

# Numerische Berechnung der Helligkeit des Himmels im Sonnenvertikal

Autor(en): **Gruner, P. / Klee, Th.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **11 (1938)**

Heft VI

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-110865>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Numerische Berechnung der Helligkeit des Himmels im Sonnenvertikal

von P. Gruner und Th. Klee.

(1. IX. 38.)

## I. Teil. Die Helligkeit während der Dämmerung.

1. Die Berechnung der Helligkeit der Atmosphäre aus der diffusen Lichtzerstreuung an den Luftmolekeln, auf Grund des RAYLEIGH'schen Gesetzes, kann für Zenitdistanzen  $Z$  der Sonne, die nicht grösser sind als ca.  $75^\circ$ , mit stark vereinfachten Annäherungen recht gut berechnet werden, vgl. die neueren Arbeiten von KNEPPEL, ALLEN usw. Alle diese Formeln versagen, wenn  $Z$  in der Nähe von  $90^\circ$  ist: entweder muss eine mühsame, angenäherte numerische Integration vorgenommen werden (vgl. die Rechnungen von KLEINERT, RAMANATHAN, LINK u. a.), oder es müssen gewisse der Natur des Problems möglichst angepasste Kunstgriffe verwendet werden, um die Integrationen ausführen zu können. Solche Versuche sind vom Verfasser gemacht worden<sup>1)</sup>. Die Formeln der zweiten Arbeit scheinen nur für  $Z \leq 90^\circ$ , diejenigen der ersten dagegen nur für  $Z \geq 90^\circ$ , d. h. nach Sonnenuntergang bzw. vor Sonnenaufgang anwendbar zu sein, können aber auch um einige Grade weiter benützt werden.

Hier soll nur der zweite Fall behandelt werden: die früheren Gedankengänge werden kurz wiederholt und die Resultate in etwas abgeänderter Form gegeben, mit der Verbesserung des Fehlers, auf den in Helv. Phys. Acta IX, S. 595 hingewiesen wurde.

2. Es sei  $I_0$  die Intensität des von der Sonne auf die Atmosphäre fallenden, unpolarisierten (monochromatischen), Parallelstrahlenbündels. Für einen Beobachter in  $B$  (Fig. 1) sei die Zenitdistanz dieser Strahlen  $Z = 90 + \delta$ ;  $\delta$  positiv gibt die *Sonnentiefe* unter dem Horizont an, wobei die Ausdehnung der Sonnenscheibe und die atmosphärische Refraktion nicht berücksichtigt wird. Es ist  $0 \leq \delta \leq 2 \cdot \arccos R/R + H$ ; der letztere Wert gibt das theoretische Ende der astronomischen Dämmerung an. Der Beobachter blicke unter einem Höhenwinkel  $\varepsilon$ , bzw. einer Zenitdistanz  $\zeta = 90 - \varepsilon$ ,

<sup>1)</sup> P. GRUNER, Helv. Phys. Acta V, 145—160, 1932; Helv. Phys. Acta IX, 595—601, 1936.

nach dem Himmel. Der Streuwinkel des Sonnenlichtes in die Blickrichtung sei  $\varphi = Z - \zeta = \delta + \varepsilon$ .  $R$  sei der Erdradius, einschliesslich einer evtl. Erhöhung des Beobachters,  $BZ = H$  die „Höhe der Atmosphäre“, oberhalb welcher keine optische Zerstreuung mehr in Betracht kommt.

Aus Fig. 1 sind folgende geometrische Beziehungen ersichtlich:

$$S_0C = s_0 = + \sqrt{2RH + H^2 + R^2 \sin^2 \delta}$$

$$B_0C = CB = w_0 = + R \sin \delta$$

$$S_0B = b = s_0 + w_0$$

$$BP_m = L = + \sqrt{2RH + H^2 + R^2 \cos^2 \zeta} - R \cos \zeta$$

$$M_m P_m = w_m = w_0 - L \cos \varphi \text{ (positiv so lange } P_m \text{ rechts von } M_m \text{ liegt)}$$

$$M_m S_m = s_m = |w_m| \text{ (immer positiv).}$$

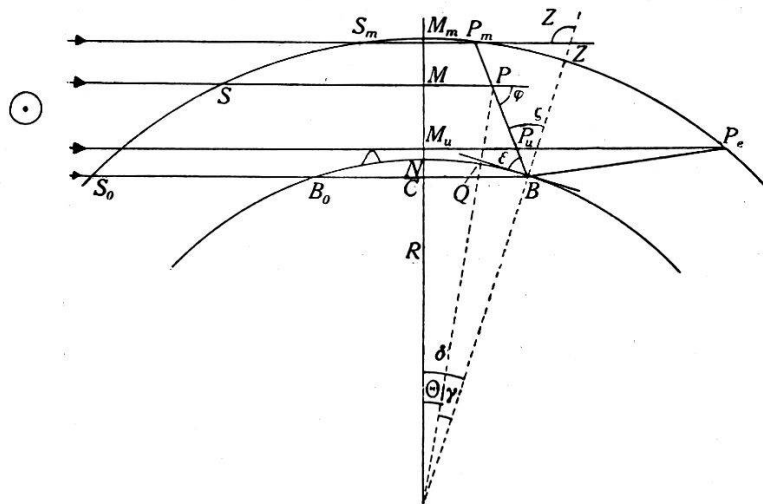


Fig. 1.

Für irgend einen Punkt  $P$  der Blickrichtung  $PP_m$  in der Höhe  $PQ = h$  über der Erdoberfläche gilt, unter Einbeziehung der Winkel  $\Theta + \gamma = \delta$  und der Strecke  $NM = p$ :

$$MP = w = \frac{R \sin \zeta - (R + p) \sin (\zeta - \delta)}{\cos (\zeta - \delta)} \quad \text{(positiv so lange } P \text{ rechts von } M \text{ liegt)}$$

$$\text{tang } \Theta = \frac{w}{R + p}$$

$$PQ = h = p + w \text{ tang } \Theta/2.$$

Ist  $NM_u = p_u$  die durch Berge, Wolken u. dgl. bestimmte Höhe, in der die untersten Sonnenstrahlen über die Erdoberfläche streifen (meist ist  $p_u = 0$ ), so kann man daraus die zugehörigen Werte  $w_u$ ,  $\Theta_u$ ,  $h_u$  berechnen; sie bestimmen die unterste Strecke  $BP_u = L_u$  des Sehstrahles, der im Schatten liegt. Analog

ergibt sich die Zenitdistanz  $\zeta_e$  (negativ), unter der die geometrische Grenze des Erdschattens liegt: es muss dort  $BP_e = L$  gerade im Schatten liegen. Hiefür wird, unter Vernachlässigung von  $p_u$

$$\cos \Theta_e = \frac{R + p_u}{R + H}, \quad \gamma_e = \delta - \Theta_e; \quad \cotang \zeta_e = \frac{\cos \gamma_e - \cos \Theta_e}{\sin \gamma_e}.$$

3. Die Atmosphäre sei in homogenen, konzentrischen Schichten angeordnet, deren Dichte, bzw. Molekelzahl  $n$  pro  $\text{cm}^3$ , mit der Höhe abnimmt:  $n = n_0 f(h)$ , wobei  $f(0) = 1$  ist und  $f(H)$  sich dem Werte Null nähern muss. Es sei  $\Gamma(\varphi)$  der optische Zerstreuungskoeffizient einer Molekel für die betrachtete Wellenlänge,  $\kappa = \kappa_0 f(h)$  der Auslöschungskoeffizient pro Längeneinheit in der Höhe  $h$ . Die bei  $P_m$  anvisierte Himmelsstelle erscheint dann, bei blosser Berücksichtigung der primären Zerstreuung und Auslöschung, mit einer Intensität (Beleuchtungsstärke):

$$I = I_0 \cdot \Gamma \int_{Lu}^L n \cdot e^{-\kappa_0 \int_B^P f(h) \cdot dl - \kappa_0 \int_P^S f(h) \cdot dx} \cdot dl, \quad (1)$$

wenn  $BP = l$  und  $SP = x$  gesetzt wird ( $SM = s$ ,  $MP = w$ ,  $x = s + w$ ).

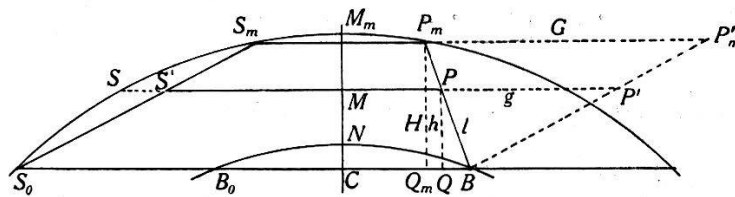


Fig. 2.

Zur Ausrechnung dieses Integrals werden folgende *Annahmen* getroffen:

1. Für die Atmosphärendichte werde gesetzt

$$f(h) = e^{-\beta h},$$

wobei  $\beta$  so zu wählen ist, dass  $e^{-\beta H}$  gegen Null geht. Dann wird  $n = n_0 e^{-\beta h}$ ,  $\kappa = \kappa_0 e^{-\beta h}$ , und entsprechend an der untern Grenze  $P_u$ :  $\kappa_u = \kappa_0 e^{-\beta h_u}$ , an der obern Grenze  $P_m$ :  $\kappa_m = \kappa_0 e^{-\beta H}$ , das gegen Null geht.

2. Die gekrümmten Atmosphärenschichten werden passend „gestreckt“, siehe Fig. 2. Statt des gebogenen Gebietes  $BNB_0$   $S_0 S S_m P_m B$  wird als „Atmosphäre“ mit horizontalen Schichten das Trapez  $BS_0 S' S_m P_m B$  mit einer Höhe  $CM_m = Q_m P_m = H$  eingeführt. Dann wird  $BP = l = L/H \cdot h$ , und der nach  $P$  gelangende Sonnenstrahl  $SP$  wird durch  $S'P = x$  ersetzt; auf

diesem ist der ganzen Länge nach  $f(h) = e^{-\beta h}$  konstant. Das Trapez in Fig. 2 wird zum Parallelogramm  $S_0 S_m P_m' B S_0$  mit der Basis  $S_0 B = b$  ergänzt; dann wird  $P_m P_m' = G = b - (w_m + s_m)$ .  $G$  wird negativ sobald  $P_m$  rechts von  $P_m'$  ist; sobald  $P_m$  links von  $M_m$  liegt und also mit  $S_m$  zusammenfällt, wird  $G = b$  konstant. Setzt man  $PP' = g$ , so wird  $x = b - g = b - G/H \cdot h$ .

Die beiden Integrale im Exponenten von  $I$  ergeben:

$$- \kappa_0 \int_B^P f(h) dl = + \kappa_0 \frac{L}{H\beta} (e^{-\beta h} - 1)$$

$$- \kappa_0 \int_P^{S'} f(h) dx = - \kappa b e^{-\beta h} + \kappa_0 \frac{G}{H} h e^{-\beta h}.$$

Die weitere Integration in (1) ist nur möglich, wenn in mehr oder weniger grober Annäherung  $h e^{-\beta h}$  konstant vorausgesetzt wird. Wir ersetzen diesen Ausdruck am einfachsten durch seinen Mittelwert über  $h = 0$  bis  $h = H$ , nämlich  $= 1/\beta^2 H$ . Bei nicht zu extremen Werten von  $\beta$  ist dies statthaft. Formel (1) ergibt dann:

$$I = I_0 \Gamma n_0 \left( -\frac{L}{\beta H} \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_0}{\beta H} L} \cdot e^{+\frac{\kappa_0}{\beta H} \frac{G}{\beta H}} \int_{h_u}^H e^{-\kappa_0 \left( b - \frac{L}{\beta H} \right) e^{-\beta h}} \cdot d(e^{-\beta h}).$$

Mit der Abkürzung  $B = \beta H b - L$  wird

$$I = I_0 \left( \frac{n_0 \Gamma}{\kappa_0} \right) \left( L e^{-\frac{\kappa_0}{\beta H} L} \right) \left( \frac{1}{B} e^{+\frac{\kappa_0}{\beta H} \frac{G}{\beta H}} \right) \left( e^{-\frac{\kappa_m}{\beta H} B} - e^{-\frac{\kappa_u}{\beta H} B} \right) \quad (2)$$

Wenn  $B$  nicht allzugross ist, ist  $e^{-\frac{\kappa_m}{\beta H} B} = 1$  zu setzen.

4. Für die reine Atmosphäre ist, nach dem RAYLEIGH'schen Gesetz:

$$\frac{n_0 \Gamma}{\kappa_0} = \frac{3}{16 \pi} (1 + \cos^2 \varphi),$$

ferner

$$\kappa = \frac{8 \pi^2 (\nu_0^2 - 1)^2}{3 \lambda_0^4 n_0^2} n,$$

wenn  $\lambda_0$  die Wellenlänge des Lichtes,  $\nu_0$  der Brechungsindex der Luft und  $n_0$  die Avogadro'sche Zahl angibt.

Dieser Ausdruck (2) ist für Sonnentiefen  $\delta = 0$  bis  $\delta = 18^\circ$  und für alle Zenitdistanzen  $\zeta$  in passenden Intervallen für 3 Farben, Rot, Grün und Blau, berechnet worden. Es wurden folgende Zahlen zu Grunde gelegt:  $R = 6370$  km,  $H = 100$  km,  $\beta = 0,1$ ;

die Werte für  $\kappa_0$  wurden möglichst einfach gewählt und die ihnen zugehörigen Werte von  $\lambda_0$  und  $J_0$  berechnet. Zur Bestimmung der letzteren in optischen Helligkeiten wurden die Intensitäts-

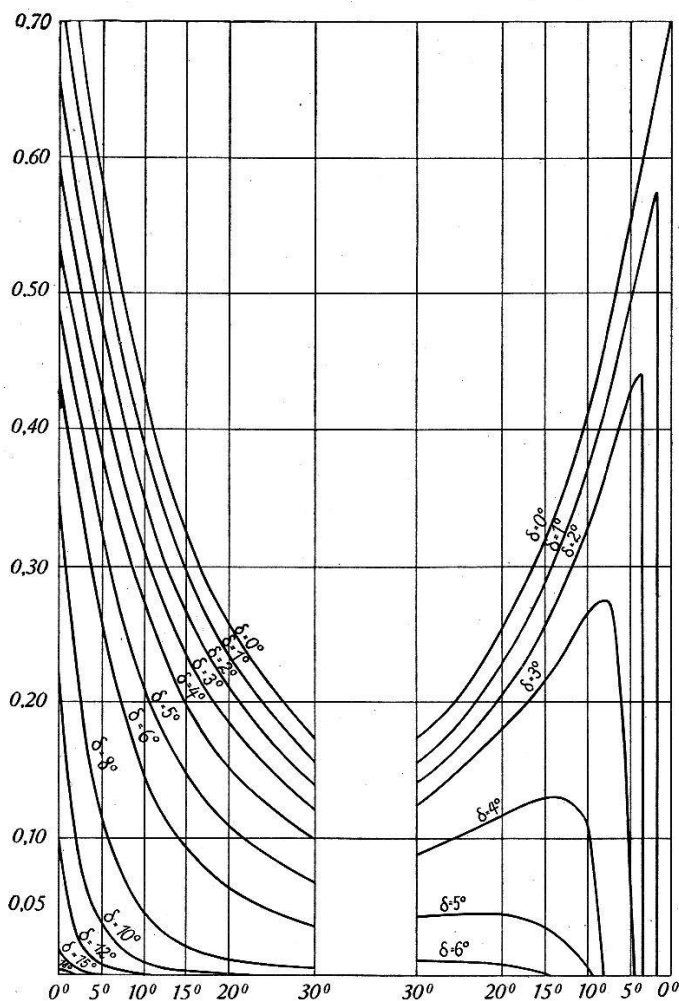


Fig. 3.  
Helligkeit im Rot.

werte des reinen Sonnenspektrums, wie sie in Tab. 72 von LINKE'S Meteorolog. Taschenbuch, II, S. 299, gegeben sind mit den entsprechenden Werten der Augenempfindlichkeitskurve multipliziert.

	$\kappa_0$ in $\text{km}^{-1}$	$\lambda_0$ in $10^{-5}$ cm	Intensität in cal. pro $\text{cm}^2$ und min.	Augen- kurve	$I_0$ (rund)
Rot . . .	0,005	6,765	46,0	2,13	100
Grün . .	0,015	5,140	59,0	58,7	3500
Blau . .	0,025	4,524	60,5	4,28	250

Die sehr langwierigen Rechnungen sind von TH. KLEE ausgeführt worden; ihre Resultate sind in den nachfolgenden Tabellen und graphischen Darstellungen zusammengestellt.

5. Tabelle I gibt die direkt berechneten *Intensitäten* (nach Formel 2) in Abhängigkeit von der Höhe der anvisierten Himmelsstelle für Rot, Grün und Blau, für die Sonnentiefen  $\delta = 0^\circ, 1^\circ \dots 18^\circ$ . Fig. 3—5 gibt dasselbe in graphischer Darstellung<sup>1)</sup> für die Gebiete, die besonders interessant sind, nämlich für Höhen bis  $30^\circ$ . Der

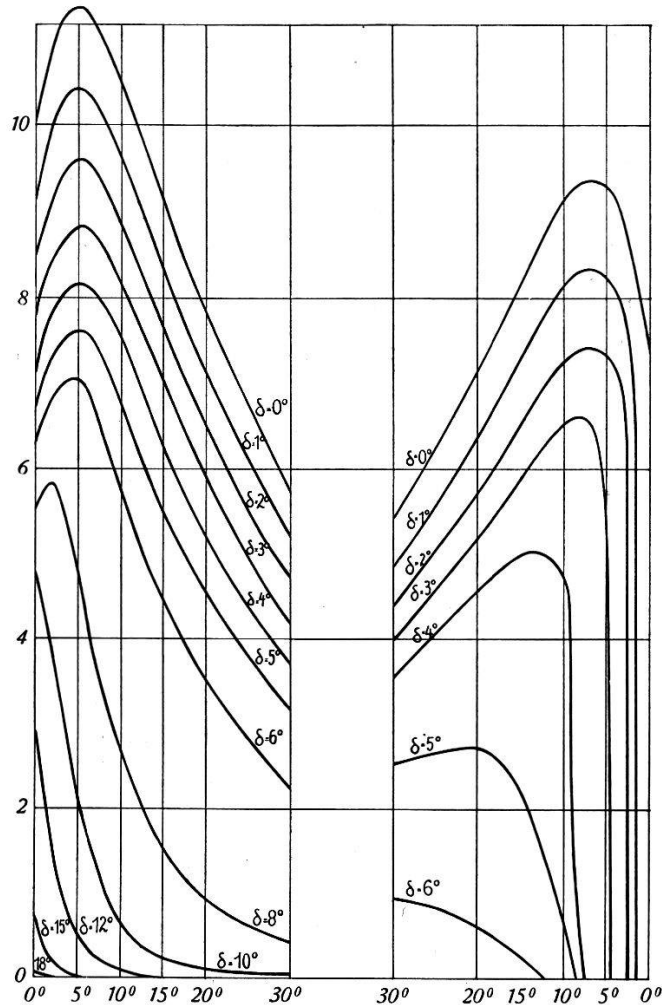


Fig. 4.

Helligkeit im Grün.

*Gesamtverlauf für Grün*, für den ganzen Sonnenvertikal, ist in Fig. 6 dargestellt. Um auch numerisch den Verlauf der Intensität mit variierender Höhe in den verschiedenen Farben bei den Sonnentiefen  $0^\circ$ — $8^\circ$  überblicken zu können, sind in Tabelle II die *Intensitätsverhältnisse* zu der jeweiligen Zenit-Intensität zusammengestellt. In Tabelle II d sind dann die Verhältnisse dieser Zenithelligkeiten selber angegeben. Zur Beurteilung der *Färbung* des Himmels und ihres Intensitätsgrades können die Intensitätsverhältnisse *Rot/Grün* oder *Rot/Blau* verwendet werden. Die-

<sup>1)</sup> Zur genaueren Darstellung wurde noch eine Anzahl von Zwischenwerten berechnet, die in den Tabellen nicht angegeben sind.



selben sind in Tabelle III und IV aufgezeichnet und in Fig. 7 und 8 dargestellt, wiederum nur für das interessante Gebiet bis 30° Höhe. Durch einfache graphische Interpolation wurden die Zahlwerte an der geometrischen Erdschattengrenze berechnet und in Fig. 7 und 8 eingezeichnet.

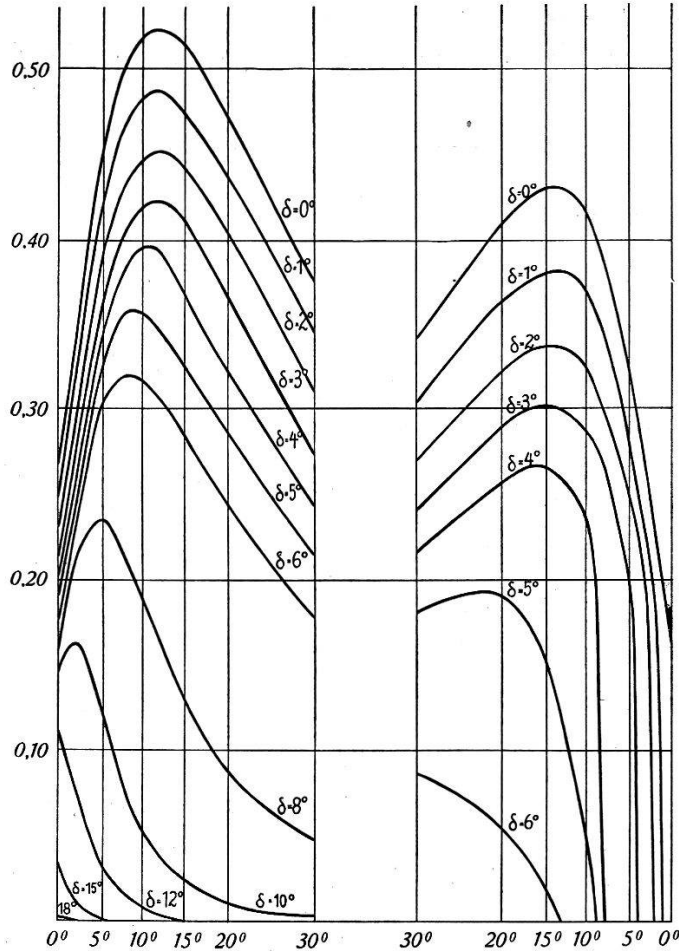


Fig. 5.

Helligkeit im Blau.

Die *geometrische Grenze des Erdschattens* für eine Atmosphäre von 100 km Höhe (wie sie hier willkürlich vorausgesetzt wurde) ist durch die nachfolgenden Werte von  $180^\circ - \epsilon_e$  (siehe S. 515) gegeben:

$\delta$ :	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	8°	10°	10° 5'
$180 - \epsilon_e$ :	0°	1° 3'	2° 15'	3° 38'	5° 17'	7° 25'	10° 17'	22° 09'	84° 44'	90°

und durch die Werte von  $\epsilon_e$  auf der Sonnenseite, als Grenze des Dämmerungsscheines:

$\delta$ :	12°	15°	18°	20° 10'
$\epsilon_e$ :	24°	7° 49'	2° 38'	0°

Zum Verständnis der Helligkeitswerte müssen für jede Farbe bestimmte *Schwellenwerte* bekannt sein, d. h. diejenigen Intensitätswerte, unterhalb derer die betreffende Helligkeit normalerweise



dem Auge nicht mehr erkennbar ist. Es handelt sich dabei um subtile Grössen, über die schwerlich ganz bestimmte Aussagen gemacht werden können. Wir begnügen uns deshalb, zur allgemeinen, rohen Orientierung, mit willkürlich gewählten Zahlwerten, die sich den tatsächlichen Verhältnissen einigermaßen anpassen. Wir setzen als Schwellenwerte für  
 Rot: 0,1; Grün: 0,5; Blau: 0,05; Rot/Grün: 0,04; Rot/Blau: 0,9.

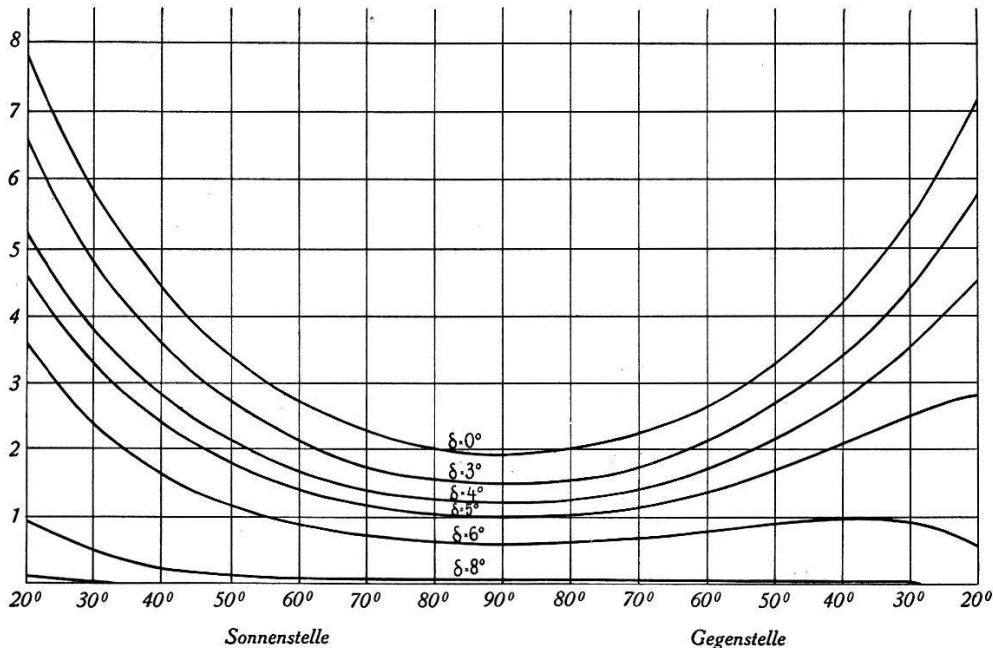


Fig. 6.

Gesamtverlauf der Helligkeit im Grün.

### 6. Diskussion der Resultate.

Die *mittlere Zone des Himmels*, um den Zenit bis herunter zu Höhen über  $30^\circ$ , zeigt nach Fig. 6 nichts auffallendes im Grün, und auch nicht im Rot und Blau (vgl. Tabellen I). Die Zahlen der Tabellen II—IV zeigen einige merkwürdige Schwankungen, die aber sehr gering sind und wohl auf Rechnung der Unsicherheiten infolge der Approximationen unserer Theorie zu setzen sind. Bei Sonnentiefen von  $0^\circ$ — $5^\circ$  sind die Intensitäten, sowie die Farbverhältnisse, in grober Annäherung symmetrisch um den Zenit, jedoch an der Gegenstelle eher etwas kleiner als an der Sonnenstelle. Die Minima der Intensität schwanken um den Zenit herum. Von  $\delta = 6^\circ$  nehmen die Intensitäten an der Gegenstelle rasch ab, bis sie die geometrische Erdschattengrenze ( $\delta = 10^\circ 5'$ ) erreicht.

Interessanter sind die *Himmelshelligkeiten vom Horizont aufwärts bis etwa  $30^\circ$  Höhe*. Vorerst fällt sofort (Fig. 3—5) das verschiedene Verhalten von Rot gegenüber Grün und Blau an

der Sonnenstelle auf: Rot nimmt für alle  $\delta$  mit zunehmender Höhe ab, Grün und Blau tun dies erst für grosse  $\delta$  ( $10^\circ$  bzw.  $12^\circ$ ); sonst wachsen sie mit zunehmender Höhe bis zu einem Maximum, um dann rasch zu sinken. Bei geringen Sonnentiefen verweilt dieses Maximum bei etwa  $5^\circ$  Höhe im Grün und  $10^\circ$  Höhe im Blau; dann wandert es zu kleineren Höhen, bis es ganz verschwindet. — An der Gegenstelle zeigen alle Farben Maxima: im Rot

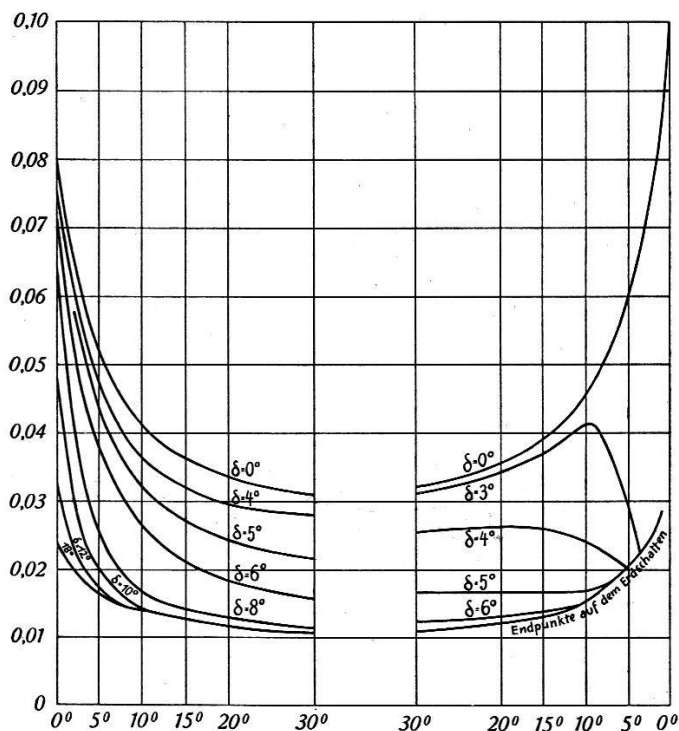


Fig. 7.  
Intensitätsverhältnis Rot/Grün.

steigt das (abnehmende) Maximum mit sinkender Sonne bis zu etwa  $18^\circ$  Höhe; im Grün verweilt es zunächst bei etwa  $7^\circ$ , ebenso im Blau bei etwa  $14^\circ$ , um nachher zu noch grösseren Höhen zu steigen, aber mit rasch abnehmender Intensität.

Der Verlauf der *wirklichen, photometrischen Grenze des Erdschattens* (bzw. des Dämmerungsscheines an der Sonnenstelle) ist gegeben durch die Schnittpunkte der Intensitätskurven mit der Schwellenwertgeraden (die in unsern Figuren nicht eingezeichnet ist). Bei unserer Wahl der Schwellenwerte folgt dafür ganz angenähert:

$\delta$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$8^\circ$	$10^\circ$	$12^\circ$	$15^\circ$
Rot:	$1,5^\circ$	$3^\circ$	$5^\circ$	$9,5^\circ$	—	—	$14^\circ$	$2^\circ$	$0^\circ$	—
Grün:	$2^\circ$	$3^\circ$	$4,5^\circ$	$7,5^\circ$	$10^\circ$	$18^\circ$	$28^\circ$	$12^\circ$	$5^\circ$	$1^\circ$
Blau:	$1,5^\circ$	$2,5^\circ$	$4,5^\circ$	$7^\circ$	$10^\circ$	$18^\circ$	$30^\circ$	$11^\circ$	$4^\circ$	$0^\circ$
	Erdschatten an der Gegenstelle						Dämmerungsschein an der Sonnenstelle			

Die Zahlen zwischen Grün und Blau dürften etwa den Verlauf der Erdschattenbewegung bestimmen. Sie stimmen quantitativ nicht sehr gut mit den bekannten Beobachtungsergebnissen; das ist aber zu erwarten, da es sich hier um Zahlen für die völlig reine Atmosphäre handelt; tatsächlich ist sie immer mehr oder weniger getrübt; auch ist zu beachten, dass unsere Theorie die mehrfache Diffusion des Lichtes nicht berücksichtigt. — Für das *Ende der astronomischen Dämmerung*, wenn Grün unter den Schwellenwert sinkt, ergeben unsere Zahlen eine Sonnentiefe von  $16^{\circ}$ — $17^{\circ}$ ; doch hängt diese Zahl stark von den Schwellenwerten ab.

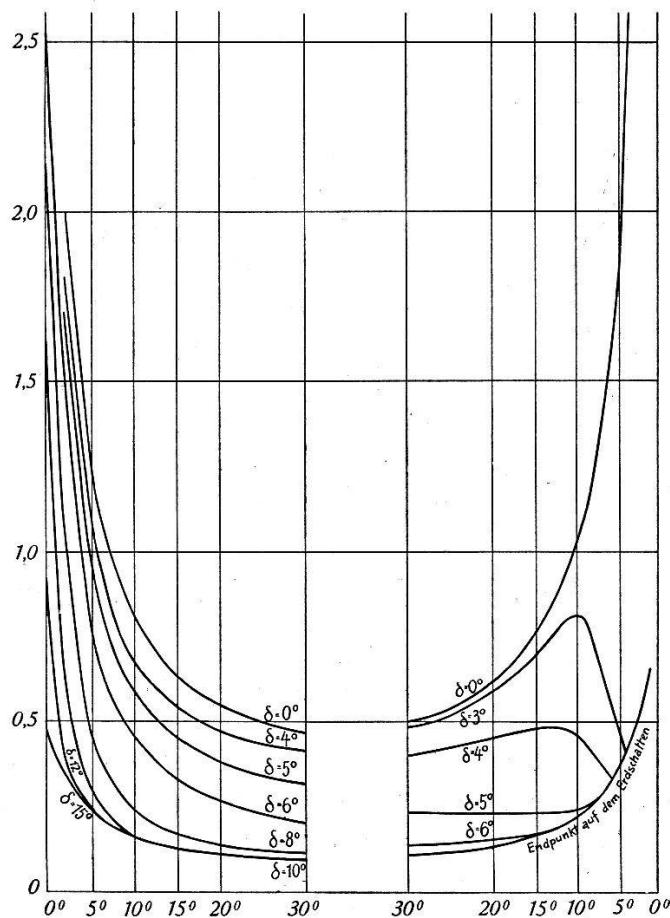


Fig. 8.

Intensitätsverhältnis Rot/Blau.

Die *Rötungen des Abendhimmels* (farbige Horizontalstreifen, Gegendämmerung — aber nicht Purpurlicht, das durch Trübungen bedingt ist) müssen grundsätzlich durch die Werte von Rot/Grün, bzw. Rot/Blau, gegeben sein. Tabellen III und IV und Fig. 7—8 zeigen ohne weiteres das Auftreten solcher Rotfärbungen. — An der Sonnenstelle nimmt das Farbenverhältnis mit der Höhe bei sinkender Sonne immer mehr ab, Rot/Blau rascher als Rot/Grün. Aus dem Schnitt mit der Schwellenwertgeraden ergibt sich, dass

diese Rotfärbung bis etwa  $10^\circ$  Höhe erkennbar sein dürfte, dass sie mit sinkender Sonne sinkt und bei  $\delta = 10^\circ$ — $12^\circ$  am Horizont verschwindet. Dies gibt ein gutes Bild der farbigen *Horizontalstreifen* in der *reinen* Atmosphäre. An der Gegenstelle ist die *Gegendämmerung* deutlich zu erkennen. Die Rotfärbung reicht beim Sonnenuntergang bis  $12^\circ$ — $14^\circ$  hoch; mit sinkender Sonne wird sie von unten vom aufsteigenden Erdschatten bedeckt; bei  $\delta = 3^\circ$  bildet sie noch ein Farbband über ihm bis zu etwa  $10^\circ$  Höhe, dann erlischt sie rasch. Die wirklich beobachteten Gegendämmerungen sind vielfach höher, intensiver und länger dauernd, was wiederum auf die Trübungen der Atmosphäre hinweist.

Überblickt man die vorliegenden Zahlenwerte ohne Rücksicht auf die Schwellenwerte, so zeigen sich gewisse Eigentümlichkeiten und Unregelmässigkeiten, die Folgen unserer theoretischen Approximationen sind. Auf die kleinen Schwankungen in der Zenitgegend wurde schon hingewiesen. An der Gegenstelle ist eine Änderung des Charakters der Intensitätskurven von  $\delta = 4^\circ$  zu  $\delta = 6^\circ$  zu erkennen, besonders deutlich in Fig. 7 und 8: Von  $\delta = 1^\circ$ — $4^\circ$  nehmen die Verhältnisse Rot/Grün und Rot/Blau vom Zenit weg bis zu einem Maximum zu, um dann rasch gegen die geometrische Erdschattengrenze zu sinken. Bei  $\delta = 6^\circ$  dagegen ist das Minimum etwas verschoben und es erfolgt dann ein Anstieg bis zur geometrischen Erdschattengrenze. Bei  $\delta = 5^\circ$  nimmt die Kurve eine Mittelstellung ein. Eine genauere Analyse der verschiedenen Faktoren der Formel (2) zeigt, wo unsere Approximationen störend einwirken.

### 7. Zusammenfassung.

Die in dieser Arbeit vorgelegten Rechnungsergebnisse können als einen *brauchbaren Ansatz der theoretischen Berechnung der Helligkeit des reinen Himmels* im Sonnenvertikal für Rot, Grün und Blau angesehen werden. Freilich fehlt noch die Berücksichtigung der mehrfachen Lichtzerstreuung in der Atmosphäre, doch wird deren Einfluss meistens nicht sehr gross sein.

Merkliche Abweichungen beobachteter Helligkeiten des Himmels von den hier vorliegenden dürfen also als Nachweis einer *Trübung* der Atmosphäre aufgefasst werden; sie geben die Möglichkeit, gewisse Anhaltspunkte über diese Trübung zu bekommen; namentlich wird sich dies aus der Photometrie des Purpurlichtes ergeben.

**Tabelle Ia.**  
Helligkeit des Himmels.

Höhe über Horizont	$\delta = 0^{\circ}$			$\delta = 1^{\circ}$			$\delta = 2^{\circ}$			$\delta = 3^{\circ}$		
	Rot	Grün	Blau	Rot	Grün	Blau	Rot	Grün	Blau	Rot	Grün	Blau
	0,7956	10,1	0,2604	0,7194	9,22	0,2406	0,6516	8,46	0,2232	0,5909	7,78	0,2080
	7098	11,01	3468	6408	10,07	3204	5821	9,24	2980	5255	8,50	2783
	5880	11,42	4509	5322	10,47	4170	4790	9,61	3882	4331	8,85	3629
	4314	10,54	5229	3907	9,66	4846	3520	8,87	4509	3155	8,11	4214
	3285	9,09	5136	2973	8,33	4745	2677	7,65	4410	2353	7,04	4118
	2598	7,75	4701	2350	7,09	4350	2114	6,50	4035	1841	5,84	3623
	1762	5,70	3753	1589	5,21	3465	1421	4,68	3126	1232	4,17	2751
	1111	3,797	2639	09984	3,44	2415	08844	3,038	2108	07662	2,695	1855
	0766	2,692	1914	06864	2,405	1717	06078	2,125	1502	05266	1,884	1319
	0536	1,909	1380	04829	1,700	1218	04335	1,521	1078	03806	1,367	0960
	0762	2,640	1862	06948	2,385	1663	06309	2,155	1489	05596	1,958	1338
	1100	3,685	2511	1002	3,324	2238	09084	2,999	2002	08052	2,72	1800
	1733	5,42	3448	1573	4,86	3063	1422	4,38	2732	1255	3,96	2445
	2531	7,16	4126	2291	6,41	3654	2063	5,76	3247	1813	5,18	2900
	3175	8,22	4318	2868	7,34	3819	2569	6,57	3386	2162	5,91	3015
	4115	9,16	4134	3707	8,16	3646	3300	7,30	3232	2650	6,51	2865
	5482	9,26	3175	4916	8,22	2787	4289	7,32	2459	1312	4,55	1879
	6468	8,33	2176	5776	7,37	1907						
	7104	7,19	1478									

Sonnenstelle

Gegenstelle





Tabelle IIa.

Rot-Intensität im Verhältnis zur Zenit-Intensität.

	Höhe über Horizont	$\delta = 0^\circ$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$8^\circ$
Sonnenstelle	$0^\circ$	14,85	14,90	15,03	15,52	18,07	27,17	57,42	626,6
	2	13,25	13,27	13,42	13,81	15,93	23,49	48,02	429,5
	5	10,97	11,02	11,05	11,37	12,91	18,74	33,91	220,0
	10	8,052	8,090	8,118	8,291	9,160	11,92	19,18	82,92
	15	6,131	6,156	6,175	6,183	6,741	8,323	12,27	39,27
	20	4,849	4,865	4,877	4,837	5,171	6,147	8,488	21,86
	30	3,289	3,291	3,277	3,238	3,376	3,823	4,760	9,458
	45	2,073	2,067	2,040	2,013	2,103	2,274	2,511	3,855
	60	1,430	1,421	1,402	1,384	1,397	1,450	1,562	2,004
		1	1	1	1	1	1	1	1
Gegenstelle	60	1,422	1,438	1,453	1,470	1,448	1,373	1,235	0,8438
	45	2,053	2,075	2,095	2,111	2,035	1,830	1,492	0,7196
	30	3,234	3,258	3,280	3,297	3,013	2,397	1,586	0,3029
	20	4,725	4,744	4,758	4,764	3,979	2,555	1,111	
	15	5,926	5,939	5,926	5,681	4,382	2,044	0,474	
	10	7,681	7,677	7,612	6,963	3,773	0,544		
	5	10,23	10,17	9,890	3,446				
	2	12,07	11,96						
0	13,26								



**Tabelle II b.**  
Grün-Intensität im Verhältnis zur Zenit-Intensität.

	Höhe über Horizont	$\delta = 0^\circ$	1°	2°	3°	4°	5°	6°	8°
Sonnenstelle	0°	5,291	5,424	5,558	5,691	5,860	6,587	10,43	100,5
	2	5,767	5,923	6,070	6,219	6,414	7,223	11,42	107,0
	5	5,982	6,159	6,311	6,474	6,675	7,518	11,77	88,58
	10	5,521	5,682	5,828	5,933	6,161	6,690	9,733	50,35
	15	4,762	4,900	5,026	5,150	5,126	5,486	7,592	28,76
	20	4,060	4,171	4,271	4,272	4,246	4,499	5,958	17,66
	30	2,986	3,065	3,075	3,050	3,018	3,147	3,864	8,491
	45	1,989	2,024	1,996	1,971	1,946	2,067	2,258	3,684
	60	1,410	1,415	1,396	1,378	1,361	1,374	1,480	1,976
	90	1	1	1	1	1	1	1	1
	Gegenstelle	60	1,383	1,403	1,415	1,432	1,439	1,411	1,265
45		1,930	1,955	1,970	1,990	1,999	1,890	1,531	0,6874
30		2,839	2,859	2,878	2,897	2,881	2,514	1,608	0,2713
20		3,751	3,771	3,784	3,798	3,700	2,703	1,087	
15		4,303	4,318	4,317	4,310	4,075	2,208	0,442	
10		4,798	4,800	4,796	4,760	3,790	0,579		
5		4,855	4,835	4,810	3,329				
2		4,364	4,335						
0	3,766								

Tabelle IIc. *Blau-Intensität* im Verhältnis zur Zenit-Intensität.

Höhe über Horizont	$\delta = 0^\circ$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$8^\circ$
Sonnenstelle	1,887	1,975	2,071	2,166	2,270	2,427	3,235	26,24
	2,513	2,630	2,764	2,892	3,035	3,249	4,330	35,06
	3,267	3,424	3,601	3,780	3,961	4,241	5,665	39,15
	3,789	3,979	4,183	4,389	4,599	4,694	5,865	31,20
	3,722	3,896	4,091	4,289	4,243	4,296	5,262	21,17
	3,407	3,571	3,743	3,773	3,734	3,763	4,526	14,29
	2,720	2,845	2,900	2,866	2,826	2,836	3,277	7,614
	1,912	1,983	1,955	1,932	1,903	1,900	2,071	3,514
	1,377	1,410	1,393	1,374	1,354	1,346	1,421	1,939
	1	1	1	1	1	1	1	1
Gegenstelle	1,349	1,365	1,381	1,394	1,406	1,405	1,284	0,8143
	1,820	1,837	1,857	1,875	1,890	1,859	1,545	0,6627
	2,499	2,515	2,534	2,547	2,556	2,407	1,593	0,2425
	2,990	3,000	3,012	3,021	3,012	2,536	1,033	
	3,129	3,135	3,141	3,141	3,109	2,067	0,399	
	2,996	2,994	2,998	2,984	2,758	0,5362		
	2,301	2,288	2,281	1,957				
	1,577	1,566						
	1,071							

Tabelle II d. Intensitätsverhältnisse im Zenit.

$\delta = 0^\circ$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$8^\circ$
Rot . . .	1	0,9014	0,8092	0,7103	0,3359	0,1440	0,01046
Grün . . .	1	0,8905	0,7973	0,7160	0,5309	0,3943	0,03614
Blau . . .	1	0,8826	0,7812	0,6956	0,5500	0,3928	0,04413

Für  $\delta = 0$  verhalten sich die Zenithelligkeiten in Rot: Grün: Blau = 0,02807:1:0,07229.

**Tabelle III.**  
Verhältnis der Rot/Grün Intensität.

Höhe über Horizont	$\delta = 0^0$	$1^0$	$2^0$	$3^0$	$4^0$	$5^0$	$6^0$	$8^0$	$10^0$	$12^0$	$15^0$	$18^0$	
Sonnenstelle	0 <sup>0</sup>	0,07874	0,07796	0,07706	0,07596	0,07477	0,07323	0,07106	0,06379	0,04737	0,03304	0,02489	0,02330
	2	6445	6376	6290	6177	6022	5782	5425	4105	2848	2236	1992	1924
	5	5148	5087	4978	4892	4688	4431	3712	2535	1917	1685	1652	
	10	4094	4047	3969	3861	3604	3165	2572	1685	1412	1360		
	15	3612	3570	3502	3340	3189	2693	2090	1397	1242	1219		
	20	3352	3313	3250	3152	2950	2422	1838	1266	1156	1134		
	30	3090	3054	3030	2961	2714	2151	1590	1139	1083			
	45	2925	2899	2914	2852	2560	1966	1434	1070	1033			
	60	2852	2850	2862	2796	2490	1872	1361	1038	1017			
	90	2809	2840	2850	2786	2425	1776	1290	1022	1007			
Gegenstelle	60	2886	2915	2927	2861	2435	1730	1262	1040				
	45	2984	3017	3027	2958	2474	1718	1258	1068				
	30	3196	3232	3243	3168	2536	1698	1273	1142				
	20	3531	3570	3582	3497	2606	1676	1319					
	15	3866	3907	3909	3661	2605	1645	1385					
	10	4498	4546	4526	4070	2411	1670						
	5	5921	5982	5860	2882								
	2	7764	7834										
0	9882												

