Masse und Energie im Schwerefeld

Masse und Energie im Schwerefeld

von **H. Greinacher.**

(24. VII. 39.)

Auf Grund der speziellen Relativitätstheorie ist jede Energieänderung mit einer entsprechenden Massenänderung verknüpft. Es liegt nahe, diesen Äquivalenzsatz auch auf die Bewegung eines Körpers im Schwerefeld anzuwenden, obschon eigentlich die allgemeine Relativitätstheorie hier zuständig wäre. Es dürfte aber doch nicht ohne Interesse sein, den Äquivalenzsatz auch einmal für diesen Fall durchzuführen, schon weil die Verhältnisse sich besonders einfach und übersichtlich darstellen und weil die Resultate immerhin den Wert von Näherungen besitzen. Welchen Grad der Näherung sie beanspruchen können, bliebe allerdings noch gesondert zu untersuchen. Vielleicht, dass die folgenden Ausführungen eine Anregung zur weiteren Verfolgung des Gegenstandes geben können.

Wir betrachten den speziellen Fall eines homogenen Schwerefeldes. Bewegt sich ein Körper in diesem ohne äussere Kräfte, so bleibt seine Energie, also auch seine Masse m konstant. Andererseits erfährt er bei jeder Geschwindigkeitsänderung eine Massenänderung gemäss der Beziehung

$$m = \frac{m_r}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{1}$$

wo m_r die Ruhemasse bedeutet. Da m im Schwerefeld konstant bleiben soll, so muss demgemäss m_r veränderlich sein. Diese Änderung der Ruhemasse ist durch die Änderung der potentiellen Energie zu erklären. m_r setzt sich demgemäss aus einer Eigenmasse und einer potentiellen Masse zusammen. Wenn wir die Ruhemasse in der Höhe x über dem Erdboden mit m_x und die entsprechende Geschwindigkeit mit v_x bezeichnen, so wäre also

$$m = \frac{m_x}{\sqrt{1-(v_x/c)^2}}\,. \tag{1a}$$

Für $x = h$ sei $v_x = 0$ und für $x = 0$ $v_x = v_0$. Für die Ruhemasse in der Höhe h ergibt sich dann

$$m_h = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} \tag{2}$$

wo m_o nun die Ruhemasse für $x = 0$, d. h. die Eigenmasse bedeutet. Hieraus berechnet sich die Fallgeschwindigkeit

$$v_0 = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m_h}\right)^2}. \tag{2a}$$

Die Zunahme der Ruhemasse, d. h. der potentiellen Masse mit der Höhe h lässt sich nach dem Äquivalenzsatz unmittelbar berechnen. Es ist

$$c^2\, dm_x = m_x\, g dx$$

was ergibt

$$m_h = m_0\, e^{\frac{gh}{c^2}}. \tag{3}$$

Dies in (2a) eingesetzt liefert für die Endgeschwindigkeit

$$v_o = c\sqrt{1 - e^{-\frac{2gh}{c^2}}}. \tag{4}$$

Zum gleichen Resultat gelangt man auch durch Ansetzen der aus (3) folgenden potentiellen Energie

$$E_p = c^2\, m_0 \left(e^{\frac{gh}{c^2}} - 1\right) \tag{5}$$

und durch Verwendung der bekannten Formel für die kinetische Energie

$$E_k = c^2\, m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} - 1\right) \tag{6}$$

indem man nach dem Energiesatz $E_p = E_k$ setzt. Für $2\,gh \ll c^2$ geht (4) in die Formel der klassischen Mechanik über:

$$v = \sqrt{2\,gh}.$$

Für $2\,gh \gg c^2$ nähert sich v der Geschwindigkeit c. Durch Integration von (4) erhält man den Fallraum als Funktion der Fallzeit. Die Durchrechnung führt zur Beziehung

$$h = \frac{c^2}{g} \ln \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}\right) \tag{7}$$

was sich kurz so schreiben lässt

$$h = \frac{c^2}{g} \ln \mathfrak{Cof}\, \frac{gt}{c}. \tag{7a}$$

Für $gt \ll c$, d. h. kurze Fallzeiten gelangt man wieder zur klassischen Formel des freien Falls

$$h = \frac{g}{2}\, t^2.$$

Für $gt \gg c$ geht andererseits (7) über in das lineare Gesetz

$$h = ct.$$

Die Differentiation von (7) liefert die Fallgeschwindigkeit als Funktion der Zeit

$$v = c\,\mathfrak{Tang}\,\frac{gt}{c}. \tag{8}$$

Dies geht für $gt \ll c$, bzw. $gt \gg c$ über in

$$v = gt \text{ bzw. } v = c.$$

Es hält nicht schwer, die entsprechenden Formeln auch unter Berücksichtigung, dass die Schwere mit der Höhe h abnimmt, aufzustellen. Setzt man

$$g_x = g_0 \left(\frac{R}{R+x}\right)^2, \tag{9}$$

wo R den Erdradius bedeutet, so erhält man

$$m_h = m_0\, e^{\frac{g_0 R h}{c^2 (R+h)}} \tag{10}$$

was sich für den Fall $h = \infty$ vereinfacht zu

$$m_\infty = m_0\, e^{\frac{g_0 R}{c^2}}. \tag{10a}$$

Für die Fallgeschwindigkeit ergibt sich

$$v_0 = c\sqrt{1 - e^{-\frac{2 g_0 R h}{c^2 (R+h)}}}$$

was zum Höchstwert führt

$$\overset{\infty}{v}_0 = c\sqrt{1 - e^{-\frac{2 g_0 R}{c^2}}}.$$

Diese Beziehung geht für $2\, g_0\, R \ll c^2$ in die klassische über:

$$\overset{\infty}{v}_0 = \sqrt{2\, g_0\, R}.$$

Eine weitere Durchrechnung dürfte sich nicht rechtfertigen, da in (9) Gebrauch vom Newtonschen Gravitationsgesetz gemacht ist, dessen Anwendung ja nach der allgemeinen Relativitätstheorie nur in erster Näherung zulässig ist. Ähnlich lässt sich auch der allgemeine Fall der Bewegung zweier sich anziehenden Körper auf Grund des Äquivalenzsatzes behandeln. Von einer Wiedergabe der Rechnung soll indessen aus dem gleichen Grunde Abstand genommen werden.

Bern, Physikalisches Institut der Universität.