Masse und Energie in der speziellen Relativitätstheorie

Autor(en): **Lämmel, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **12 (1939)**

Heft VI

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110951

Masse und Energie in der speziellen Relativitätstheorie

von **R. Lämmel.**

(26. VIII. 39.)

In der vorliegenden Arbeit wird die von der speziellen Relativitätstheorie geforderte Vermehrung der trägen Masse infolge ihrer Geschwindigkeit aus elementaren Betrachtungen geometrischer und mechanischer Art abgeleitet. Zum Unterschied von den bisher bekannten Ableitungen dieser Art wird hier von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Weltlinie des Schwerpunktes zweier Massenpunkte dieselbe objektive Bedeutung hat wie die Weltlinie eines Massenpunktes, und dass daher für erstere dasselbe Additionstheorem der Geschwindigkeiten Geltung haben müsse wie für letztere[1]).

Der Grundgedanke der speziellen Relativitätstheorie EINSTEINS aus dem Jahr 1905 ist der: Raum und Zeit sind nicht voneinander unabhängig und für sich bestehend, sondern sie hängen derart miteinander zusammen, dass die Geschwindigkeit der Ausbreitung des Lichtes für alle relativ zueinander in Bewegung befindliche Beobachter gleich gross wird. Die Unveränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit ist zugleich die experimentell erwiesene Voraussetzung für ein neues mechanisches Begriffssystem. Dieses hat sich aber nicht unmittelbar entwickelt, sondern es entstand auf einem Umweg, nämlich aus Betrachtungen über elektrodynamische Vorgänge.

LEWIS und TOLMAN[2]) haben schon 1909 versucht, einen Weg zu finden, der die mechanischen Folgerungen aus jener Voraussetzung auf einem rein mechanischen Weg ergibt. Sie benützten dabei das Einsteinsche Additionstheorem sowie die Erhaltungssätze für Impuls und kinetische Energie beim elastischen Stoss.

Man kann aber aus elementaren Betrachtungen mechanischer und geometrischer Art sowohl die Vermehrung der trägen Masse infolge ihrer Geschwindigkeit, als auch unabhängig davon das Additionstheorem der Geschwindigkeiten herleiten, ohne die Erhaltungssätze zu benützen, wenn man den Schwerpunkt einführt.

---

[1]) Die Verantwortung für ihre Mitteilung tragen die Autoren selber.

[2]) G. N. LEWIS und C. TOLMAN Phil. Mag. 18 (1909). Eine ähnliche Ableitung stammt von P. LANGEVIN, ist aber nicht veröffentlicht worden. Herr A. EINSTEIN teilte sie mir mit. LANGEVIN verwendet eine Funktionalgleichung. Vrgl. hierzu das Zitat bei A. EINSTEIN, Vier Vorlesungen über Rel. Th., Braunschweig 1922, Seite 31.

Wir gehen vom gravitationslosen Stoss aus, der für unser mechanisches Denken immer noch eine Art Ur-Phänomen darstellt, obgleich der makroskopische Stossvorgang eine Integralerscheinung vorstellt, deren Differentialphänomen (Molekülstösse und Atom-Stösse) gänzlich ausserhalb unserer täglichen Erfahrung liegt. Wir werden durch ein Gedankenexperiment mit ideal elastischen Kugeln nur zu einer provisorischen Orientierung gelangen können, da die wirkliche Materie wegen der an den Stossflächen auftretenden Molekularkräfte sich anders verhält als eine ideale kompakte elastische Kugel. Mit dieser Reservation wollen wir uns einen vollkommen elastischen idealen Stoss zweier gleich grosser Massen vorstellen, der unserer Betrachtung zugrunde gelegt werde.

In der Newtonschen Mechanik spielt der Schwerpunkt zwischen Massen eine wichtige Rolle. Er ist so etwas wie ein Repräsentant der beiden Massen. Haben die beiden Massen eine Relativbewegung zueinander, dann bewegt sich auch ihr Schwerpunkt. Es ist in unserem Gedankenexperiment nur die Trägheit, nicht die Gravitation im Spiel.

Nimmt man an, dass die Masse A sich mit der Geschwindigkeit p nach rechts gegen die Masse B zu bewegt, die selber in Ruhe bleiben möge, dann bewegt sich bei gleich grossen Massen A und B der in der Mitte von A—B befindliche Schwerpunkt S mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\, p$ nach rechts. So erscheint die Bewegung von A und von S in der klassischen Physik.

Führen wir nun den Grundgedanken der Einsteinschen Relativitätstheorie, die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, in die Betrachtung ein. Wir nehmen an, dass der Schwerpunkt der beiden bewegten Körper A und B, S, sein eigenes Koordinatensystem mit sich nimmt. Wählen wir das Koordinatensystem derart, dass die horizontale Achse x den Weg darstellt und weiterhin die drei räumlichen Koordinaten überhaupt symbolisiert, die zu einer linearen Welt zusammengelegt sind. Die senkrechte Achse u messe die mit der Lichtgeschwindigkeit multiplizierte Zeit, also $c \cdot t$. Fig. 1 zeigt uns diese Verhältnisse in der Gedankenwelt der Newtonschen Mechanik. Die Weltlinie von A ist die neue Raum-Achse. Die alte x-Achse ist auch die neue x-Achse. Die Zeitkoordinate bleibt unverändert bestehen, $u' = u$.

Nach Annahme des Einsteinschen Grundsatzes kann diese Figur nicht mehr aufrecht erhalten werden. Mit einer Veränderung der u-Achse muss zugleich auch eine Veränderung der x-Achse verbunden sein derart, dass die Gleichung für den von A ausgehenden Lichtstrahl in beiden Systemen dieselbe Geschwindigkeit c ergibt. Das ist erfüllt (Fig. 2), wenn die neue u-Achse u'

mit der alten u-Achse denselben Winkel ω bildet, wie die neu zu errichtende x-Achse, x', mit der alten x-Achse einschliesst. Denn nun lautet die Gleichung der Medianen in beiden Systemen $u = x$, resp. $u' = x'$, oder $x = c \cdot t$ und $x' = c \cdot t'$.

In der Newtonschen Mechanik bewegt sich der Schwerpunkt S bei ruhendem B und bewegtem A derart nach rechts, dass er immer die Mitte von A—B bildet und die halbe Geschwindigkeit von A

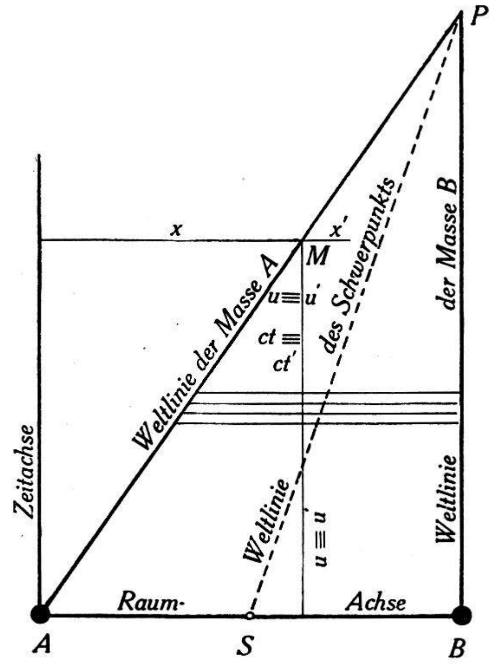

Fig. 1.
Der Stoss-klassisch.

Masse A = Masse $B = 1$ Distanz $AB = 1$ A bewegt sich, B ruht; S ist die Mitte von A—B; in P erfolgt der Stoss, dessen Ablauf nicht dargestellt ist. Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts ist $v = \frac{1}{2}\,p$. M....eine beliebige Station des beweglichen Körpers A im Moment u im Raumpunkt x, der im Schwerpunktsystem die Koordinaten x' und $u' \equiv u$ hat. In der klassischen Mechanik bedingt die Transformation der räumlichen Koordinaten keine Transformation der Zeit.

hat. Wir nehmen nun an, dass für den Schwerpunkt die gleichen Überlegungen gelten, wenn wir die Vorstellungen der Relativitätstheorie zur Anwendung bringen, wie für eine realen materiellen Punkt. Wir legen durch den Schwerpunkt zweier gleich grosser Massen $A = 1$ und $B = 1$, also durch den Punkt S der Fig. 2 eine Weltlinie $SS'P$, die mit der Weltlinie BP von B den Winkel ω bildet. Durch A ziehen wir die neue Zeitachse parallel zu SP und ferner die neue X-Achse x' derart, dass den (nicht gezeichneten) Medianen in beiden Systemen die Geschwindigkeit c zukommt. Es muss also der Winkel BAB' gleich dem Winkel BPS sein. Ein solcher Winkel existiert für jede Unterlichtgeschwindigkeit.

Die Tangente v dieses Winkels gibt uns die Geschwindigkeit des Schwerpunkts relativ zu B an. Im bewegten System, das mit dem Schwerpunkt geht, soll nun dieser Schwerpunkt auch immer die Mitte von A und B sein. Das stellen wir als Postulat auf. Für einen mit dem Schwerpunkt gehenden Beobachter sollen also die beiden Massen A und B gleich bleiben. Ein Blick auf Fig. 2 zeigt, dass dann für einen nicht mitbewegten Beobachter, der z. B. mit B ruht, der Punkt S, durch den die Weltlinie des Schwerpunkts geht, nicht mehr die Mitte von A—B sein kann. Wenn also eine der beiden gleich grossen Massen A und B bewegt ist, so erscheint von A wie von B aus der Schwerpunkt nicht in der Mitte von AB. Das ist eine fundamentale Erkenntnis.

Man kann den Betrag der Abweichung des Punktes S von der Mitte von A—B leicht trigonometrisch finden. Dazu rechnen wir zunächst den Wert von v aus. Bei einer gegebenen Situation A—B—P gibt es immer einen Winkel ω, der die Bedingung erfüllt, dass auf ihm S' genau die Mitte von A—B' bildet. Im Dreieck $AB'P$ ist PS' die Schwerlinie, sie teilt den Winkel durch den sie läuft, derart, dass sich die Sinusse dieser Teilwinkel umgekehrt wie die anliegenden Seiten verhalten. Es ist also

$$\frac{\sin\,(\omega' - \omega)}{\sin\,\omega} = \frac{1/p - v}{1/p \cdot \sqrt{1 + p^2}}$$

$$p = \operatorname{tg}\,\omega' \qquad v = \operatorname{tg}\,\omega\,.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\sin\,\omega'\,\cos\,\omega - \cos\,\omega'\,\sin\,\omega}{\sin\,\omega} = \frac{1 - p\,v}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$\sin\,\omega' \cdot \cot\,\omega - \cos\,\omega' = \frac{1 - p\,v}{\sqrt{1 + p^2}}\,.$$

Drückt man die Winkelfunktionen in p und v aus, so wird schliesslich

$$p\,v^2 - 2\,v + p = 0\,.$$

Daraus ergibt sich der Wert von v:

$$v = \frac{1}{p} \cdot (1 - \sqrt{1 - p^2})\,. \tag{1}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, so ergibt eine leichte Umformung für kleine p folgenden Wert:

$$v = {}^1\!/_2\,p + {}^1\!/_8\,p^3 - + \ldots$$

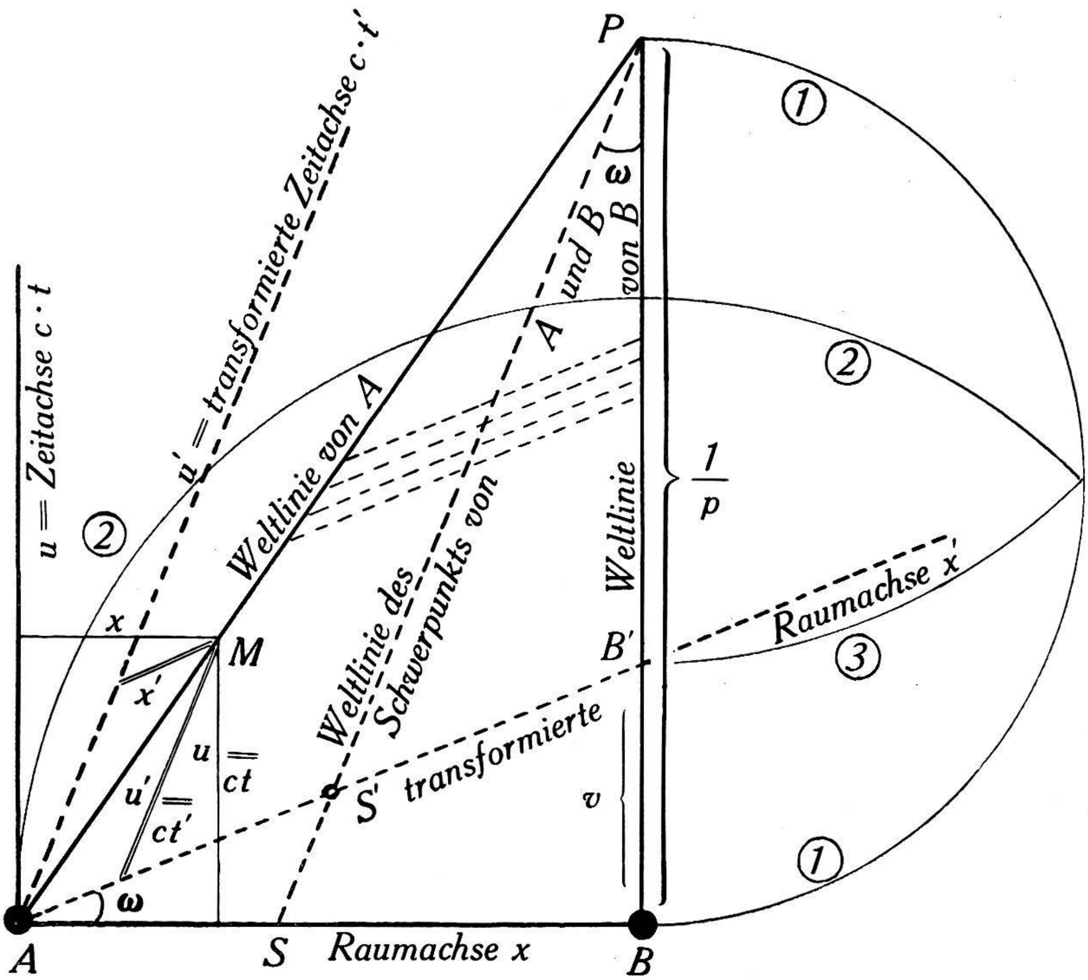

Fig. 2.

Der Stoss-relativistisch. Konstruktion der Schwerpunktsgeschwindigkeit $= v$.

1) im System B: Geschwindigkeit von $A = p$
„ „ $B = o$
im System S': „ „ $A = v$.

2) Damit $AS' = S'B'$ sei, müssen die Massen A und B das Verhältnis $1 : \sqrt{1-p^2}$ zeigen.

S' ist Mitte für $A' - B'$
S ist nicht Mitte für $A—B$

3) Die Nummern (②) geben die Reihenfolge an, in der die Bögen zu konstruieren sind, um zur Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{p}\left(1 - \sqrt{1-p^2}\right)$$

zu gelangen. Es wird ① von der Mitte von BP aus, ② von B aus, ③ von P aus konstruiert. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist approximativ für kleine p

$$v = \tfrac{1}{2}\, p + \tfrac{1}{8}\, p^3 \ldots\ldots$$

4) M ist eine beliebige Station der Bewegung von A.

Man sieht nun, dass v nicht mehr die Hälfte von p ist, sondern etwas grösser. Die Geschwindigkeiten v und p sind in diesen Formeln als Bruchteile der Lichtgeschwindigkeit zu verstehen. Bewegt sich ein Körper gegen einen anderen von gleicher Masse mit der Geschwindigkeit $p = 0{,}8$, so nähert sich der Schwerpunkt A—B dem Teilchen B mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}4 + {}^1/_8 \cdot 0{,}512 = 0{,}464$, wobei die Lichtgeschwindigkeit c die Einheit ist.

In Fig. 2 ist $AS' = S'B$, daher ist AS kleiner als SB. Wir suchen nun das Verhältnis dieser beiden Entfernungen. Da $SB = BP \cdot \operatorname{tang} \omega$ ist, so folgt $SB = v:p$. Wir haben die Entfernung $AB = 1$ gesetzt, daher wird $AS = 1 - v:p$ und das Verhältnis hat den Wert

$$\frac{AS}{SB} = \frac{1 - v/p}{v/p} = \frac{p - v}{v}.$$

Setzen wir hier den Wert von v aus Gleichung (1) ein, so folgt

$$\frac{AS}{SB} = \frac{p - 1/p \cdot (1 - \sqrt{1 - p^2}}{1/p \cdot (1 - \sqrt{1 - p^2})}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich leicht umformen, und man findet

$$\frac{AS}{SB} = \sqrt{1 - p^2}. \tag{2}$$

Der Schwerpunkt erscheint nach links verschoben. Demnach ist die Masse A grösser geworden als $= 1$. Der Betrag der Vergrösserung ergibt sich aus der Bemerkung, dass AS mal der Masse A gleich sein muss BS mal der Masse B. Wenn beide Massen ruhen, sind sie beide gleich 1. Bewegt sich A gegen B, so wächst demnach A auf den Betrag

$$A' = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2}} \text{ (Ruhemasse} = 1) \tag{3}$$

an. Damit ist eine rein mechanisch-geometrische Herleitung der Massenformel gegeben. Es handelt sich dabei um die träge Masse. Von Kräften ist nicht die Rede.

Aus der Fig. 2 ist auch das Additionsgesetz ohne weiteres abzulesen. Die Geschwindigkeit p' von A relativ zum Schwerpunkt S, die in der Newtonschen Mechanik $= {}^1\!/_2\, p$ sein muss, findet sich als das Verhältnis von Weg zur Zeit $= AS' : S'P$, wofür man nach dem Sinussatz der Trigonometrie erhält (Fig. 3):

$$p' = \frac{AS'}{S'P} = \frac{\sin(\omega_1 - \omega)}{\sin(90 - \omega_1 - \omega)}.$$

Formt man die Funktionen um und beachtet, dass tg $\omega' = p$ und tg $u = v$ ist, so wird

$$p' = \frac{p - v}{1 - pv} \tag{4}$$

(p, v, p' sind in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeiten gegeben.)

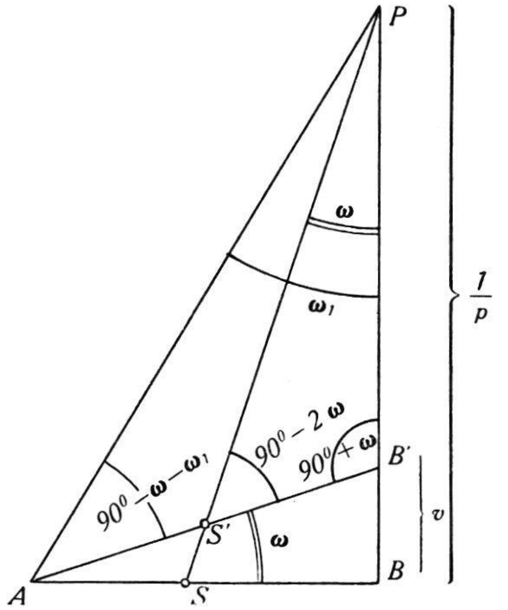

Fig. 3.

Geometrische Ableitung des Additionstheorems der Geschwindigkeiten.

Geschwindigkeit von S im System B.... $v = \text{tg}\,\omega$

„ „ A „ „ „.... $p = \text{tg}\,\omega$,

„ „ A „ „ S' $p' = \frac{AS'}{S'P}$

Es ist im $\Delta\, AS'\, P$:

$$p' = \frac{si\,(\omega_1 - \omega)}{co\,(\omega_1 + \omega)} = \frac{si\,\omega_1 \cdot co\,\omega - co\,\omega_1 \cdot si\,\omega}{co\,\omega_1 \cdot co\,\omega - si\,\omega_1 \cdot si\,\omega}$$

$$p' = \frac{\text{tg}\,\omega_1 - \text{tg}\,\omega}{1 - \text{tg}\,\omega_1 \cdot \text{tg}\,\omega} = \frac{p - v}{1 - pv}$$

d. h. das Additionstheorem ist identisch mit dem physikalisch interpretierten Sinussatz im $\Delta\, AS'P$.

Um den Kraftbegriff einzuführen, gehen wir von der Impulsdefinition aus: wir nennen die zeitliche Ableitung des „Impulses“ mp, den die bewegte Masse m bei der Geschwindigkeit p besitzt, die in der Richtung von p „wirkende Kraft“.

$$J = mp = \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

Es folgt dann:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(1 - p^2)^3}} \cdot \frac{dp}{dt} = \text{Kraft}. \tag{5}$$

Halten wir an der klassischen Vorstellung fest, dass das Verhältnis zwischen einer wirkenden Kraft und der am Körper hervorgebrachten Beschleunigung (dp/dt) die Masse des bewegten Körpers sein soll, so folgt hier für diese Masse der Ausdruck

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{(1-p^2)^3}} \tag{6}$$

(m_0 = die Masse im Ruhezustand.)

Man kann den Unterschied zwischen den Formeln (3) und (6) so deuten: der aktive Trägheitswert eines bewegten Körpers, der das „Beharren" auf einer konstanten Geschwindigkeit bedingt, ist kleiner als der passive Widerstand des gleichen Körpers, der gegenüber einer Geschwindigkeitsveränderung, das ist also gegenüber einer Krafteinwirkung, ausgelöst wird.

Dass gegenüber einer senkrecht zur Geschwindigkeit wirkenden Kraft keine solche zusätzliche Vergrösserung der bewegten Masse eintritt, kann man folgendermassen einsehen. In erster Annäherung sind die Bedingungen eines horizontalen Wurfes gegeben, der Körper bewegt sich in der Richtung seiner Geschwindigkeit im ersten Moment unbeeinflusst weiter. Die sogenannte transversale Masse ist also die Masse, die der Körper infolge seiner Geschwindigkeit hat, gemäss Formel (3).

Das Wesen der mechanischen Arbeit ist Veränderung. Bei der Berechnung der Arbeit muss also von jener Masse ausgegangen werden, die gegenüber einer Geschwindigkeitsänderung ins Spiel kommt, die wir passiv genannt haben, nach Formel (6). Im Übrigen ist die nachfolgende Formel nicht als die Wiedergabe eines Naturgesetzes zu verstehen, sondern lediglich als der mathematische Ausdruck einer willkürlichen zweckmässigen Definition:

$$\text{Arbeit} = \int \text{Impuls} \cdot dp = \int m' p \cdot dp$$

$$L = \int \frac{m_0}{\sqrt{1-p^2}} \cdot p \cdot dp\,.$$

Man findet so den Wert

$$L = \frac{m_0}{\sqrt{1-p^2}}\,. \tag{7}$$

Die gleiche Grösse ergibt sich, wenn man von der Definition Arbeit = Kraft mal Weg ausgeht und für die Kraft den Betrag aus der Formel (5) einsetzt:

$$L = \int K \cdot ds = \int \frac{1}{\sqrt{(1-p^2)^3}} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot ds$$

$$= \int \frac{p}{\sqrt{(1-p^2)^3}} \cdot dp = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\,.$$

Indem wir die Integrationskonstante gleich Null setzen, verfügen wir über eine Initialbedingung und geben der Masse *eins* den Ruhe-Energiebetrag *eins*, wie man sieht, wenn $p = o$ gesetzt wird. Entwickeln wir (7) so wird die Energie angenähert

$$L = 1 + \tfrac{1}{2}\, p^2 + \tfrac{3}{8}\, p^4 \ldots = 1 + \tfrac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \tfrac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} \ldots .$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $m_0 \cdot c^2$ und bezeichnen wir $L \cdot m_0 \cdot c^2$ mit E, so ist

$$E = m_0\, c^2 + \tfrac{1}{2}\, m_0\, v^2 + \tfrac{3}{8}\, v^4 \cdot \frac{1}{c^2} + \cdots . \tag{8}$$

In dieser Formel erscheint die klassische relative kinetische Energie $\frac{1}{2}\, m_0\, v^2$ in der in der Mechanik üblichen Weise gemessen, daher stellt das erste Glied $m_0 c^2$ die in erg gemessene Energie der Masse m_0 vor, die ihr ohne Rücksicht auf eine Relativgeschwindigkeit zukommt. — Da auch in neueren Lehrbüchern[1]) angegeben ist, dass sich diese Formeln für die Masse und die Energie nur auf dem Umweg über die Elektrodynamik finden lassen, so teile ich hier die elementare Herleitung mit.

[1]) Z. B. Westphal, Lehrbuch der Physik, Berlin 1937, Seite 535.