Über die Invarianz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse

Über die Invarianz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse

von **W. Pauli.**

(18. V. 1940.)

---

§ 1. Einleitung.

In der allgemeinen Relativitätstheorie hat das Linienelement, dessen Quadrat ds^2 als quadratische Form der Koordinatendifferentiale gemäss

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (i, k = 1 \ldots 4) \tag{1}$$

gegeben ist, eine absolute Bedeutung; sein Zahlwert ist durch natürliche Masstäbe und Uhren bestimmt. Daher sind in dieser Theorie die Naturgesetze *nicht* invariant gegenüber einer Transformation des Linienelementes gemäss

$$ds' = f(x) \cdot ds\ ; \qquad g'_{ik} = f^2(x)\, g_{ik} \tag{2}$$

sofern die Funktion $f(x)$ der Koordinaten ganz willkürlich gelassen ist. Die Forderung einer *allgemeinen* Kovarianz der Naturgesetze gegenüber einer solchen Transformation[1]), die nur die Verhältnisse der g_{ik} und deshalb den Lichtkegel $ds^2 = 0$ invariant lässt und im Folgenden kurz als „Konformtransformation" bezeichnet werden möge, dürfte sich auch kaum aufrecht erhalten lassen angesichts der nicht verschwindenden Ruhemassenwerte der materiellen Elementarteilchen, die nach der Quantentheorie durch Multiplikation ihres Reziproken mit h/c direkt zu natürlichen absoluten Längenmassen Anlass geben.

Andrerseits ist es wohl bekannt, dass die Maxwell'schen Gleichungen invariant sind gegenüber den Konformtransformationen

---

[1]) Eine solche Forderung hat bekanntlich eine Rolle gespielt in der Theorie von H. Weyl, wo die Transformation (2) gemäss

$$\varphi_i' = \varphi_i - 2\,\frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

mit der Eichgruppe der elektrischen Potentiale gekoppelt auftrat. Unabhängig von den Transformationen der elektrischen Potentiale wurde die „Konforminvarianz" von A. Einstein, Berl. Ber., math.-phys. Klasse, 1921, S. 261 diskutiert.

(2). Um so auffallender ist es, dass die gewöhnliche skalare Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\, g^{ik}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right)=0 \quad (\text{mit } g \equiv \text{Det.} \,\|\, g_{ik} \,\|)$$

die nach quantentheoretischer Auffassung Teilchen mit verschwindender Ruhmasse und ohne Spin beschreibt, *keine* Invarianz gegenüber Konformtransformationen besitzt.

Es schien deshalb von Interesse, die zu Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ gehörenden Dirac'schen Wellengleichungen hinsichtlich ihres Verhaltens gegenüber den Konformtransformationen (2) zu untersuchen. Im folgenden wird gezeigt, dass im Sonderfall verschwindender Ruhmasse der Teilchen die Dirac-Gleichungen analog den Maxwell-Gleichungen die Eigenschaft der Konforminvarianz besitzen, wobei sich übrigens die Wellenfunktionen so transformieren, dass die Komponenten der Vektordichte des Viererstroms Invarianten sind[1]).

§ 2. Mathematische Durchführung.

Wir folgen hier derjenigen Fassung der Dirac'schen Wellengleichung im Gravitationsfeld, die von SCHRÖDINGER[2]) angegeben wurde. Die vier Koordinaten x^k seien reell und wir folgen ferner derjenigen Konvention, bei der im Quadrat des Linienelementes zur Zeitdimension ein positives, zu den drei Raumdimensionen negative Vorzeichen der Eigenwerte der quadratischen Form (1) gehören, so dass sie im Falle der speziellen Relativitätstheorie in $-d\vec{x}^{\,2}+(d x^4)^2$ übergeht. Es mögen sodann die vierreihigen quadratischen Matrices γ_i die Relationen

$$\gamma_i\gamma_k+\gamma_k\gamma_i=2\, g_{ik} \tag{3}$$

erfüllen. Die Dirac-Gleichungen im Gravitationsfeld lauten dann

$$\gamma^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k}-\Gamma_k\right)\psi=i\,\mu\,\psi \tag{4}$$

---

[1]) Die Fragestellung dieser Note ergab sich aus einem Briefwechsel mit Herrn E. SCHRÖDINGER, in dessen Arbeiten über die Eigenschwingungen des expandierenden Universums (Physica **6**, 899, 1939 und Irische Akademie, im Druck. Für die Möglichkeit, in das Manuskript der letzteren Arbeit vor ihrem Erscheinen Einsicht zu nehmen, bin ich Herrn Schrödinger zu Dank verpflichtet) der Unterschied zwischen dem Fall der skalaren Wellengleichung einerseits und dem der Dirac- und der Maxwellgleichung andrerseits (auch bei verschwindender Ruhmasse) klar zutage getreten ist.

[2]) E. SCHRÖDINGER, Berl. Ber., math.-phys. Kl., 1932, p. 105 mit der Ergänzung von V. BARGMANN, ebenda p. 346. Vgl. auch W. PAULI, Ann. d. Phys. **18**, 337, 1933, wo die noch etwas allgemeinere Behandlung der Dirac'schen Gleichungen mit 5 homogenen Koordinaten gegeben wird.

wobei das Heraufziehen des Index in γ^k wie üblich mittels der g^{ik} zu erfolgen hat. Die Matrices Γ_k haben die Relationen zu erfüllen

$$\Gamma_k \gamma_i - \gamma_i \Gamma_k = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^r \gamma_r \tag{5}$$

worin Γ_{ik}^r das gewöhnliche Christoffel'sche Symbol

$$\Gamma_{ik}^r = \tfrac{1}{2} g^{rs} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s} \right) \tag{6}$$

bedeutet. Durch die Relationen (5) sind die Spuren der Matrices Γ_k noch völlig frei gelassen und wir wollen von diesen nur verlangen

$$\text{Spur } (\Gamma_k + \Gamma_k^+) = \frac{\partial F}{\partial x^k}\,. \tag{7}$$

Hier und im Folgenden soll mit einem + stets die zur angegebenen Matrix hermitisch-konjugierte Matrix verstanden werden. Der Imaginärteil von Spur Γ_k kann nach Schrödinger dem Viererpotential des äusseren elektromagnetischen Feldes proportional angenommen werden.

Die angegebenen Gleichungen sind nicht nur invariant bei Koordinatentransformationen der x^k, sondern auch bei beliebigen S-Transformationen $\psi' = S\psi$ des Spinraumes (ohne Einschränkung über die Determinante von S), wobei übrigens solchen Koordinatentransformationen, welche die g_{ik} festlassen, eine S-Transformation der ψ bei festen γ_i entspricht.

Einen physikalischen Inhalt bekommen die Wellen-Gleichungen (4) erst durch Angabe des Viererstromes oder analog gebauter in ψ^* und ψ bilinearer physikalischer Grössen. Ist β eine Matrix, die den Relationen

$$\gamma_i^+ = \beta \gamma_i \beta^{-1}\,, \qquad \beta^+ = \beta \tag{8}$$

$\beta\gamma_i$-hermitisch genügt, so genügt die reelle Vektordichte

$$\mathfrak{s}^k = s^k \sqrt{|g|} = \psi^* \beta \gamma^k \sqrt{|g|}\, \psi \tag{9}$$

der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^k}{\partial x^k} = 0 \tag{10}$$

wenn die durch (7) definierte Grösse F mit der Determinante von β gemäss

$$F = -\log \text{Det. } \beta \tag{11}$$

verknüpft ist. Man gewinnt diese Relation aus

$$\frac{\partial \beta}{\partial x^k} + \Gamma_k^+ \beta + \beta \Gamma_k = 0$$

durch Multiplikation mit β^{-1} und Spurbildung. Sind γ^{0k} Diracsche Matrices, die der Gleichung $\gamma_i^0 \gamma_k^0 + \gamma_k^0 \gamma_i^0 = 2\,\delta_{ik}$ genügen, so geht im Grenzfall der speziellen Relativitätstheorie bei unserer Festsetzung über die Vorzeichen von ds^2 γ_i über in

$$\gamma_\alpha = i\gamma_\alpha^0 \quad \text{für } \alpha = 1, 2, 3 \text{ und } \gamma_4 = \gamma_4^0$$

so dass dann gemäss (8) und (11)

$$\beta = \gamma_4^0$$

gesetzt werden kann.

Wir können nun das Verhalten der Wellengleichung (4) bei der Konform-Transformation (2) ermitteln. Aus (3) erhält man

$$\gamma_i' = f\gamma_i \tag{12}$$

während sich für die Christoffel-Symbole (6) ergibt

$$\Gamma'^r_{ik} = \Gamma^r_{ik} + \frac{1}{f}\left(\delta_i^r \frac{\partial f}{\partial x^k} + \delta_k^r \frac{\partial f}{\partial x^i} - g_{ik} g^{rs} \frac{\partial f}{\partial x^s}\right). \tag{13}$$

Die Auflösung der Gleichungen (5) für die Γ_k' ergibt sodann mit der Abkürzung

$$\gamma_{[ik]} = \tfrac{1}{2}(\gamma_i \gamma_k - \gamma_k \gamma_i)$$

$$\Gamma_k' = \Gamma_k + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial x^s}\, g^{rs} \gamma_{[rk]} + k\,\frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial x^k} \tag{14}$$

worin Gebrauch zu machen ist von den Relationen

$$\gamma_{[rk]}\gamma_i - \gamma_i \gamma_{[rk]} = 2\,(\gamma_r g_{ik} - g_{ir}\gamma_k)$$

und der willkürliche Zahlfaktor k die Spur von Γ_k' bestimmt gemäss

$$\text{Spur } \Gamma_k' = \text{Spur } \Gamma_k + 4\,k\,\frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial x^k}$$

sodass nach (7) gilt

$$F' = F + 4\,(k + k^*) \log f. \tag{15}$$

Mit Rücksicht auf

$$\gamma^k \gamma_{[rk]} = -3\,\gamma_r$$

folgt aus (14)

$$\gamma'^k\,\Gamma_k' = \frac{1}{f}\left[\gamma^k\,\Gamma_k + (k - \tfrac{3}{2})\,\frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial x^r}\,\gamma^r\right].$$

Aus

$$\gamma'^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_k'\right)\psi' = i\,\mu\,\psi'$$

folgt also mit

$$\psi' = \Omega\,f^{-3/2+k} \tag{16}$$

$$\gamma^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_k\right)\Omega = i\,\mu\,f\,\Omega\,. \tag{17}$$

Aus (11) und (15) folgt noch im Einklang mit (8)

$$\beta' = \beta\;f^{-(k+k')} \tag{18}$$

also wegen $\sqrt{|g|'} = \sqrt{|g|}\;f^4$

$$\psi^*\,\beta'\,\gamma'^k\sqrt{|g|'}\;\psi' = \Omega^*\,\beta\,\gamma^k\sqrt{|g|}\;\Omega\,. \tag{19}$$

Man sieht, dass der Massenterm in (17) die Konform-Invarianz des Gleichungssystems verhindert wie das zu erwarten war[1]). Im Sonderfall $\mu = 0$ kann man aber nach (16) und (17) setzen:

$$\Omega = \psi \qquad \psi' = \psi\,f^{-3/2+k} \quad \text{für } \mu = 0 \tag{20}$$

und nach (9) und (19) gilt dann auch für die Vektordichte die in der Einleitung angegebene Invarianz

$$\mathfrak{s}'^k = \mathfrak{s}^k \quad \text{für } \mu = 0\,. \tag{21}$$

Zürich, Physik. Institut der E. T. H.

[1]) In dieser Verbindung möge noch darauf hingewiesen werden, dass bei jeder konforminvarianten Theorie die Spur $\sum_i T_{ii}$ des Energietensors T_{ik} verschwindet, wie man aus dem Wirkungsprinzip $\delta\int L\,d^4x = 0$ und der Konforminvarianz der Lagrangefunktionen erkennt. Bei nicht verschwindender Ruhemasse ist diese Bedingung niemals erfüllt.