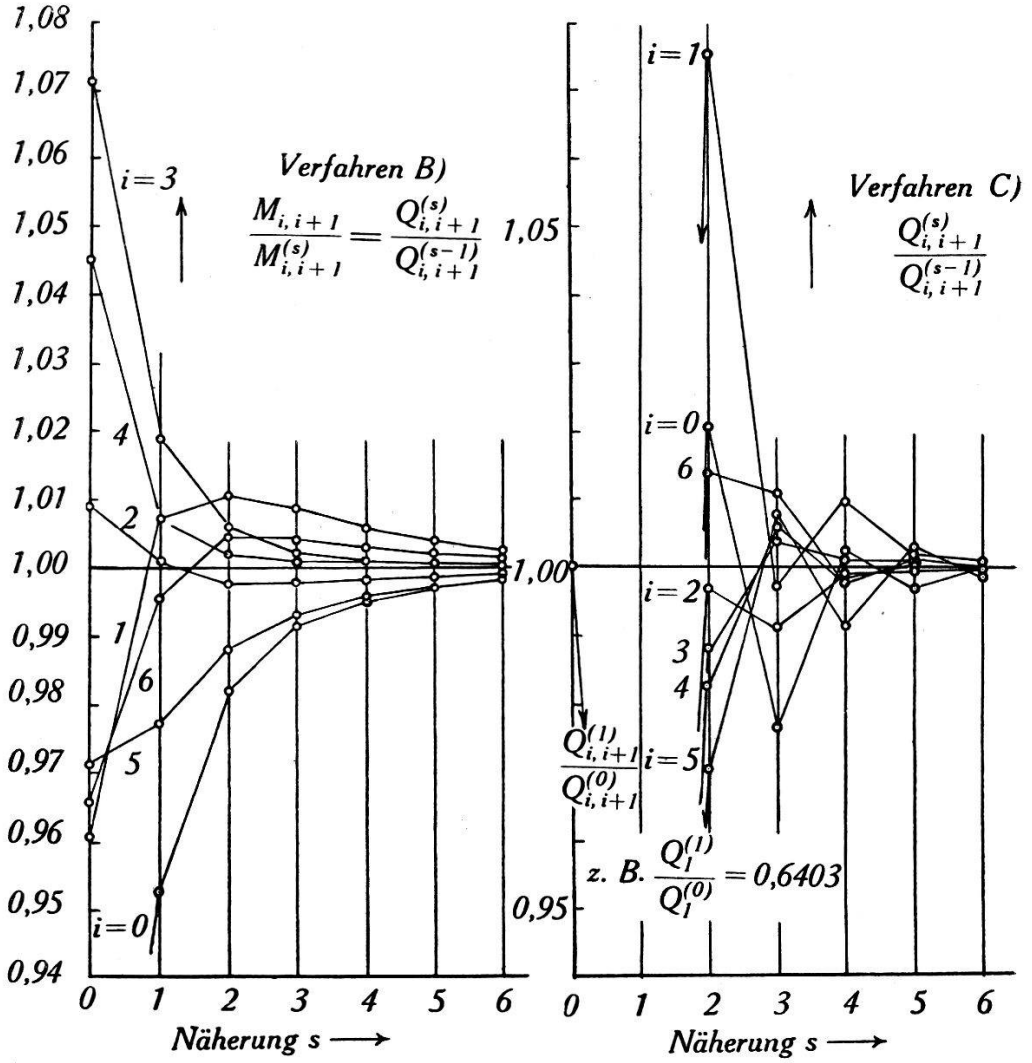

Fig. 6.
Konvergenz der verschiedenen Näherungsverfahren.

Der Strich beim Summenzeichen kennzeichnet eine Summe ohne das Glied $i = k$. Natürlich ist, *wenn* das Verfahren konvergiert,

$$\lim_{s \to \infty} Q^{(s)}_{k,\,k+1} = Q_{k,\,k+1}\,.$$

Zum vergleichenden Studium der Konvergenzverhältnisse wurde folgende Aufgabe vom Typus I nach den Verfahren A), B) und C) gelöst: Gesucht $U^{(\infty)} = V'$ ausgehend von der Ausgangsfunktion $U^{(0)} = V_{\text{int}}$, wobei die durch V' approximierte Funktion als V in Fig. 5 wiedergegeben ist. Wie hier nebenbei bemerkt sei, entspricht V dem Mittelwert dreier Beobachter bei hohen Leuchtdichten, experimentell von 10 zu 10 nm bestimmt, woraus die Werte $M_{i,\,i+1}$ berechnet wurden. V' wäre also die Funktion die bestenfalls errechnet werden kann aus V_{int} und den 7 Ergebnissen $M_{i,\,i+1}$ von Messungen bei denen V wirksam wäre. Die Resultate der Rechnungen sind am besten vergleichbar wenn die gegen 1 konvergierenden Faktoren zusammengestellt werden, also $Q^{(s)}$ bei A),

$$\frac{M}{M^{(s)}} = \frac{Q^{(s)}}{Q^{(s-1)}}$$

bei B), und

$$\frac{Q^{(s)}}{Q^{(s-1)}}$$

bei C); diese Grössen sind, soweit sie B) und C) betreffen, in Fig. 6 dargestellt. Die Faktoren $Q^{(s)}_{i,\,i+1}$ des Verfahrens A) unterscheiden sich im vorliegenden Beispiel von den

$$\frac{M_{i,i+1}}{M^{(s)}_{i,\,i+1}}$$

des Verfahrens B) um weniger als 0,001, so dass wir sie in Fig. 6 nicht aufgenommen haben. Die Konvergenzverhältnisse sind dementsprechend für A) und B) praktisch dieselben.

Die Lösung der Aufgabe lautet:

$$\begin{aligned} V' = V_{\text{int}}\,(&0{,}772\,\tau_{0,1} + 1{,}003\,\tau_{1,2} + 0{,}998\,\tau_{2,3} + 1{,}104\,\tau_{3,4} \\ &+ 1{,}057\,\tau_{4,5} + 0{,}919\,\tau_{5,6} + 0{,}976\,\tau_{6,7})\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Verfahren A) bietet wegen seinen Kontrollmöglichkeiten am meisten Sicherheit vor Rechenfehlern, ist aber von den dreien das zeitraubendste, weil stets wiederum Integrale (34) berechnet werden müssen, während bei B) und C) diese Arbeit mit der Berechnung von t^d_{ik} ein für alle Mal erledigt ist.

Verfahren B) bietet trotz (39) nicht diesen hohen Grad fortschreitender Kontrolle, doch gilt die Gleichung (35) bei mässiger Differenz zwischen V' und V und bei leidlicher Konvergenz *beinahe*; so lauten die Zahlen im vorliegenden Beispiel für

$$\sum M^{(0)}_{i,\,i+1} = 1 \qquad \sum M^{(2)}_{i,\,i+1} = 1{,}00032 \qquad \sum M^{(4)}_{i,\,i+1} = 1{,}00015$$
$$\sum M^{(1)}_{i,\,i+1} = 1 \qquad \sum M^{(3)}_{i,\,i+1} = 1{,}00022 \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Verfahren C) hat überhaupt keine Beziehungen, die den Gang der Rechnung zu kontrollieren gestatten, hat aber die Eigenschaft, dass sich die Wirkung allfälliger Rechenfehler nach einigen weiteren Näherungsstufen wieder ausgeglichen hat.

Der zeitliche Aufwand je Näherungsstufe ist bei B) und C) derselbe.

B) erfordert eine einmalige Vorarbeit in Form der Berechnung der Matrix (11a).

Wenn man sich strikte an die übliche die Gleichung C) ergänzende Vorschrift (40) hält, so ist B) dem Verfahren C) weit überlegen, indem sich die sukzessiven Lösungen zuerst vom Ziel entfernen; die 6. Näherung von C) ist immer noch schlechter als die 1. von B). Wir haben in Fig. 6 daher nicht diese Zahlenfolgen wiedergegeben, sondern solche, bei denen in der Gleichung für $Q^{(1)}_{k,\,k+1}$:

$$Q^{(1)}_{k,\,k+1} = \frac{M_{k,\,k+1}}{t^d_{kk}} - \sum{}' \frac{t^d_{ik}}{t^d_{kk}} Q^{(0)}_{i,\,i+1}$$

auf der rechten Seite als nullte Näherung

$$Q^{(0)}_{i,\,i+1} = 1 \qquad i = 0 \ldots 6$$

gesetzt wurde. Diese Werte kommen den Lösungen $Q_{0,1} = 0{,}772$, $Q_{1,2} = 1{,}003 \ldots$ (siehe (41)) erheblich näher als die Werte

$$\frac{M_{0,1}}{t^d_{11}} = 1{,}2110, \qquad \frac{M_{1,2}}{t^d_{12}} = 1{,}8528, \ldots.$$

wodurch das Näherungsverfahren erheblich abgekürzt wird.

Bei Verfahren B) ist kein solcher Kunstgriff nötig; die sukzessiven Lösungen steuern direkt, also im wesentlichen aperiodisch auf die Endlösung zu. Bei C) dagegen ist die Annäherung im wesentlichen oszillierend und zwar pro Stufe besser als bei B). Beide der Verfahren B) und C) haben also unstreitbare Vorteile.

B) dürfte eindeutig den Vorzug verdienen, wenn man mit der zweiten Näherung schon ein rohes Bild über die Verhältnisse haben

will. C) hingegen dürfte vorzuziehen sein, wenn der Diagonalcharakter von (t_{ik}^d) nicht sehr ausgeprägt ist und eine Näherungslösung $Q_{i,i+1}^{(0)}$ irgendwie direkt aufgefunden werden kann. Mehr als diese Vermutungen möchten wir hier nicht zum Ausdruck bringen, bevor weitere Beispiele nach den verschiedenen Verfahren behandelt worden sind.

Zur Beurteilung der absoluten Konvergenz ist es noch notwendig, die für die benutzte Filterserie gültige und die Konvergenz wesentlich bestimmende Matrix (t_{ik}^d) anzugeben:

$$(t_{ik}^d)=\begin{pmatrix} 7618 & 2183 & 845 & 210 & 63 & 15 & 2 \\ 2183 & 5949 & 3030 & 258 & 51 & 4 & 0 \\ 845 & 3030 & 17732 & 4077 & 153 & 3 & 0 \\ 210 & 258 & 4077 & 13839 & 3260 & 111 & 5 \\ 63 & 51 & 153 & 3260 & 11454 & 2407 & 164 \\ 15 & 4 & 3 & 111 & 2407 & 4241 & 1101 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 164 & 1101 & 3286 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}\left(\sum^{ik} t_{ik}=1\right).$$

Die Glieder nahe der Diagonale sind im Vergleich zu den Diagonalgliedern noch recht gross, und man darf daher mit der Güte der Konvergenz zufrieden sein.

Zum Schluss kehren wir nochmals zu Aufgabe IV zurück, indem wir sie von vornherein gemäss (11b) auf *zwei* Funktionensysteme beziehen, nämlich auf die Abgleichungsfilter $\tau_{k,\,k+1}$ und die Eichfilter $\varrho_{k,k+1}$. Den praktischen Vorteil, welchen dies bietet, sieht man sofort ein, wenn man die (5d) analogen Bestimmungsgleichungen hinschreibt:

$$\sum^{k} Q_{k,\,k+1}\int E(T)\, Z\, \varrho_{i,\,i+1}\, \tau_{k,\,k+1}\, d\lambda = \int E(T)\, \varrho_{i,\,i+1}\, V\, d\lambda. \tag{5f}$$

Die Integrale auf der linken Seite:

$$r_{ik} = \int E\,(T)\, \varrho_{i,\,i+1}\, Z\, \tau_{k,\,k+1}\, d\lambda \tag{11c}$$

sind bis auf einen Proportionalitätsfaktor mit der Zelle selbst messbar und bedeuten die Ausschläge, die man erhält, wenn man die Eichstrahlungen $E\,(T)\, \varrho_{i,\,i+1}$ auf die der Reihe nach mit den Abgleichungsfiltern $\tau_{k,\,k+1}$ bedeckte Zelle fallen lässt. Zahlenmässig zu kennen braucht man also nur die Farbtemperatur T der Glühlampe und den Eichfiltersatz $\tau_{k,\,k+1}$ zwecks Berechnung der Integrale auf der rechten Seite von (5f). Damit ist die für die praktische Photometrie wichtige Möglichkeit gegeben, mit einem Minimum von Kenntnissen $(E\,(T)\, \varrho_{i,\,i+1}(\lambda)$ für einen unbekannten, roh an V_{int} angeglichenen Empfänger die Vorschrift aufzustellen, wie durch Zusatzmessungen die Angaben des Empfängers verbessert werden können, so dass die Messungen der Eichstrahlungen richtig wiedergegeben werden. Die Zahl der Filter im einzelnen

Satz richtet sich nach den Anforderungen. Bei Glühlampenlicht genügt bekanntlich *ein* Filter; zur Umfärbung des Glühlampenlichtes dient als Filter ϱ zweckmässigerweise das Kombinationsfilter des Mehrfilter-Verfahrens[5]). Bei Hg-Mischlicht sind, wie oben bemerkt, vier Filter notwendig.

Damit bei grösserer Filterzahl die Konvergenz des Näherungsverfahrens (B) oder C)) gut ist, ist darauf zu achten, dass auch die $\varrho_{i,\,i+1}$ hart abschneiden und dass ihre Durchlässigkeitsmaxima tunlichst mit denjenigen der $\tau_{k,\,k+1}$ zusammenfallen.

Literatur.

[1]) Madelung, Mathematische Hilfsmittel des Physikers, J. Springer, Berlin, 1936, S. 22.

[2]) Madelung, l. c., S. 23.

[3]) Madelung, l. c., S. 24.

[4]) M. Jaggi, Diss. Bern, erscheint später in dieser Zeitschrift.

[5]) König, Helv. Phys. Acta **8**, 211 (1935).

[6]) König, Bull. d. Schweiz. Elektrotechn. Vereins 1937, No. 5.

[7]) Davis und Gibson, Misc. Publ. of the Bur. of Standards No. 114, 1931, S. 23.

[8]) Davis und Gibson, l. c., S. 150.

[9]) König, Helv. Phys. Acta **10**, 165 (1937).

[10]) Runge-König, Numerisches Rechnen (Grundlehren d. Math. Wiss. in Einzeldarstellungen), Springer, Berlin, 1924, S. 184.