Über den Drehimpuls von Teilchen mit Ruhemasse null und beliebigem Spin

Über den Drehimpuls von Teilchen mit Ruhemasse null und beliebigem Spin

von **Markus Fierz.**

(30. XI. 39.)

Zusammenfassung: Die Theorie für Wellenfelder, die Teilchen mit dem Spin $f \geqslant 1$ und Ruhemasse null zugeordnet sind, muss als ausgearteter Grenzfall der Theorie für Teilchen mit endlicher Ruhemasse gelten. Die Ausartung äussert sich im Auftreten einer Eichgruppe. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass die Ausartung weiter zur Folge hat, dass ein derartiges Wellenfeld, falls nur ein einziges Feldquant vorhanden ist, stets einen Drehimpuls $j \geqslant f$ besitzt. Dieser Satz wird dadurch bewiesen, dass die Differentialgleichungen des Feldes durch Kugelwellen gelöst werden, die zu eichinvarianten Feldgrössen Anlass geben und die sich bei räumlichen Drehungen um den Ursprung nach einer irreduciblen Darstellung ϑ_j der Drehgruppe transformieren. Dabei zeigt sich, dass $j \geqslant f$ sein muss. Zu vorgegebenem $j \geqslant f$ gibt es noch 2 Scharen von je $2j+1$ linear unabhängigen Kugelwellen.

In einer früheren Arbeit[1]) über relativistische Wellengleichungen kräftefreier Teilchen wurde kurz auf die Ausartung der Theorie hingewiesen, die eintritt, wenn die Ruhemasse der Teilchen null gesetzt wird. In diesem Falle existieren nämlich Lösungen der Feldgleichungen, für die Energie, Impuls und Drehimpuls verschwinden und die deshalb wohl keine physikalische Bedeutung haben. Damit hängt das Auftreten einer sog. „Eichgruppe" eng zusammen: Zu jeder Lösung der Feldgleichungen kann eine Lösung die zur Energie null gehört hinzuaddiert werden, ohne die physikalischen Grössen Energie, Impuls und Drehimpuls zu ändern. Betrachtet man Lösungen, die durch „Umeichen" ineinander übergehen als gleichwertig, so existieren zu vorgegebener Frequenz und Wellenzahl nur zwei linear unabhängige, inäquivalente Lösungen. Beim Licht ist dieses Verhalten bekannt: Die beiden linear unabhängigen Polarisationszustände einer ebenen Welle sind hier z. B. die rechts und die links zirkular polarisierte Welle. Longitudinale Lichtwellen gibt es nicht, bzw. sie haben die Energie null. Ein Strahl rechts oder links zirkularen Lichtes der Frequenz ω, d. h. ein Wellenpaket kleiner Winkeldivergenz, trägt einen Drehimpuls in seiner Bewegungsrichtung der Grösse $\pm E/\omega$ wenn E die im Wellenpaket enthaltene Energie bedeutet. Man kann cum grano salis dies Verhalten dahingehend beschreiben, dass man sagt, der Spin des Lichtquants sei stets parallel oder antiparallel zu seiner Bewegungsrichtung eingestellt[2]). Eine strenge Formulierung des Sachverhaltes folgt aus der bekannten Auswahlregel, die besagt, dass bei Emission eines Lichtquants Übergänge $j = j' = 0$ des emittierenden Systems nicht vorkommen. Für das Licht gilt deshalb der Satz: Der Drehimpuls eines einzigen Lichtquants ist niemals null[3]). Für vorgegebene Frequenz und vorgegebenen Gesamtdrehimpuls $j \geqslant 1$ gibt es noch zwei linear unabhängige Scharen von je $2j+1$ Kugelwellen, die der Strahlung eines elektrischen und eines magnetischen 2^j-Pols entsprechen[4]). In dieser Arbeit wollen wir zeigen, dass im Falle beliebigen Spins f und Ruhemasse null der analoge Satz gilt:

Der Drehimpuls eines einzigen Feldquants ist stets grösser oder gleich f:

$$j \geqslant f$$

Zu vorgegebener Frequenz ω und vorgegebenem $j \geqslant f$ gibt es zwei linear unabhängige Scharen von je $2j+1$ Kugelwellen, die sich bei Drehungen um den Ursprung untereinander nach der Darstellung ϑ_j der Drehgruppe transformieren.

Als Beispiel eines Feldes mit Spin > 1, für das unser Satz Geltung hat, wäre das Gravitationsfeld zu nennen, das zum Spin 2 gehört[5]). Die Emission von Gravitationswellen ist jedoch ein so schwacher Effekt, dass sich die, gemäss obigem Theorem dabei geltenden Auswahlregeln experimentell nicht prüfen lassen. Trotzdem scheint uns der Satz rein theoretisch genügend bemerkenswert, nicht zuletzt wegen seines Zusammenhangs mit der Eichgruppe, um näher darauf einzutreten.

Wir müssen also zeigen, dass der Drehimpuls dem Betrage nach stets grösser oder mindestens gleich dem Spin f ist, falls nur ein Feldquant vorhanden ist. Zu diesem Zweck gehen wir so vor: Wir wollen zeigen, dass der Drehimpulsoperator in der q-Zahl-Theorie gleich dem Operator der infinitesimalen Drehungen ist. Nun muss man beachten, dass im Falle des Vorhandenseins nur eines Quants, die q-Zahl-Theorie äquivalent der Matrixtheorie eines Einkörperproblems ist. Jeder Operator der q-Zahltheorie kann auf die Form

$$O = \sum_{m,n} a_n^* O_{nm} a_m$$

gebracht werden, wobei a_n^*, a_m die quantisierten Amplituden der Eigenzustände sind, welche den Vertauschungs-Relationen

$$[a_n, a_m^*] = \delta_{nm}$$

genügen. $O_{n\,m}$ ist das Matrixelement des Operators nach den Eigenzuständen n, m. Falls nur im Zustand n_0 ein Teilchen sitzt, ist der Erwartungswert des Operators O das Diagonalelement $O_{n_0\,n_0}$:

$$\overline{\sum_{n,l} a_n^* O_{n\,l}\, a_l} = O_{n_0\,n_0}$$

denn es ist $\overline{a_n^*\, a_l} = \delta_{n\,l}\, a_n^* a_n$ und weiter

$$a_n^*\, a_n = 0 \quad \text{für } n \neq n_0, \quad 1 \text{ für } n = n_0 .$$

Der Erwartungswert des Produktes zweier Operatoren O und P wird

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} \sum_{n,m} \overline{a_n^* P_{nm}\, a_m\, a_l^* O_{lk}\, a_k} &= \sum_{n \neq l} a_n^* P_{nl}\, a_l\, a_l^* O_{ln}\, a_n \\ &\quad + \sum_n a_n^* P_{nn}\, a_n\, a_n^* O_{nn}\, a_n \\ &= \sum_{l \neq n} a_n^* a_n\, a_l\, a_l^* P_{nl} O_{ln} + P_{n_0 n_0} O_{n_0 n_0} \end{aligned}$$

nun ist

$$a_n^*\, a_n = \delta_{n\,n_0}, \quad a_l\, a_l^* = 1 + \delta_{n_0\,l} .$$

Wir erhalten daher

$$\overline{P\,O} = \sum_l P_{n_0\,l} O_{l\,n_0} .$$

Für den Operator der Infinitesimalen Drehungen folgt hieraus, dass, falls nur ein Eigenzustand angeregt ist, der sich nach der irreduziblen Darstellung ϑ_j der Drehgruppe transformiert, das Quadrat dieses Operators $j(j+1)$ beträgt. Wir werden nun im folgenden zeigen, dass der Drehimpuls gleich dem Operator der infinitesimalen Drehungen der eichinvarianten Grössen ist und dass die bei Drehungen irreduziblen Lösungen sich nach Darstellungen mit $j \geqq f$ transformieren. Also ist auch der Drehimpuls stets grösser oder gleich f.

1. Die Wellengleichungen und der Drehimpuls.

Wir wollen im folgenden den Spinorkalkül von VAN DER WAERDEN[6]) benützen. Die Gleichungen für ganzzahligen Spin f lauten dann

$$\square\, a^{\dot\lambda\dot\mu\ldots}_{\alpha\beta\ldots} = 0 \tag{1}$$

$$p^{\dot\lambda}_{\alpha}\, a^{\alpha\dot\mu\ldots}_{\dot\lambda\beta\ldots} = 0 \tag{2}$$

$a^{\dot\lambda\dot\mu}_{\alpha\beta}$ ist ein Spinor mit f punktierten und f unpunktierten Indices. In beiden Indexsorten ist er symmetrisch. Bei Spiegelungen geht $a^{\dot\lambda\dot\mu}_{\alpha\beta}$ in sich über. Die Gleichung (1) kann aus der Lagrangefunktion

$$L = p^{\beta}_{\dot\alpha}\, a^{*\,\gamma\delta\ldots}_{\dot\sigma\dot\varrho\ldots}\, p^{\dot\alpha}_{\beta}\, a^{\dot\sigma\dot\varrho\ldots}_{\gamma\delta\ldots} \tag{3}$$

durch Variation gemäss $\delta \int L\, d^4 x = 0$ hergeleitet werden. Die Gleichung 2) ist dann als Nebenbedingung hinzuzufügen und hat zur Folge, dass die Energie des Feldes stets positiv bleibt.

In (A) wurde gezeigt, dass Lösungen der Gleichungen (1) (2) existieren, deren zugehörige Energie verschwindet. Diese Felder haben die Gestalt

$$n_{\alpha\beta\ldots}^{\dot\mu\dot\lambda\cdots} = p_\alpha^{\dot\mu}\, c_{\beta\ldots}^{\dot\lambda\cdots} + p_\alpha^{\dot\lambda}\, c_{\beta\ldots}^{\dot\mu\cdots} + \cdots + p_\beta^{\dot\mu}\, c_{\alpha\ldots}^{\dot\lambda\cdots} + \cdots \tag{4}$$

Dabei hat $C_{\beta\ldots}^{\dot\mu\cdots}$ $f-1$ punktierte und $f-1$ unpunktierte Indices, in denen es symmetrisch ist. Es genügt den Gleichungen

$$\Box\, c_{\beta\ldots}^{\dot\lambda\cdots} = 0\,,\ \ p_{\dot\lambda}^{\beta}\, c_{\beta\ldots}^{\dot\lambda\cdots} = 0\,. \tag{4'}$$

Falls man zu $a_{\alpha\,\beta\ldots}^{\dot\lambda\,\dot\mu\cdots}$ ein Feld der Form (4) hinzuaddiert, so ändert sich die Lagrangefunktion um ein vollständiges Differential, die Energie bleibt invariant. Wir heissen die Transformation

$$a'^{\dot\mu\dot\lambda\cdots}_{\alpha\beta\ldots} = a^{\dot\mu\dot\lambda\cdots}_{\alpha\beta\ldots} + n^{\dot\mu\dot\lambda\cdots}_{\alpha\beta\ldots} \tag{5}$$

in Analogie zur Maxwellschen Theorie, Eichtransformation. Grössen, die bei der Transformation (5) ungeändert bleiben, heissen eichinvariant. Durch Differentiation können wir aus $a_{\gamma\delta\ldots}^{\dot\alpha\dot\beta\cdots}$ weitere Feldgrössen bilden:

$$\left.\begin{aligned} p^{\gamma\dot\lambda}\, a_{\gamma\alpha\ldots}^{\dot\mu\dot\nu\cdots} &= b_{\alpha\ldots}^{+\dot\lambda\dot\mu\dot\nu\cdots}; \quad & p_{\varrho\dot\lambda}\, a_{\alpha\beta\ldots}^{\dot\lambda\dot\nu\cdots} &= b_{\varrho\alpha\beta\ldots}^{-\ \ \dot\nu\cdots} \\ p_{\dot\lambda\varrho}\, b_{\alpha\ldots}^{+\dot\lambda\dot\mu\dot\nu\cdots} &= 0; & p^{\varrho\dot\nu}\, b_{\varrho\alpha\beta\ldots}^{-\ \ \dot\mu\cdots} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Durch f-maliges Differenzieren lassen sich aus $a_{\alpha\beta\ldots}^{\dot\mu\dot\lambda\cdots}$ Grössen bilden, die nur punktierte oder nur unpunktierte Indices enthalten in denen sie symmetrisch sind:

$$\left.\begin{aligned} B^{+\dot\lambda_1\cdots\dot\lambda_{2f}} &= p^{\dot\lambda_{f+1}\alpha_1}\cdots p^{\dot\lambda_{2f}\alpha_f}\, a_{\alpha_1\ldots\alpha_f}^{\dot\lambda_1\cdots\dot\lambda_f} \\ B^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} &= p_{\dot\lambda_1\alpha_{f+1}}\cdots p_{\dot\lambda_f\alpha_{2f}}\, a_{\alpha_1\ldots\alpha_f}^{\dot\lambda_1\cdots\dot\lambda_f} \end{aligned}\right\} \cdot \tag{7}$$

$$p_{\varrho\dot\lambda_1}\, B^{+\dot\lambda_1\cdots\dot\lambda_{2f}} = 0\,,\ \ p^{\alpha_1\dot\lambda}\, B^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} = 0 \tag{7'}$$

B^+ und B^- sind eichinvariante Feldgrössen. Eichinvariant sind weiter die Integrale der Bewegungsgleichungen, insbesondere Energie, Impuls und Drehimpuls, die wie folgt zu definieren sind[7]):

$$\left.\begin{aligned} \text{Energie} = E &= \int \Big(L - \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot Q_\alpha}\, \dot Q_\alpha\Big)\, dV \\ \text{Impuls} = p_k &= -\sum_\alpha \int \frac{\partial L}{\partial \dot Q_\alpha}\, \frac{\partial Q}{\partial x_k}\, dV \\ \text{Drehimpuls} = P_{ik} &= -\sum_\alpha \int \frac{\partial L}{\partial \dot Q_\alpha}\, (\delta^*_{ik}\, Q_\alpha)\, dV\,. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Die Q_α sind hierbei die Grössen

$$a^{\lambda_1 \ldots \lambda_f}_{\alpha_1 \ldots \alpha_f}, \quad a^{*\alpha_1 \ldots \alpha_f}_{\lambda_1 \ldots \lambda_f}; \quad \dot{Q}_\alpha \text{ ist gleich } \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t}.$$

δ^*_{ik} im Drehimpuls ist der Operator der infinitesimalen Drehung. Es ist

$$\delta^*_{ik} = -\delta^*_{ki};$$

δ^*_{ik} ist deshalb im Spinorkalkül durch einen symmetrischen Spinor zweiter Stufe darstellbar. Um diesen Operator angeben zu können, ist es bequem, die Zeit vor dem Raume auszuzeichnen, d. h. wir wollen nur noch Invarianz der Gleichungen bei räumlichen Drehungen verlangen. Bei Drehungen transformieren sich die Grössen $(v^{\dot{1}}, v^{\dot{2}})$ wie (u_1, u_2). Indem wir eine bestimmte Zeitkoordinate wählen, die wir ein für allemal festhalten, schreiben wir für

$$a^{\dot{\lambda}_1 \ldots \dot{\lambda}_f}_{\alpha_1 \ldots \alpha_f} \sim a_{\alpha_1 \ldots \alpha_f,\, \lambda_1 \ldots \lambda_f}.$$

An Stelle des Operators $i\, p^{\beta}_{\dot{\lambda}}$ tritt dann

$$\begin{aligned} i\, p^{\beta}_{\dot{\lambda}} &= d^{\lambda\beta} + \varepsilon^{\lambda\beta} \frac{\partial}{\partial t} \\ i\, p^{\dot{\lambda}}_{\beta} &= -d_{\lambda\beta} + \varepsilon_{\lambda\beta} \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \tag{9}$$

Dabei ist

$$d^{\beta}_{\alpha} = \sum_{k=1}^{3} \sigma^{k,\beta}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_k}; \qquad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1.$$

Die $\sigma^{k,\beta}_{\alpha}$ sind die Matrizen

$$(\sigma^{1,\beta}_{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma^{2,\beta}_{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma^{3,\beta}_{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Es ist also z. B. $\sigma^{2,2}_{1} = -i$. $d_{\alpha\beta}$ ist ein symmetrischer Spinor. Es gilt

$$d^{\lambda}_{\varrho}\, d^{\mu}_{\lambda} = \delta^{\mu}_{\sigma} \Delta. \tag{11}$$

Der Aufteilung eines Spinors $a^{\dot{\alpha}}_{\beta}$ in räumliche und zeitliche Komponenten entspricht demnach die Aufspaltung von $a_{\beta,\alpha}$ in einen symmetrischen und einen schiefen Teil.

In dieser drehinvarianten, aber nicht Lorentz-invarianten

Schreibweise ist der Operator der infinitesimalen Drehung gegeben durch

$$\delta^*_{\mu\nu} a_{\alpha\beta\ldots} = [(x_{\mu\tau} d^\tau_\nu + x_{\nu\tau} d^\tau_\mu) a_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\mu} a_{\nu\beta\ldots} + \varepsilon_{\alpha\nu} a_{\mu\beta\ldots} + \cdots \\ + \varepsilon_{\beta\mu} a_{\nu\alpha\ldots} + \varepsilon_{\beta\nu} a_{\mu\alpha\ldots} + \ldots] \tag{12}$$

$\delta^*_{\mu\nu}$ ist mit $d_{\alpha\beta}$ vertauschbar, wie man leicht nachrechnet, falls man benützt, dass die folgende Identität gilt:

$$d_{\alpha\beta} x_{\sigma\varrho} = \varepsilon_{\alpha\sigma} \varepsilon_{\varrho\beta} + \varepsilon_{\alpha\varrho} \varepsilon_{\sigma\beta}.$$

2. Zusammenhang des Drehimpulses mit den infinitesimalen Drehungen.

Wir wollen nun zeigen, dass der Drehimpuls, falls man die Theorie quantisiert, der Operator der infinitesimalen Drehung der eichinvarianten Grössen ist, dass also gilt:

$$i[P_{\mu\nu}, B^\pm_{\alpha\beta\ldots}] = \delta^*_{\mu\nu} B^\pm_{\alpha\beta\ldots} \tag{13}$$

wo, wie stets $[A, B] = AB - BA$ gesetzt ist.

Nun ist der Drehimpuls gemäss (8) durch die nicht eichinvarianten $a^{\mu\dot{\nu}\ldots}_{\alpha\beta\ldots}$ ausgedrückt. Eindeutige V. R. existieren jedoch nur für die eichinvarianten Grössen $B^{+\dot{\lambda}_1\ldots\dot{\lambda}_{2f}}$ und $B^-_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}$. Diese wurden in (A) angegeben und lauten

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{i}[B^{+*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(x), B^+_{\dot{\iota}_1\ldots\dot{\iota}_{2f}}(x')] = \frac{1}{(2f)!}\sum_{(\alpha_i)} p_{\alpha_1\dot{\iota}_1}\ldots p_{\alpha_{2f}\dot{\iota}_{2f}} D(x-x') \\
&\frac{1}{i}[B^{-*}_{\dot{\iota}_1\ldots\dot{\iota}_{2f}}(x), B^-_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(x')] = \frac{1}{(2f)!}\sum_{(\alpha_i)} p_{\alpha_1\dot{\iota}_1}\ldots p_{\alpha_{2f}\dot{\iota}_{2f}} D(x-x') \\
&[B^+, B^+] = [B^-, B^-] = [B^{*+}, B^-] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Dabei bedeutet $\sum\limits_{(\alpha_i)}$ die in den Indices α_i symmetrisierte Summe. Da der Drehimpuls (8) selber eichinvariant ist, so müssen diese V. R. genügen, um (13) zu verifizieren, trotzdem im Ausdruck (19) für $P_{\mu\nu}$ die nicht eichinvarianten $a_{\alpha_1\ldots\alpha_f, \dot{\lambda}_1\ldots\dot{\lambda}_f}$ und $a^{*\alpha_1\ldots\alpha_f, \dot{\lambda}_1\ldots\dot{\lambda}_f}$ vorkommen. Hiezu eiche man die $a_{\alpha_1\ldots\alpha_f, \dot{\lambda}_1\ldots\dot{\lambda}_f}$ so, dass sie in sämtlichen Indices symmetrisch werden. Diese spezielle Eichung ist immer möglich. Es soll somit ein Spinor $c_{\alpha_2\ldots\alpha_f, \dot{\beta}_2\ldots\dot{\beta}_f}$ gesucht werden, der (4') genügt und die Gleichung erfüllt:

$$a'_{\alpha_1\ldots\alpha_f\, \dot{\beta}_1\ldots\dot{\beta}_f} = a_{\alpha_1\ldots\alpha_f, \dot{\beta}_1\ldots\dot{\beta}_f} + \sum_{(\alpha)(\beta)} p_{\alpha_1\dot{\beta}_1} c_{\alpha_2\ldots\alpha_f\, \dot{\beta}_2\ldots\dot{\beta}_f}$$

wo $a'_{\alpha_1\ldots\beta_f}$ in allen $2f$ Indices symmetrisch ist. Es soll somit die Relation gelten

$$\varepsilon^{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_1\ldots\alpha_f\beta_1\ldots\beta_f} = \varepsilon^{\beta_1\alpha_1} \sum_{(\alpha)(\beta)} p_{\alpha_1\beta_1} c_{\alpha_2\ldots\alpha_f\beta_2\ldots\beta_f} \tag{15}$$

$\sum\limits_{(\alpha)(\beta)}$ bedeutet hier wieder die in den Indices $(\alpha_1..\alpha_f)$ und $(\beta_1\ldots\beta_f)$ symmetrisierte Summe. (15) stellt ein System von $2f-1$ linear unabhängigen linearen Differentialgleichungen dar, aus denen die $2f$—1 unabhängigen Komponenten von $c_{\tau_1\ldots\tau_{f-1},\beta_1\ldots\beta_{f-1}}$ bestimmt werden können. Durch (15) ist die Eichung vollständig festgelegt.

Die Nebenbedingung (2) nimmt bei solcher Eichung die Gestalt an:

$$d^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta\gamma\ldots} = 0. \tag{16}$$

Die Gleichungen (6) erhalten die Form:

$$d_\alpha^\beta a_{\beta\gamma\ldots} + \frac{\partial a_{\alpha\nu\ldots}}{\partial t} = i\, b^+_{\alpha\gamma\ldots};\ - d_\alpha^\beta a_{\beta\gamma\ldots} + \frac{\partial a_{\alpha\gamma\ldots}}{\partial t} = i\, b^-_{\alpha\gamma}.$$

Somit gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial a_{\gamma\alpha\ldots}}{\partial t} = \frac{i}{2}\,(b^+_{\alpha\gamma\ldots} + b^-_{\alpha\gamma\ldots})$$

$$B^+_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} = \left(\frac{2}{i}\right)^{f-1} \frac{\partial^{f-1}}{\partial t^{f-1}}\, b^+_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} \tag{17}$$

$$B^-_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} = \left(\frac{2}{i}\right)^{f-1} \frac{\partial^{f-1}}{\partial t^{f-1}}\, b^-_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}.$$

Der Drehimpuls nimmt die Gestalt an

$$\begin{aligned} P_{\lambda\mu} = -\int dV \{ & \dot a^{*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} (x_{\mu\delta} d_\lambda^\delta + x_{\lambda\delta} d_\mu^\delta)\, a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} + \dot a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} (x_{\mu\delta} d_\lambda^\delta \\ & + x_{\lambda\delta} d_\mu^\delta)\, a^{*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} + 2f\,(\dot a_\mu^{*\,\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} a_{\lambda\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} + \dot a_\lambda^{*\,\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} a_{\mu\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} \\ & - \dot a_{\mu\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} a_\lambda^{*\,\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} - \dot a_{\lambda\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} a_\mu^{*\,\alpha_2\ldots\alpha_{2f}})\} \end{aligned}$$

Die Operation $x_{\mu\delta} d_\lambda^\delta + x_{\lambda\delta} d_\mu^\delta$ ist eine Differentiation nach dem Azimut um die Achse $(\mu\lambda)$. Man kann deshalb durch eine partielle Integration $P_{\lambda\mu}$ auf die Form bringen

$$P_{\lambda\mu} = -\int dV \{\dot a^{*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} (\delta^*_{\mu\lambda} a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}) - a^{*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} (\delta^*_{\mu\lambda} \dot a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}})\}. \tag{19}$$

Wir zerlegen jetzt die speziell geeichten Felder in „monochromatische“ Bestandteile, $a(\omega, \vec{x})$, welche durch folgende Gleichungen definiert sind:

$$a(\omega, \vec{x}) = \int a(\vec{k})\, e^{-i(\vec{k}\vec{x})} d\Omega = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3x' \frac{\sin\omega\,|\vec{x}-\vec{x}'|}{\omega\cdot|\vec{x}-\vec{x}'|}\, a(\vec{x}')$$

dabei ist

$$a(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint a(\vec{x})\, e^{i(\vec{k}\vec{x})} \omega^2 d\omega\, d\Omega; \; |\vec{k}| = \omega$$

$$a(\vec{x}) = \int \omega^2 d\omega\, a(\vec{x}, \omega); \; \Delta\, a(\vec{x}, \omega) + \omega^2 a(\vec{x}, \omega) = 0. \tag{20}$$

Für diese „monochromatischen“ Felder kann man die speziell geeichten Feldgrössen mittelst der Formeln (16) und (17) durch $B^+_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}$ und $B^-_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}$ bzw. deren erste zeitliche Ableitungen ausdrücken, je nachdem f gerade oder ungerade ist. Die Fallunterscheidung nach der Parität von f ist auch für die Vertauschungsrelationen (V. R.) der $B^\pm_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}$, in denen die Zeiten t, t' gleichgesetzt sind, nötig. Hier bleiben nämlich rechts nur die Terme stehen, die eine ungerade Anzahl Ableitungen der D-Funktion nach der Zeit enthalten; und da im ganzen f Ableitungen vorkommen, so ist die Zahl der räumlichen Ableitungen gerade oder ungerade, je nachdem f ungerade ist oder gerade. Die räumlichen Ableitungen haben nun verschiedenes Vorzeichen in den V. R. für B^+ und für B^-, was sich aber nur bei ungerader Anzahl von räumlichen Ableitungen äussert. Es treten daher in den V. R. Vorzeichenunterschiede auf, je nachdem f gerade oder ungerade ist.

<u>f gerade</u>

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega) = \frac{1}{(2\omega)^f} \left(B^+_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega) + B^-_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega)\right)$$

$$B^+_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega) = \frac{1}{2} (2\omega)^f \left(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}} - \frac{1}{\omega^2} d_{\alpha_1}{}^{\varrho} \dot{a}_{\varrho\,\alpha_2 \ldots \alpha_{2f}}\right)$$

$$B^-_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}} = \frac{1}{2} (2\omega)^f \left(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}} + \frac{1}{\omega^2} d_{\alpha_1}{}^{\varrho} \dot{a}_{\varrho\,\alpha_2 \ldots \alpha_{2f}}\right). \tag{21}$$

Den Drehimpuls schreiben wir wie folgt:

$$P_{\mu\lambda} = \int dV \int \omega^2 d\omega \frac{1}{(2\omega)^f} \int \omega'^2 d\omega' \left\{ \left(B^{+*\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega, x) + B^{-*\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega, x)\right) \delta^*_{\mu\lambda}\, \dot{a}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega', x) - \left(\dot{B}^{+*\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega, x) + \dot{B}^{-*\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega, x)\right) \delta^*_{\mu\lambda}\, a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega', x) \right\}. \tag{22}$$

Die Vertauschungsrelationen für $B^{+*}(\omega)$, $B^{+}(\omega)$ und $\dot{B}^{+*}(\omega)$ findet man gemäss (14) falls man $t = t'$ setzt

$$\left.\begin{aligned}
&[B^{\pm *\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega, x), B^{\pm}_{\tau_1 \dots \tau_{2f}}(\omega', x')] \\
&\quad = \pm \frac{i}{(2f)!} \sum_{(n=0)}^{f-1} \sum_{(\alpha_i)} \sum_{(\tau_i)} \frac{\delta(\omega - \omega')}{(2f-2n-1)!\,(2n+1)!\,2\pi^2\omega^2} \\
&\quad \cdot (-\omega^2)^n \delta^{\alpha_1}_{\tau_1} \cdots \delta^{\alpha_{2n+1}}_{\tau_{2n+1}} d^{\alpha_{2n+2}}_{\tau_{2n+2}} \cdots d^{\alpha_{2f}}_{\tau_{2f}} \frac{\sin \omega \cdot |\vec{x} - \vec{x}'|}{\omega \cdot |\vec{x} - \vec{x}'|} \\
&[\dot{B}^{\pm *\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega, x), B^{\pm}_{\tau_1 \dots \tau_{2f}}(\omega', x')] \\
&\quad = \frac{i}{(2f)!} \sum_{n=0}^{f-1} \sum_{(\alpha_i)} \sum_{(\tau_i)} \frac{1}{(2f-2n)!\,(2n)!} \frac{\delta(\omega - \omega')}{2\pi^2\omega^2} \\
&\quad \cdot (-\omega^2)^n \delta^{\alpha_1}_{\tau_1} \cdots \delta^{\alpha_{2n}}_{\tau_{2n}} d^{\alpha_{2n+1}}_{\tau_{2n+1}} \cdots d^{\alpha_{2f}}_{\tau_{2f}} \frac{\sin \omega\, |\vec{x} - \vec{x}'|}{\omega \cdot |\vec{x} - \vec{x}'|}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Damit kann man die Vertauschung $[P_{\mu\lambda}, B^{\pm}(\omega)]$ ausrechnen. Man hat dabei die Gleichungen (20) und (21) zu benützen.

Da $\delta^*_{\mu\nu}$ mit den Differentiationen d^{β}_{α} vertauschbar ist, findet man leicht

$$i\,[P_{\mu\lambda}, B^{\pm}_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega)] = \delta^*_{\mu\lambda} B^{\pm}_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega)\,. \qquad (13)$$

f ungerade

Anstelle von (21), (22) und (23) treten die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
a_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega) &= \frac{1}{i\omega} \frac{1}{(2\omega)^f} \left(\dot{B}^{+}_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega) + \dot{B}^{-}_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega)\right) \\
B^{+}_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega) &= \frac{1}{i}(2\omega)^{f-1} \left(\dot{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}} + d^{\varrho}_{\alpha_1} a_{\varrho\alpha_2 \dots \alpha_{2f}}\right) \\
B^{-}_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega) &= \frac{1}{i}(2\omega)^{f-1} \left(\dot{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}} - d^{\varrho}_{\alpha_1} a_{\varrho\alpha_2 \dots \alpha_{2f}}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (21')$$

$$\left.\begin{aligned}
P_{\lambda\mu} = &- \int dV \int \frac{\omega^3}{i(2\omega)^f} d\omega \int \omega'^2 d\omega' \{(B^{+*\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega, x) \\
&+ B^{-*\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega, x))\, \delta^*_{\lambda\mu} a_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega', x) \\
&+ \frac{1}{\omega^2}(\dot{B}^{+*\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega, x) + \dot{B}^{-*\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega, x))\, \delta^*_{\lambda\mu} \dot{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_{2f}}(\omega', x)\}.
\end{aligned}\right\} \quad (22')$$

$$\left.\begin{aligned}
&[B^{\pm *\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\omega,x),\, B^{\pm}_{\tau_1\ldots\tau_{2f}}(\omega',x')] \\
&\quad = \mp\frac{i}{(2f)!}\sum_{n=0}^{f-1}\sum_{(\alpha_i)}\sum_{(\tau_i)}\frac{\delta(\omega-\omega')}{(2f-2n-1)!\,(2n+1)!\,2\pi^2\omega^2} \\
&\quad\cdot(-\omega^2)^n\,\delta^{\alpha_1}_{\tau_1}\cdots\delta^{\alpha_{2n+1}}_{\tau_{2n+1}}\,\delta^{\alpha_{2n+2}}_{\tau_{2n+2}}\cdots\delta^{\alpha_{2f}}_{\tau_{2f}}\,\frac{\sin\omega\,|\vec{x}-\vec{x}'|}{\omega\,|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&[\dot{B}^{\pm *\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\omega,x),\, B^{\pm}_{\tau_1\ldots\tau_{2f}}(\omega',x') \\
&\quad = -\frac{i}{(2f)!}\sum_{n=0}^{f}\sum_{(\alpha_i)}\sum_{(\tau_i)}\frac{\delta(\omega-\omega')}{(2f-2n)!\,(2n)!\,2\pi^2\omega^2} \\
&\quad\cdot-(\omega^2)^n\,\delta^{\alpha_1}_{\tau_1}\cdots\delta^{\alpha_{2n}}_{\tau_{2n}}\,d^{\alpha_{2n+1}}_{\tau_{2n+1}}\cdots d^{\alpha_{2f}}_{\tau_{2f}}\,\frac{\sin\omega\,|\vec{x}-\vec{x}'|}{\omega\,|\vec{x}-\vec{x}'|}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(23')$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun wieder die Gleichung (13)

$$i\,[P_{\lambda\mu},\, B^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\omega)] = \delta^{*}_{\lambda\mu}\, B^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\omega)\,. \qquad (13)$$

Die analogen Rechnungen lassen sich auch für halbzahligen Spin $f = m + \frac{1}{2}$ durchführen.

Wir gehen aus von den Gleichungen

$$p_{\dot\lambda_1\varrho}\, b^{+\dot\lambda_1\ldots\dot\lambda_{f+\frac12}}_{\mu_1\ldots\mu_{f-\frac12}} = 0;\quad p^{\dot\tau\lambda_1}\, b^{-\dot\mu_1\ldots\dot\mu_{f-\frac12}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{f+\frac12}} = 0 \qquad (24)$$

b^+ und b^- sind wieder symmetrische Spinoren, die hier aber eine ungerade Anzahl Indices haben. Bei Spiegelungen wird b^+ mit b^- vertauscht. Die Gleichungen (24) lassen sich durch Variation aus der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}
L = \tfrac{1}{2}\Big\{ &-b^{+*\lambda_1\ldots\lambda_{f+\frac12}}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_{f-\frac12}}\, p_{\lambda_{f+\frac12}\dot\mu_{f+\frac12}}\, b^{+\dot\mu_1\ldots\dot\mu_{f+\frac12}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{f-\frac12}} \\
&+ b^{+\dot\mu_1\ldots\dot\mu_{f+\frac12}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{f-\frac12}}\, p_{\lambda_{f+\frac12}\dot\mu_{f+\frac12}}\, b^{+*\lambda_1\ldots\lambda_{f+\frac12}}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_{f-\frac12}} - b^{-*\lambda_1\ldots\lambda_{f-\frac12}}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_{f+\frac12}}\, p^{\dot\mu_{f+1}\lambda_{f+\frac12}}\, b^{-\dot\mu_1\ldots\dot\mu_{f-\frac12}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{f+\frac12}} \\
&+ b^{-\dot\mu_1\ldots\dot\mu_{f-\frac12}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{f+\frac12}}\, p^{\dot\mu_{f+\frac12}\lambda_{f+\frac12}}\, b^{-*\lambda_1\ldots\lambda_{f-\frac12}}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_{f+\frac12}}\Big\}
\end{aligned}\qquad (25)$$

herleiten, falls man noch die Gleichungen

$$p^{\mu_1}_{\dot\lambda_1}\, b^{+\dot\lambda_1\ldots\dot\lambda_{f+\frac12}}_{\mu_1\ldots\mu_{f-\frac12}} = 0;\quad p^{\lambda_1}_{\dot\mu_1}\, b^{-\dot\mu_1\ldots\dot\mu_{f+\frac12}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{f-\frac12}} = 0 \qquad (26)$$

als Nebenbedingungen hinzufügt. Aus den Gleichungen (24) folgt, dass b^+ und b^- der Wellengleichung zweiter Ordnung genügen. Wieder folgt die Existenz einer Eichgruppe, indem sich die Lagrangefunktion bei der Transformation

$$\left.\begin{aligned}
b^{+'\dot\lambda_1\ldots\dot\lambda_{f+\frac12}}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{f-\frac12}} &= b^{+\dot\lambda_1\dot\lambda_2\ldots\dot\lambda_{f+\frac12}}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{f-\frac12}} + \sum_{(\mu_i)(\dot\lambda_i)} p^{\dot\lambda_1}_{\mu_1}\, c^{+\dot\lambda_2\ldots\dot\lambda_{f+\frac12}}_{\mu_2\ldots\mu_{f-\frac12}} \\
b^{-'\dot\lambda_1\dot\lambda_2\ldots\dot\lambda_{f-\frac12}}_{\mu_1\ldots\mu_{f+\frac12}} &= b^{+\dot\lambda_1\dot\lambda_2\ldots\dot\lambda_{f-\frac12}}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{f+\frac12}} + \sum_{(\mu_i)(\dot\lambda_i)} p^{\dot\lambda_1}_{\mu_1}\, c^{-\dot\lambda_2\ldots\dot\lambda_{f-\frac12}}_{\mu_2\ldots\mu_{f+\frac12}}
\end{aligned}\right\}\qquad (27)$$

nur um ein vollständiges Differential ändert. C^+ und C^- genügen den Gleichungen

$$p_{\dot\lambda_2 \varrho}\, c^{+\dot\lambda_2 \ldots}_{\;\;\mu_2 \ldots} = 0; \;\; p^{\dot\tau \lambda_2}\, c^{-\dot\mu_2 \ldots}_{\;\;\lambda_2 \ldots} = 0$$

und sind in punktierten und unpunktierten Indices symmetrisch. Die durch (8) definierten Integrale: Energie, Impuls und Drehimpuls sind wiederum eichinvariant. Weiter existieren die eichinvarianten Feldgrössen $B^{+\dot\alpha\dot\beta\ldots}$ und $B^{-}_{\alpha\beta\ldots}$:

$$\left.\begin{aligned} & B^{+\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\ldots} = p^{\varrho\dot\alpha} p^{\sigma\dot\beta} \ldots b^{+\dot\gamma\ldots}_{\;\;\varrho\sigma\ldots}; \; B^{-}_{\alpha\beta\gamma\ldots} = p_{\dot\varrho\alpha} p_{\dot\sigma\beta\ldots}\, b^{-\dot\varrho\dot\sigma\ldots}_{\;\;\gamma\ldots} \\ & p_{\sigma\dot\tau}\, B^{+\dot\tau\dot\nu\ldots} = 0\,, \; p^{\alpha\dot\tau}\, B^{-}_{\alpha\beta\ldots} = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

In bloss drehinvarianter Schreibweise, bei der die Zeitkoordinate vor dem Raume ausgezeichnet ist, kann man durch eine spezielle Eichung erreichen, dass die Grössen b^+ und b^- in allen Indices symmetrisch werden. Bei dieser speziellen Eichung lassen sich b^+ und b^- wieder durch die eichinvarianten B^+ und B^- ausdrücken, und zwar gilt

$$\left.\begin{aligned} & \dot b^{+}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} - d^{\varrho}_{\alpha_1}\, b^{+}_{\varrho\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} = 0; \; \dot b^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} + d^{\varrho}_{\alpha_1}\, b_{\varrho\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} = 0 \\ & B^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} = \left(\frac{2}{i}\right)^{m} \frac{\partial^m}{\partial t^m}\, b^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} \qquad (m = f - \tfrac{1}{2}). \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Man kann die Grössen $b^{+}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}$ und $b^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}$ durch Differentiation aus Potentialen herleiten:

$$\left.\begin{aligned} d^{\varrho}_{\alpha_1}\, a_{\varrho\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} + \dot a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} &= i\, b^{+}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} \\ -d^{\varrho}_{\alpha_1}\, a_{\varrho\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} + \dot a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} &= i\, b^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Dabei hat $a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}$ neben der Wellengleichung 2. Ordnung noch die Nebenbedingung

$$d^{\alpha_1\alpha_2}\, a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} = 0 \qquad (31)$$

zu erfüllen. Für die Lösung der Feldgleichungen ist es sehr bequem, diese Potentiale $a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}$ einzuführen, da hiedurch bei ganzem wie bei halbganzem Spin dasselbe Verfahren anwendbar wird. Die Gleichungen (30) sind allerdings nicht Lorentzinvariant, was aber für unsere Zwecke gleichgültig ist. Genau so wie b^+ und b^- lassen sich auch die $a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}$ durch die eichinvarianten Grössen B^+ und B^- bzw. deren erste Ableitungen nach der Zeit ausdrücken.

Der nach der Vorschrift (8) gebildete Drehimpuls hat bei der speziellen Eichung die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} P_{\lambda\mu} = \frac{1}{i}\int dV\{ & b^{+*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(x_{\lambda\tau}d^\tau_\mu + x_{\mu\tau}d^\tau_\lambda)\, b^+_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} \\ & + 2f\,(b^{+*\alpha_2\ldots\alpha_{2f}}_\mu b^+_{\lambda\,\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} + b^{+*\alpha_2\ldots\alpha_{2f}}_\lambda b^+_{\mu\,\alpha_2\ldots\alpha_{2f}}) \\ & + b^{-*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(x_{\lambda\tau}d^\tau_\mu + x_{\mu\tau}d^\tau_\lambda)\, b^-_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}} \\ & + 2f\,(b^{-*\alpha_2\ldots\alpha_{2f}}_\mu b^-_{\lambda\,\alpha_2\ldots\alpha_{2f}} + b^{-*\alpha_2\ldots\alpha_{2f}}_\lambda b^-_{\mu\,\alpha_2\ldots\alpha_{2f}})\} \\ = \frac{1}{i}\int dV\,\{ & b^{+*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\delta^*_{\lambda\mu} b^+_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}) \\ & + b^{-*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\delta^*_{\lambda\mu} b^-_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}})\}. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Falls wir wieder die durch (20) definierten monochromatischen Komponenten einführen, können wir die b^+ und b^- durch die eichinvarianten B^+ und B^- ausdrücken. Wieder hat man eine Fallunterscheidung zu machen, je nachdem $m = f - \frac{1}{2}$ gerade oder ungerade ist.

m gerade

$$B^\pm_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\omega) = (2\,\omega)^m\, b^\pm_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}$$

$$\begin{aligned} P_{\lambda\mu} = \frac{1}{i}\int dV \int \omega^2\, d\omega\, \frac{1}{(2\,\omega)^m}\, & \{B^{+*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\omega, x)\,\big(\delta^*_{\lambda\mu} b^+_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(x)\big) \\ & + B^{-*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\omega, x)\,\big(\delta^*_{\lambda\mu} b^-_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(x)\big)\} \end{aligned}$$

die V. R. lauten für $t = t'$

$$\left.\begin{aligned} & [B^{\pm*\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\omega, x), B^\pm_{\tau_1\ldots\tau_{2f}}(\omega', x')]^+ \\ & \quad = \frac{1}{(2f)!}\sum_{n=0}^{f-1}\sum_{(\alpha_i)}\sum_{(\tau_i)} \frac{\delta\,(\omega - \omega')}{(2f - 2n - 1)!\,(2n+1)!\,2\,\pi^2\,\omega^2} \\ & \cdot(-\omega^2)^n\,\delta^{\alpha_1}_{\tau_1}\ldots\delta^{\alpha_{2n+1}}_{\tau_{2n+1}}\, d^{\alpha_{2n+2}}_{\tau_{2n+2}}\ldots d^{\alpha_{2f}}_{\tau_{2f}}\,\frac{\sin\omega\,|\vec{x} - \vec{x}'|}{\omega\,|\vec{x} - \vec{x}'|}. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Dabei bedeutet

$$[a, b]^+ \equiv [a\,b + b\,a]$$

Man verifiziert wieder leicht, dass die Gleichung (13) gilt:

$$i\,[P_{\mu\lambda}, B^\pm_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}] = \delta^*_{\mu\lambda} B^\pm_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}.$$

m ungerade.

Hier gilt

$$B^{\pm}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}} = \frac{2}{i} (2\,\omega)^{m-1} \dot{b}^{\pm}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}};\ b^{\pm}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}} = \frac{2}{i\,(2\,\omega)^{m+1}} \dot{B}^{\pm}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}.$$

Demnach kommt im Drehimpuls $\dot{B}^{+*}$ und $\dot{B}^{-*}$ vor. Deshalb benötigen wir hier die folgenden V. R.

$$\left.\begin{aligned} &[\dot{B}^{*\pm\,\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega, x),\, B^{\pm}_{\tau_1 \ldots \tau_{2f}}(\omega', x')]^{+} \\ &\quad = \pm \frac{1}{(2\,f)!} \sum_{n=0}^{f-1} \sum_{(\alpha_i)} \sum_{(\tau_i)} \frac{\delta\,(\omega - \omega')}{(2\,f - 2\,n)!\,(2\,n)!\,2\,\pi^2\,\omega^2} \\ &\cdot (-\omega^2)^n\, \delta^{\alpha_1}_{\tau_1} \cdots \delta^{\alpha_n}_{\tau_n}\, d^{\alpha_{n+1}}_{\tau_{n+1}} \cdots d^{\alpha_{2f}}_{\tau_{2f}}\, \frac{\sin \omega \cdot |\vec{x} - \vec{x}'|}{\omega \cdot |\vec{x} - \vec{x}'|}. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Damit bestätigt man wieder die Gültigkeit der Gleichung (13).

3. Lösung der Wellengleichungen durch bei Drehungen irreduzible Funktionen.

Wir haben gezeigt, dass der Drehimpuls in der q-Zahl-Theorie gleich dem Operator der Infinitesimalen Drehungen der eichinvarianten Grössen ist. Wir müssen jetzt zeigen, dass die bei Drehungen irreduziblen, eichinvarianten Lösungen der Feldgleichungen in unserem Falle sich stets nach einer Darstellung ϑ_j der Drehgruppe mit $j \geqslant f$ transformieren.

Wir betrachten Lösungen der Gleichung

$$\Delta\,\varphi + \omega^2\,\varphi = 0. \quad (35)$$

Die spezielle Kugelwelle

$$\varphi^0 = \frac{\sin \omega\, r}{r} \quad (36)$$

ist eine Lösung von (35). Nun bilde man

$$\frac{1}{(2\,l)!} \sum_{(\alpha_i)} d_{\alpha_1 \alpha_2} \ldots d_{\alpha_{2l-1} \alpha_{2l}} \cdot \varphi_0 = \Phi^{l}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2l}} \quad (37)$$

$\sum\limits_{(\alpha_i)}$ bedeutet die Summe aller Permutationen der α_i. Es gibt, da Φ^l in allen Indices symmetrisch ist, $2\,l + 1$ linear unabhängige Funktionen $\Phi^l_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2l}}$, die sich bei Drehungen nach ϑ_l transformieren. Die Φ^l sind daher Linearkombinationen der $(2\,l+1)$ Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\, Y_l^{(m)}(\cos\vartheta)\, e^{i m \varphi} J_{l+\frac{1}{2}}(\omega r) \text{ mit } l \geqslant m \geqslant -l.$$

Die Funktionen Φ^l erfüllen neben der Gleichung (35) noch folgende Identität

$$d_{\varrho\sigma}\, \Phi^l_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2l}} = \Phi^{l+1}_{\varrho\sigma\alpha_1\ldots\alpha_{2l}} + \frac{\omega^2}{(2\,l+1)\cdot(2\,l-1)!} \sum_{(\alpha_i)} \varepsilon_{\alpha_1\varrho}\, \varepsilon_{\alpha_2\sigma}\, \Phi^{l-1}_{\alpha_3\ldots\alpha_{2l}} \tag{38}$$

Dies folgt aus den Gleichungen (35) und (36). Als Folge von (38) gelten noch die Relationen

$$d^{\alpha\beta}\, \Phi^l_{\alpha\beta\alpha_1\ldots\alpha_{2l-2}} = \omega^2 \frac{2\,l}{2\,l-1}\, \Phi^{l-1}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2l-2}} \tag{39}$$

$$d^{\mu\alpha_1}\, \Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2l}} = \frac{\omega^2}{(2\,l-1)!} \sum_{(\alpha_i)} \delta^{\mu}_{\alpha_2}\, \Phi^{l-1}_{\alpha_3\ldots\alpha_{2l}}. \tag{40}$$

Mit den Funktionen $\Phi^l_{\alpha_1\ldots\alpha_{2l}}$ wollen wir nun Linearkombinationen bilden, welche Lösungen der Gleichungen (16) bzw. (31) sind. Wir machen den Ansatz:

$$a^{(j)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2f}}(\omega) = \sum_n \frac{c_n}{n!\,(2\,f-n)!} \sum_{(\alpha_i)} A^{j,\,\beta_{n+1}\ldots\beta_{2j}}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\omega)\, \Phi^{f+j-n}_{\alpha_{n+1}\ldots\alpha_{2f}\,\beta_{n+1}\ldots\beta_{2j}} \tag{41}$$

$A^j_{\alpha_1\ldots\alpha_{2j}}(\omega)$ ist ein symmetrischer, räumlich konstanter Spinor von Rang $2\,j$, der der Gleichung

$$\frac{d^2}{d t^2}\, A^j_{\alpha_1\ldots\alpha_{2j}}(\omega) + \omega^2 A^j_{\alpha_1\ldots\alpha_{2j}}(\omega) = 0$$

genügt. j ist ganz oder halbganz, je nachdem f ganz oder halbganz ist; denn $f+j-n$ muss stets ganz sein. Die Summe über n kann sich von $n=0$ bis $n=2\,f$ erstrecken, falls $j>f$; sonst geht sie nur von 0 bis $2\,j$ weil n die Anzahl der Indices α_i ist, welche am Spinor A^j auftreten. Die Koeffizienten c_n müssen so bestimmt werden, dass die Gleichung

$$d^{\varrho\sigma}\, a^j_{\varrho\sigma\alpha_3\ldots\alpha_{2f}} = 0 \tag{42}$$

erfüllt wird. Die Lösungen sind deshalb, wie wir sehen werden, im wesentlichen durch die $A^j_{\alpha_1\ldots\alpha_{2j}}(\omega)$ bestimmt.

Bestimmung der Koeffizienten c_n: Wir setzen unseren Ansatz (41) in (42) ein und erhalten

$$\left.\begin{aligned}
&d^{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma\alpha_3\ldots\alpha_{2f}}\\
&=\sum_n \frac{c_n}{n!\,(2f-n)!}\sum_{(\alpha_i)}\{n\,(n-1)\,A^j_{\varrho\sigma\alpha_3\ldots\alpha_n}{}^{\beta_{n+1}\ldots\beta_{2j}}\,\Phi^{f+j-n}_{\alpha_{n+1}\ldots\beta_{2j}}\\
&+2n\,(2f-n)\,A^j_{\sigma\alpha_3\ldots\alpha_{n+1}}{}^{\beta_{n+1}\ldots\beta_{2j}}\,d^{\varrho\sigma}\,\Phi^{f+j-n}_{\sigma\alpha_{n+1}\ldots\beta_{2j}}\\
&+(2f-n)\,(2f-n-1)\,A^j_{\alpha_3\ldots\alpha_{n+2}}{}^{\beta_{n+1}\ldots\beta_{2j}}\,d^{\varrho\sigma}\,\Phi^{f+j-n}_{\varrho\sigma\alpha_{n+3}\ldots\beta_{2j}}\}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

In (43) haben wir schon eine kleine Umformung vorgenommen. Wir haben nämlich die $\sum\limits_{(\alpha_i)}$ in (41) aufgeteilt in 3 Teilsummen: In der ersten ist die Anzahl der Indices α_i, die an A^j auftreten $n-2$, in der zweiten $n-1$ und in der dritten n. Die Zahlfaktoren kommen davon her, dass in (41) $\sum\limits_{(\alpha_i)}$ eine symmetrische Summe mit $(2f)!$ Summanden bedeuten, in (43) dagegen nur eine solche mit $(2f-2)!$ Summanden. Wir können nun die Differentiationen ausführen, indem wir die Formeln (38), (39) und (40) benützen. Dabei treten Terme auf, die $\varepsilon_{\sigma\beta_i}$, $\varepsilon_{\varrho\beta_i}$ bzw. $\delta^{\sigma}_{\beta_i}$ und $\delta^{\varrho}_{\beta_i}$ enthalten. Da $A^j_{\alpha_1\ldots\alpha_{2j}}$ ein symmetrischer Spinor ist, so geben diese Terme null. Falls man dies beachtet, findet man

$$\begin{aligned}
&d^{\varrho\sigma} a^j_{\varrho\sigma\alpha_3\ldots\alpha_{2f}}\\
&\quad=\sum_n \frac{c_n}{n!\,(2f-n)!}\sum_{(\alpha_i)}\Bigg\{n\,(n-1)\,A^j_{\alpha_3\ldots\alpha_n}{}^{\varrho\sigma\beta_{n+1}\ldots\beta_{2j}}\,\Phi^{m-n+1}_{\varrho\sigma\alpha_{n+1}\ldots\beta_{2j}}\\
&\quad+\omega^2\,\frac{(2f-n-1)\,(2f-n)}{(2m-2n+1)\,(2m-2n-1)}\,(2m-n)\,(2m-n+1)\\
&\quad\cdot A^j_{\alpha_3\ldots\alpha_{2n}}{}^{\beta_{n+1}\ldots\beta_{2j}}\,\Phi^{m-n-1}_{\alpha_{n+3}\ldots\beta_{2j}}\Bigg\}.
\end{aligned}\qquad(44)$$

Wir haben hier zur Abkürzung $f+j=m$ gesetzt.

Damit (44) verschwindet, muss sich Φ^{m-n+1}, das durch Differenzieren aus Φ^{m-n} entstanden ist, wegheben gegen Φ^{m-n+1} das aus Φ^{m-n+2} entstanden ist. Daraus folgt erstens, dass die Koeffizienten c_n mit geradem n unabhängig sind von denjenigen mit ungeradem n. Weiter ist jedoch die obere und die untere Grenze der Summation hierdurch bestimmt. An der unteren Grenze der Summe (44) muss der erste Term in der geschwungenen Klammer für sich allein verschwinden. Also beginnt die Summe mit $n=0$ oder $n=1$. An der oberen Grenze muss der zweite Term in der geschwungenen Klammer verschwinden. Dies ist nur möglich, falls

$$j \geqslant f \qquad (45)$$

angenommen wird, da dann die Summe sich bis $n = 2f$ oder bis $n = 2f - 1$ erstreckt, je nachdem man Lösungen betrachtet, in denen nur gerade oder nur ungerade n von null verschieden sind.

Für $0 \leqq n \leqq 2\,\mathrm{f}$ muss gelten

$$c_{n+2} = -\omega^2 \frac{(2m-n)(2m-n+1)}{(2m-2n+1)(2m-2n-1)} c_n. \tag{46}$$

Die Rekursionsformel ergibt folgende Lösung für die c_n, falls $c_0 = 1$ gesetzt wird

$$c_{n+1} = (\pm i\omega)^{n+1} \frac{m!\,(2m-2n)!\,2^n}{(2m-n)!\,(m-n)!};\ 0 < n \leqslant 2f. \tag{47}$$

Da Realteil und Imaginärteil der c_n voneinander unabhängig sind, so gibt es zu einem vorgegebenen $A^j_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2j}}$, falls $j \geqslant f$ ist, zwei voneinander linear unabhängige Lösungen, von denen eine nur Funktionen Φ^l mit geradem l, die andere nur solche mit ungeradem l enthält. Diese beiden Typen von Lösungen entsprechen in der Maxwell'schen Theorie, wo $f = 1$ ist, dem Strahlungsfeld eines elektrischen und eines magnetischen Multipols. Aus den $a^j_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega)$ erhält man gemäss den Gleichungen (21), (29), (30) eichinvariante Grössen. Zu vorgegebenem j gibt es zwei Scharen von $(2j+1)$ linear unabhängigen Lösungen, von denen sich je $2j+1$ nach der Darstellung der Drehgruppe ϑ_j untereinander transformieren. Das wesentliche Ergebnis ist hierbei dieses, dass $j \geqslant f$ sein muss, damit die $a^j_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}}(\omega)$ und damit die eichinvarianten Grössen nicht verschwinden.

Zum Schluss möchte ich Herrn Prof. Pauli für viele hilfreiche Diskussionen danken.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.

Literatur.

[1]) M. Fierz, H. P. A. XII, 1939, S. 3 zitiert als (A).
[2]) R. A. Beth, Phys. Rev. 50/2 (1936), S. 115.
[3]) W. Pauli, Handbuch d. Phys. 24/1, zweite Aufl. (Berlin 1933). S. 259.
[4]) W. Heitler, Proc. of Cambridge Phil. Soc. XXXII. 1. Jan. 1936, S. 112.
[5]) W. Pauli und M. Fierz, H. P. A. XII (1939) S. 297. M. Fierz und W. Pauli, Proc. Roy. Soc. **173** (1939) S. 211.
[6]) van der Waerden, Die Gruppentheoret. Methode. (Berlin 1932) S. 78ff. siehe auch M. Fierz und W. Pauli, Proc. Roy. Soc. **173** (1939) S. 211, wo im Anhang die wichtigsten Rechenregeln zusammengestellt sind.
[7]) W. Pauli, Relativitätstheorie (Teubner, Leipzig und Berlin 1921) S. 616. F. J. Belinfante, Physica VI (Okt. 1939) S. 887.