

Zum Problem des statischen Mesonfeldes

Autor(en): **Wentzel, Gregor**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **13 (1940)**

Heft IV

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111066>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zum Problem des statischen Mesonfeldes

von Gregor Wentzel, Zürich.

(21. VI. 40.)

Inhalt: Die Yukawa'sche Theorie der Wechselwirkung von Mesonen und Kernpartikeln wird für den Fall *starker Kopplung* diskutiert, und zwar am Beispiel des skalaren geladenen Mesonfeldes. Es wird ein Verfahren angegeben, die Eigenwerte und Eigenfunktionen des statischen Problems in Form einer Entwicklung nach *fallenden* Potenzen des Kopplungsparameters g zu bestimmen. Eine kurze Diskussion der Ergebnisse im Hinblick auf aktuelle Probleme der Mesontheorie findet sich im § 11.

§ 1. Problemstellung.

Gegenstand dieser Arbeit ist ein Mesonfeld in Wechselwirkung mit ruhenden Protonen und Neutronen. Das Problem des statischen Mesonfeldes ist bekanntlich viel verwickelter als das entsprechende elektromagnetische Problem: die exakte Aufspaltung des Maxwell'schen Feldes in statische und nicht-statische Anteile lässt sich beim Mesonfeld nicht nachahmen, und zwar beruht dies, wie STUECKELBERG¹⁾ zuerst gezeigt hat, auf der Nichtvertauschbarkeit der im Wechselwirkungsoperator auftretenden Spin- und isotopen Spinmatrizen. Diese Nichtvertauschbarkeit muss aber, da auf ihr der Austauschcharakter der Yukawa-Kräfte beruht, als ein durchaus wesentlicher Zug der Yukawa'schen Theorie angesehen werden. Ein besonders charakteristischer Unterschied zwischen Meson- und Lichttheorie ist bekanntlich der, dass die Mesonen, im Gegensatz zu den Lichtquanten, an ruhenden (unendlich schweren) Teilchen gestreut werden können.

Als mathematische Methode zur Untersuchung des „mesostatischen“ Feldes ist bisher neben der Störungsmethode, welche nur schlecht konvergierende Entwicklungen liefert, namentlich die der Quanten-Elektrodynamik entlehnte Methode der kanonischen Transformationen²⁾ herangezogen worden; doch liessen sich auch so Entwicklungen nach steigenden Potenzen des Kopplungspara-

¹⁾ Phys. Rev. **54**, 889, 1938, C.R. **207**, 387, 1938.

²⁾ STUECKELBERG, l. c.; STUECKELBERG und PATRY, Helv. Phys. Acta **12**, 300, 1939; MÖLLER und ROSENFELD, Kgl. Danske Vidensk. S., Math.-fys. Medd. XVII, 8.

meters aus den genannten Gründen nicht ganz vermeiden, so dass der Fortschritt gegenüber dem Störungsverfahren zweifelhaft erscheint¹⁾. Jedenfalls liegt ein Mangel der bisherigen Methoden darin, dass ihre Anwendbarkeit prinzipiell auf den Fall *schwacher* Kopplung zwischen Mesonen und Kernen beschränkt ist. Es schien daher wünschenswert, auch den umgekehrten Grenzfall, denjenigen *starker Kopplung*, zu untersuchen, zumal sich daraus die Möglichkeit ergeben könnte, interpolatorisch über das Zwischengebiet mittlerer Kopplungsstärken einiges zu erfahren. Da die elektrodynamische Analogie als Wegleitung hier ausser Betracht fällt, erhebt sich zunächst die Frage nach einer geeigneten Approximationsmethode für den Fall starker Kopplung. Eine solche Methode soll im Folgenden entwickelt werden, und zwar am Beispiel des geladenen skalaren Mesonfeldes (Ladung = ± 1 , Spin = 0).

§ 2. Bezeichnungen und Ansätze.

Da die folgenden Rechnungen sich grossenteils im Raum der Lagenkoordinaten abspielen — der Übergang zum Impulsraum erfolgt erst an späterer Stelle —, empfiehlt es sich, den kontinuierlichen Koordinatenraum durch ein *Punktgitter* ersetzt zu denken, und zwar wählen wir ein kubisches Gitter mit der Gitterkonstanten l , d. h. die kartesischen Koordinaten der Gitterpunkte sollen ganze Vielfache von l sein. Den die Gitterpunkte numerierenden Index schreiben wir immer als unteren Index, so dass f_s den Wert der Funktion f am Punkte s bedeutet. Der Übergang zum Impulsraum vollzieht sich gemäss der Formel

$$f(k) = \sum_s f_s e^{-i k x_s}$$

wo $k x_s$ das skalare Produkt aus Wellenzahl- und Ortsvektor bedeutet. Die Funktion $f(k)$ ist im k -Raum periodisch; der Periodizitätskubus hat das Volumen

$$\left(\frac{2\pi}{l}\right)^3 = V.$$

¹⁾ MÖLLER und ROSENFELD (l. c.) vertreten die Meinung, dass zwischen den rechnerischen Schwierigkeiten, die durch die erwähnte Nichtvertauschbarkeit bedingt sind, und den prinzipiellen Divergenzschwierigkeiten der Quantentheorie der Felder nicht klar unterschieden werden könne. Sie schlagen daher vor, über die Eigenschaften der Mesonen und über den Wechselwirkungsansatz derart zu verfügen, dass gewisse von der Nichtvertauschbarkeit herrührende Effekte möglichst belanglos werden. Gegen diesen Gesichtspunkt kann eingewendet werden, dass er auf eine künstliche Bagatellisierung der Unterschiede zwischen Mesontheorie und Elektrodynamik hinausläuft, die unseres Erachtens dem Sinn der Yukawa'schen Theorie widerspricht.

Die Fourier-Entwicklung von f lautet dann:

$$f_s = \frac{1}{V} \int dK f(k) e^{i k x_s},$$

wo dK das Volumelement des k -Raumes bedeutet und die Integration über einen Periodizitätskubus V zu erstrecken ist. Wir wählen hierfür denjenigen Kubus, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung des k -Raumes zusammenfällt, dessen Ecken also die Koordinaten $\pm \pi/l$ haben. Es sei ein für allemal verabredet, dass sämtliche im Folgenden vorkommenden k -Raum-Integrale über diesen speziellen Kubus V zu erstrecken sind. Für die Umrechnung von Impuls- auf Koordinatenraum und umgekehrt sind folgende Formeln bequem:

$$\frac{1}{V} \int dK e^{i k (x_s - x_r)} = \delta_{rs}, \quad \frac{1}{V} \sum_s e^{i (k' - k) x_s} = \delta(k - k'); \quad (1)$$

dabei ist $\delta(k)$ im Kubus V gleich der 3-dimensionalen Dirac'schen Deltafunktion, während sie sich ausserhalb desselben periodisch wiederholt.

Da alle Impulsraum-Integrale endlich sind, solange man auf den Grenzübergang $l \rightarrow 0$, $V \rightarrow \infty$ verzichtet, erübrigt sich eine weitere Abschneide-Vorschrift.

Die Hamiltonfunktion des skalaren geladenen Mesonfeldes im „Vacuum“ (d. h. ohne Kopplung mit Kernpartikeln) lautet nach PAULI und WEISSKOPF¹⁾, wenn ein kontinuierlicher Koordinatenraum zugrundegelegt wird:

$$\int dX \{ \pi^* \pi + \psi^* (\mu^2 - \Delta) \psi \}.$$

Hier ist π zu ψ und π^* zu ψ^* kanonisch konjugiert, d. h. es gilt:

$$[\pi(x), \psi(x')] = [\pi^*(x), \psi^*(x')] = -i \delta(x - x'),$$

während die anderen Funktionenpaare kommutieren. μ ist die Mesonmasse. (Massen und Energien seien in reziproken Längeneinheiten gemessen, derart, dass das Wirkungsquantum = 2π wird.) Zur Darstellung im Gitterraum setzen wir:

$$l^{3/2} \pi(x_s) = \pi_s, \quad l^{3/2} \psi(x_s) = \psi_s,$$

sodass

$$[\pi_r, \psi_s] = [\pi_r^*, \psi_s^*] = -i \delta_{rs}. \quad (2)$$

¹⁾ Helv. Phys. Acta 7, 709, 1934.

In der Hamiltonfunktion ist $\Delta\psi$, genommen bei x_r , ersetzbar durch

$$l^{-3/2} \sum_s \psi_s \cdot \frac{1}{V} \int dK (-k^2) e^{ik(x_r - x_s)},$$

da dieser Ausdruck im Limes $l \rightarrow 0, V \rightarrow \infty$ in

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int dK \int dX \Delta\psi(x) e^{ik(x_r - x)} = \Delta\psi(x_r)$$

übergeht¹⁾. Folglich ist die obige Hamiltonfunktion zu ersetzen durch

$$H^0 = \sum_s \pi_s^* \pi_s + \sum_{r,s} c_{rs} \psi_r^* \psi_s, \quad (3)$$

mit

$$c_{rs} = \frac{1}{V} \int dK \omega_k^2 e^{ik(x_r - x_s)}, \quad (4)$$

$$\omega_k^2 = \mu^2 + k^2. \quad (5)$$

Wird nun das Mesonfeld mit ruhenden Proton-Neutronen gekoppelt, die sich in gewissen Gitterpunkten x_j befinden mögen, so lautet die Hamiltonfunktion:

$$H = H^0 - G \sum_{(j)} \{(\tau_1^{(j)} + i\tau_2^{(j)}) \psi_j + (\tau_1^{(j)} - i\tau_2^{(j)}) \psi_j^*\}, \quad (6)$$

wo $\tau_1^{(j)}, \tau_2^{(j)}$ die bekannten Matrizen des „isotopen Spins“ sind:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den Koeffizienten G wählen wir einfachheitshalber reell und positiv. Da er die Dimension $l^{-3/2}$ hat, setzen wir

$$G = l^{-3/2} g; \quad (7)$$

der Wert der reinen Zahl g kann als Mass für die Stärke der Kopplung gelten.

Wir suchen nun für den Fall starker Kopplung ($g \gg 1$) Näherungslösungen des wellenmechanischen Problems

$$(H - E)F = 0, \quad (8)$$

wo die Schrödingerfunktion F als Funktion der ψ_s und der ψ_s^* gedacht ist und wo die π_s, π_s^* die den Vertauschungsrelationen

¹⁾ Eine andere Möglichkeit bestände darin, die Differentialquotienten in $\Delta\psi$ durch Differenzenquotienten zu ersetzen, wodurch das Spektrum der Eigenfrequenzen von H^0 (3) in bekannter Weise abgeändert wird. Das hier gewählte Vorgehen empfiehlt sich durch grössere Einfachheit der Schreibweise.

entsprechenden Differentialoperatoren bedeuten. F hängt ausserdem von den isotopen Spinindices ab, entsprechend dem Umstand, dass sich jede der schweren Partikeln j im Neutron- oder im Protonzustand befinden kann.

Für den zunächst zu behandelnden Fall, dass das Mesonfeld nur mit einer einzigen schweren Partikel (am Ort x_1) in Wechselwirkung steht, können wir die Gleichung (8) für die zweikomponentige Funktion F ersetzen durch die simultanen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (H^0 - E) F_N - 2 G \psi_1 F_P &= 0 \\ (H^0 - E) F_P - 2 G \psi_1^* F_N &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wo sich F_N auf den Neutron-, F_P auf den Protonzustand bezieht.

I. Ein einziges Proton-Neutron bei x_1 .

§ 3. Vorläufige Abschätzung der Energie-Eigenwerte.

Wir nehmen vorläufig an, die Gitterkonstante l sei gross gegen die Comptonwellenlänge des Mesons:

$$\mu l \gg 1. \quad (10)$$

Selbstverständlich kann eine so starke „Abschneidung“ nichts physikalisch Interessantes liefern; trotzdem beginnen wir mit diesem einfachen Sonderfall, weil wir daraus den Ausgangspunkt für die späteren allgemeineren Betrachtungen gewinnen werden.

Die durch (10) bedingte Vereinfachung des Problems besteht darin, dass annähernd

$$c_{rs} = \mu^2 \cdot \delta_{rs} \quad (11)$$

wird, weil in (4) k^2 gegen μ^2 im ganzen Integrationsbereich vernachlässigbar wird; in dieser Näherung ist also die Hamiltonfunktion (3) bzw. (6) in Beiträge der einzelnen Gitterpunkte *separiert*. (Die Mesonen können als in ihren Gitterpunkten *ruhend* angesehen werden.) Die Lösung der Gleichungen (9) ergibt sich durch den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + E_3 + \dots \\ F_N &= F_{N1}(\psi_1, \psi_1^*) \cdot F_2(\psi_2, \psi_2^*) \cdot F_3(\psi_3, \psi_3^*) \cdot \dots \\ F_P &= F_{P1}(\psi_1, \psi_1^*) \cdot F_2(\psi_2, \psi_2^*) \cdot F_3(\psi_3, \psi_3^*) \cdot \dots \\ (\pi_1^* \pi_1 + \mu^2 \psi_1^* \psi_1 - E_1) F_{N1} - 2 G \psi_1 \cdot F_{P1} &= 0 \\ (\pi_1^* \pi_1 + \mu^2 \psi_1^* \psi_1 - E_1) F_{P1} - 2 G \psi_1^* \cdot F_{N1} &= 0 \\ (\pi_s^* \pi_s + \mu^2 \psi_s^* \psi_s - E_s) F_s &= 0 \quad (s \neq 1). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Schrödingergleichungen für F_2, F_3, \dots sind einfach diejenigen harmonischer Oszillatoren, so dass wir nur noch die auf den Punkt 1 bezüglichen Gleichungen (12) zu lösen haben.

In der komplexen ψ_1 -Ebene führen wir Polarkoordinaten ein:

$$\psi_1 = q \cdot e^{i\vartheta}, \quad \psi_1^* = q \cdot e^{-i\vartheta} \quad (q, \vartheta \text{ reell, } q > 0). \quad (13)$$

Der Differentialoperator $\pi_1^* \pi_1$ ist, bis auf einen Faktor $-1/4$ (vgl. hierzu § 4), der Laplace'sche Operator in der ψ_1 -Ebene:

$$\pi_1^* \pi_1 = -\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \sqrt{q} + \frac{1}{q^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{4} \right) \right\}. \quad (14)$$

Die Koordinate ϑ wird absepariert durch den Ansatz:

$$F_{N1} = e^{i(m+\frac{1}{2})\vartheta} \cdot \frac{1}{\sqrt{q}} F'(q), \quad F_{P1} = e^{i(m-\frac{1}{2})\vartheta} \cdot \frac{1}{\sqrt{q}} F''(q), \quad (15)$$

wo $m \pm \frac{1}{2}$ aus Stetigkeitsgründen ganzzahlig sein muss. Da nach PAULI und WEISSKOPF der Operator

$$e_s = i (\psi_s \pi_s - \psi_s^* \pi_s^*) \quad (16)$$

die Mesonladung am Punkte s darstellt, und vermöge (13)

$$e_1 = i (\psi_1 \pi_1 - \psi_1^* \pi_1^*) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

wird, bedeutet $m + \frac{1}{2}$ bzw. $m - \frac{1}{2}$ die Mesonladung im Punkte 1, je nachdem, ob sich die schwere Partikel im Neutron- oder Protonzustand befindet; d. h. $m + \frac{1}{2}$ bedeutet die gesamte im Punkte 1 sitzende Ladung. Durch Einsetzen von (13), (14), (15) in (12) kommt:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{1}{4} \left(-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{m(m+1)}{q^2} \right) + \mu^2 q^2 - E_1 \right\} F' - 2 G q F'' = 0 \\ \left\{ \frac{1}{4} \left(-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{m(m-1)}{q^2} \right) + \mu^2 q^2 - E_1 \right\} F'' - 2 G q F' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Zur Abschätzung der Eigenwerte E_1 setzen wir weiter („WKB-Methode“¹⁾):

$$\left. \begin{aligned} F' &= a \cdot e^{i \int p dq} + \text{Konj.} \\ F'' &= b \cdot e^{i \int p dq} + \text{Konj.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

¹⁾ Vgl. den entsprechenden Ansatz zur Lösung der 4-komponentigen Diracschen Wellengleichung bei Pauli, *Helv. Phys. Acta* **5**, 179, 1932.

wo die q -Abhängigkeit von a und b in erster Näherung vernachlässigt wird. Dies in (17) eingesetzt:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{1}{4} \left(p^2 + \frac{m(m+1)}{q^2} \right) + \mu^2 q^2 - E_1 \right\} a - 2 G q \cdot b = 0 \\ \left\{ \frac{1}{4} \left(p^2 + \frac{m(m-1)}{q^2} \right) + \mu^2 q^2 - E_1 \right\} b - 2 G q \cdot a = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Die Lösbarkeitsbedingung dieser linear-homogenen Gleichungen lautet:

$$p^2 = 4 E_1 - \frac{m^2}{q^2} - 4 \mu^2 q^2 \pm \sqrt{\frac{m^2}{q^4} + 64 G^2 q^2}. \quad (20)$$

Entsprechend dem doppelten Vorzeichen der Wurzel in (20) ergeben sich zwei Klassen von Lösungen. In jedem Falle besitzt p^2 als Funktion von q ein Maximum; um die tiefsten Eigenwerte jeder Klasse zu bestimmen, genügt es, die Kurve $p^2(q)$ in der Nähe des Maximums jeweils durch eine Parabel zu approximieren, im Sinne einer Näherungslösung durch kleine Schwingungen¹⁾.

Als Bedingung für starke Kopplung gelte hier:

$$G^2 \gg \mu^3. \quad (21)$$

Nach (7) und (10) ist dann

$$g^2 \gg (\mu l)^3 \gg 1. \quad (22)$$

Diskutieren wir unter diesen Umständen zunächst die Lösung mit der *positiven* Wurzel in (20), so ist leicht zu sehen, dass in der Nähe des Maximums von p^2 die m^2 enthaltenden Terme sehr klein gegen die übrigen sind, sofern nicht $m \gg 1$ ist. Schliessen wir den letzteren Fall aus, so erhält man demnach für diese Klasse bei starker Kopplung:

$$p^2 \cong 4(E_1 - \mu^2 q^2 + 2 G q) = 4 \left(E_1 + \frac{G^2}{\mu^2} - \mu^2 \left(q - \frac{G}{\mu^2} \right)^2 \right).$$

Dieser harmonische Oszillator, dessen Ruhelage um G/μ^2 verschoben ist, hat die Energie-Eigenwerte:

$$E_1 = -\frac{G^2}{\mu^2} + \mu \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \text{wo } n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

¹⁾ p^2 geht gegen $-\infty$ für $q \rightarrow \infty$; desgleichen für $q \rightarrow 0$, ausgenommen für $m = \pm \frac{1}{2}$ im Falle der positiven Wurzel, wo $p^2(0) = +\infty$. Das Verhalten von p^2 bei kleinen q ist aber für die hier interessierenden *negativen* Energie-Eigenwerte (vgl. (23)) bedeutungslos, wie man daraus erkennt, dass (17) für kleine q einer kraftfreien Bewegung entspricht, die nur positive Energie-Eigenwerte besitzt.

Hier stellt der Term $-G^2/\mu^2$ eine negative Selbstenergie des Proton-Neutrons dar, und dazu addiert sich die Energie von n Mesonen im Punkte x_1 . Nach (21) ist die Selbstenergie dem Betrage nach gross gegen die Mesonmasse μ . Zu beachten ist, dass die Eigenwerte in dieser Näherung von der Ladungsquantenzahl m nicht abhängen, so dass jeder Zustand, auch der Grundzustand $n = 0$, bei beliebiger ganzzahliger Ladung mit der gleichen Energie vorkommt. Offenbar heisst dies, dass *durch Bindung geladener Mesonen an das Proton-Neutron Zustände desselben entstehen können, die eine beliebig hohe ganzzahlige Ladung tragen und die alle die gleiche bzw. fast die gleiche Masse besitzen*. In höherer Näherung wird natürlich die m -Entartung aufgehoben; berücksichtigt man die m^2 enthaltenden Terme in (20) in erster Näherung, so ergibt sich statt (23) die korrigierte Formel:

$$E_1 = -\frac{G^2}{\mu^2} + \mu \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\mu^4}{4G^2} \cdot m^2. \quad (24)$$

Die Zustände mit gleichem n (z. B. $n = 0$) erhalten somit eine *quadratische Abhängigkeit der Energie oder Masse von der Ladungszahl*: die kleinsten Massen haben Neutron und Proton ($m = \mp \frac{1}{2}$); die nächstbenachbarten Isobaren, nämlich negatives Proton und doppelt-positives Proton ($m = \mp \frac{3}{2}$) haben bereits eine um $\mu^4/2 G^2$ höhere Masse, wobei dieser Massenzuwachs aber klein gegen die Mesonmasse ist (vgl. hierzu § 11).

Was die Eigenfunktionen in diesem Fall (starke Kopplung, positive Wurzel in (20)) anbetrifft, ist es für das Folgende wichtig zu bemerken, dass sich aus (19) für das Amplitudenverhältnis b/a der Wert $+1$ ergibt, bis auf Terme der Ordnung $(\mu^3/G^2)^2$. Bis auf Fehler dieser Ordnung gilt also nach (18):

$$F'' = F'. \quad (25)$$

Insbesondere folgt hieraus, dass in jedem der betrachteten stationären Zustände die Kernpartikel als solche — ohne Mesonfeld — mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Proton- wie im Neutronzustand anzutreffen ist.

Die Diskussion der Lösungen mit der *negativen* Wurzel in (20) vereinfacht sich andererseits dadurch, dass bei starker Kopplung der Term $(-4\mu^2 q^2)$ in (20) in der Nähe des Maximums von p^2 vernachlässigt werden kann. Es erübrigt sich, auf diesen Fall näher einzugehen, denn es zeigt sich, dass die Selbstenergie in den betreffenden Zuständen positiv ist; ihre Grössenordnung ist $G^{2/3} (\gg \mu)$. Die Energieniveaus dieser Klasse liegen also um mehr als $\mu \cdot G^2/\mu^3$ höher als die Niveaus (24), und sie können deshalb für unsere Zwecke ausser Betracht bleiben.

§ 4. Allgemeinere Methode.

Wir verzichten jetzt auf die vereinfachende Annahme (10): die Gitterkonstante l darf wieder beliebig klein gewählt werden. Dann muss natürlich die k -Abhängigkeit von ω_k^2 in (4) berücksichtigt werden; die Matrix c_{rs} ist jetzt nicht-diagonal, und folglich ist H nicht von vorneherein separiert.

Um zunächst, wie in § 3, die Winkelkoordinate ϑ abzuseparieren, führen wir die folgende kanonische Transformation durch:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= q_1 e^{i\vartheta}, & \psi_1^* &= q_1 e^{-i\vartheta}, & \psi_s &= q_s e^{i\vartheta}, & \psi_s^* &= q_s^* e^{-i\vartheta} \quad (s \neq 1) \\ \pi_1 &= \frac{1}{2} e^{-i\vartheta} \left(p_1 - \frac{i}{q_1} p_{\vartheta}' \right), & \pi_1^* &= \frac{1}{2} e^{i\vartheta} \left(p_1 + \frac{i}{q_1} p_{\vartheta}' \right), \\ \pi_s &= p_s e^{-i\vartheta}, & \pi_s^* &= p_s^* e^{i\vartheta} \quad (s \neq 1), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

wo

$$p_{\vartheta}' = p_{\vartheta} - i \sum_s' (q_s p_s - q_s^* p_s^*) \quad (27)$$

(der Akzent am Summenzeichen bedeutet, dass der Term $s = 1$ auszulassen ist).

Hier sind $q_1, \vartheta, p_1, p_{\vartheta}$ reelle Variable bzw. Hermitesche Operatoren. Entsprechend den Vertauschungsrelationen gilt für die Kommutatoren kanonisch konjugierter Paare:

$$[p_1, q_1] = [p_{\vartheta}, \vartheta] = [p_s, q_s] = [p_s^*, q_s^*] = -i,$$

während alle anderen Paare kommutieren. Man überzeugt sich leicht, dass hieraus die richtigen Vertauschungsrelationen für die $\psi_s, \psi_s^*, \pi_s, \pi_s^*$ folgen, wobei zu beachten ist, dass alle $\psi_s, \psi_s^*, \pi_s, \pi_s^*$ ausgenommen diejenigen mit $s=1$, mit p_{ϑ}' (27) kommutieren. Da $i(\psi_1 \pi_1 - \psi_1^* \pi_1^*) = p_{\vartheta}'$, bedeutet p_{ϑ}' die Mesonladung am Punkte 1; ferner ist

$$p_{\vartheta} = i \sum_s (\psi_s \pi_s - \psi_s^* \pi_s^*) = \sum_s e_s$$

die Gesamtladung des Mesonfeldes.

Durch Einsetzen von (26) in H^0 (3) erhält man:

$$H^0 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{q_1}} p_1^2 \sqrt{q_1} + \frac{1}{q_1^2} (p_{\vartheta}'^2 - \frac{1}{4}) \right) + \sum_s' p_s^* p_s + \sum_{r,s} c_{rs} q_r^* q_s, \quad (28)$$

wo $q_1^* = q_1$. Da die Variable ϑ in H^0 nicht vorkommt, befriedigt man die Gleichungen (9) durch den zu (15) analogen Ansatz:

$$F_N = e^{i(m+\frac{1}{2})\vartheta} \cdot \frac{1}{\sqrt{q_1}} F', \quad F_P = e^{i(m-\frac{1}{2})\vartheta} \cdot \frac{1}{\sqrt{q_1}} F'', \quad (29)$$

wo F' und F'' nicht mehr von ϑ , sondern nur noch von q_1, q_2, q_2^* . . . abhängen, und wo $m + \frac{1}{2}$ wieder ganzzahlig ist. Wegen

$$p_\vartheta F_N = (m + \frac{1}{2}) F_N, \quad p_\vartheta F_P = (m - \frac{1}{2}) F_P$$

bedeutet aber jetzt $m + \frac{1}{2}$ bzw. $m - \frac{1}{2}$ die *gesamte* Ladung des Mesonfeldes für den Fall, dass die schwere Partikel sich im Neutron- bzw. Protonzustand befindet; d. h. $m + \frac{1}{2}$ ist die Gesamtladung des Systems: Proton-Neutron plus ganzes Feld. Die Gleichungen (9) lauten nach Einsetzen von (28) und (29):

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{1}{4} \left(p_1^2 + \frac{p'^2 - \frac{1}{4}}{q_1^2} \right) + \sum'_s p_s^* p_s + \sum_{r,s} c_{rs} q_r^* q_s - E \right\} F' - 2 G q_1 F'' = 0 \\ \left\{ \frac{1}{4} \left(p_1^2 + \frac{p''^2 - \frac{1}{4}}{q_1^2} \right) + \sum'_s p_s^* p_s + \sum_{r,s} c_{rs} q_r^* q_s - E \right\} F'' - 2 G q_1 F' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} p' &= (m + \frac{1}{2}) - i \sum'_s (q_s p_s - q_s^* p_s^*) \\ p'' &= (m - \frac{1}{2}) - i \sum'_s (q_s p_s - q_s^* p_s^*). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Es sei nun wieder „starke Kopplung“ vorausgesetzt; was damit genau gemeint ist, wird noch anzugeben sein. Um für diesen Fall Näherungslösungen von (30) zu finden, werden wir im Anschluss an § 3 versuchsweise annehmen, dass die Lösungen auch unter den jetzigen allgemeineren Bedingungen (l beliebig) in 2 Klassen zerfallen, von denen die eine wegen relativ hoher Selbstenergie nicht interessiert, während die andere dadurch charakterisiert ist, dass erstens die Terme $(p'^2 - \frac{1}{4})/q_1^2$ und $(p''^2 - \frac{1}{4})/q_1^2$ in (30), welche den Termen $m(m \pm 1)/q^2$ in (17) analog sind, in niederster Näherung vernachlässigbar sind, und dass zweitens gemäss (25) in dieser Näherung $F'' = F'$ gesetzt werden darf. Mit anderen Worten: wir lösen zunächst die einfachere Gleichung

$$\left\{ \frac{1}{4} p_1^2 + \sum'_s p_s^* p_s + \sum_{r,s} c_{rs} q_r^* q_s - 2 G q_1 - E \right\} F = 0 \quad (32)$$

und werden zu zeigen haben, dass mit $F' = F'' = F$ Näherungslösungen von (30) erhalten werden, die in einem Verfahren sukzessiver Approximation als Ausgangslösungen dienen können.

§ 5. Erste Näherung.

Zur Lösung von (32) führen wir eine kanonische Transformation durch, die einer Translation im q -Raum entspricht:

$$\left. \begin{aligned} q_s &= Q_s + Gl^3 \cdot Y_s, & q_s^* &= Q_s^* + Gl^3 \cdot Y_s^*, \\ p_s &= P_s, & p_s^* &= P_s^*. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Die Y_s sind noch zu bestimmende Konstanten. Die Formeln (33) sollen auch für $s = 1$ gelten, doch sind Q_1, P_1 wie auch Y_1 reell, und es muss gelten:

$$q_1 = Q_1 + Gl^3 Y_1 \geq 0. \quad (34)$$

Für Y_s wählen wir:

$$Y_s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dK \frac{1}{\omega_k^2} e^{ik(x_s - x_1)}. \quad (35)$$

Dann gilt nämlich nach (4) und (1):

$$\sum_s c_{rs} Y_s = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{r1} = l^{-3} \delta_{r1}, \quad (36)$$

und folglich mit (33) und (7):

$$\begin{aligned} & \sum_{r,s} c_{rs} q_r^* q_s - 2 G q_1 \\ &= \sum_{r,s} c_{rs} (Q_r^* + Gl^3 Y_r^*) (Q_s + Gl^3 Y_s) - 2 G (Q_1 + Gl^3 Y_1) \\ &= \sum_{r,s} c_{rs} Q_r^* Q_s + g^2 (l^3 \sum_{r,s} c_{rs} Y_r^* Y_s - 2 Y_1) \\ &= \sum_{r,s} c_{rs} Q_r^* Q_s - g^2 Y_1. \end{aligned}$$

Die in den Q_r^*, Q_s linearen Terme haben sich weggehoben. Somit lautet jetzt die Schrödingergleichung (32):

$$\left. \begin{aligned} \{ \mathcal{H} - (E + g^2 Y_1) \} F &= 0, \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{4} P_1^2 + \sum_s' P_s^* P_s + \sum_{r,s} c_{rs} Q_r^* Q_s. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Y_1 ist nach (35) reell und positiv:

$$Y_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dK \frac{1}{\omega_k^2}. \quad (38)$$

Da der Fall $l \gg 1/\mu$ in § 3 bereits behandelt wurde, können wir hier $l \lesssim 1/\mu$ voraussetzen; dann ist Y_1 offenbar von der Grössenordnung $1/l$. Um die Gleichung (37) in ähnlicher Weise wie in

§ 3 lösen zu können, müssen wir nun fordern, dass die Ungleichung (34) die Oszillatoramplitude Q_1 in ihrer Bewegungsfreiheit nicht merklich einschränkt. Da der natürliche Spielraum der Oszillatoramplituden von der Größenordnung $\mu^{-\frac{1}{2}}$ ist, genügt es also zu fordern: $Gl^3 Y_1 \sim Gl^2 \gg \mu^{-\frac{1}{2}}$, oder nach (7):

$$g^2 \gg (\mu l)^{-1} \gtrsim 1. \quad (39)$$

Für spätere Zwecke sei bemerkt, dass für $|x_s - x_1| \gg l$ die k -Integration in (35) statt über V ohne wesentlichen Fehler über den ganzen k -Raum erstreckt werden kann, so dass Y_s in das Yukawa-Potential übergeht:

$$Y_s = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\mu|x_s-x_1|}}{|x_s-x_1|} \text{ für } |x_s-x_1| \gg l. \quad (40)$$

Bei der Integration von (37) ist auf die Realität von Q_1 zu achten. Wir setzen deshalb

$$\left. \begin{aligned} Q_1 = Q_1', \quad Q_s = Q_s' + iQ_s'', \quad Q_s^* = Q_s' - iQ_s'' \quad (s \neq 1) \\ P_1 = P_1', \quad P_s = \frac{1}{2}(P_s' - iP_s''), \quad P_s^* = \frac{1}{2}(P_s' + iP_s'') \quad (s \neq 1), \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

wo die gestrichenen und zweigestrichenen Q, P hermitisch und wo gleich indizierte Q und P zueinander kanonisch konjugiert sind. Beachtet man, dass die durch (4) definierten c_{rs} aus Symmetrie-Gründen reell sind, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}' + \mathcal{H}'' \\ \mathcal{H}' &= \frac{1}{4} \sum_s P_s'^2 + \sum_{r,s} c_{rs} Q_r' Q_s' \\ \mathcal{H}'' &= \frac{1}{4} \sum_s P_s''^2 + \sum_{r,s} c_{rs} Q_r'' Q_s'', \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

in \mathcal{H}'' fehlen die Summenterme $r=1$ und $s=1$.

Es sind nun die Hauptachsentransformationen der quadratischen Formen in \mathcal{H}' und \mathcal{H}'' durchzuführen. Was \mathcal{H}' anbetrifft, sind die Eigenschwingungen der betreffenden linear gekoppelten Oszillatoren natürlich ebene Wellen. Wir schreiben:

$$U_s'(k) = V^{-\frac{1}{2}} e^{ikx_s}; \quad (43)$$

dann gilt nach (4) und (1)

$$\sum_s c_{rs} U_s'(k) = \omega_k^2 U_r'(k), \quad (44)$$

$$\int dK U_r'^*(k) U_s'(k) = \delta_{rs}, \quad \sum_s U_s'^*(k) U_s'(k') = \delta(k-k'). \quad (45)$$

\mathcal{H}' wird also separiert durch die Einführung von Normalkoordinaten gemäss

$$Q_s' = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dK U_s'(k) A'(k), \quad P_s' = \sqrt{2} \int dK U_s'^*(k) B'(k), \quad (46)$$

wo

$$A'^*(k) = A'(-k), \quad B'^*(k) = B'(-k), \quad (47)$$

$$[B'(k), A'(k')] = -i\delta(k - k'). \quad (48)$$

In der Tat findet man mit (44) bis (47):

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2} \int dK \{B'^* B' + \omega_k^2 A'^* A'\}. \quad (49)$$

Die Hauptachsentransformation von \mathcal{H}'' ist komplizierter wegen des Fehlens des Freiheitsgrades $s = 1$. Als Eigenschwingungen ergeben sich hier ebene Wellen plus Kugelwellen, die einer *Streuung* der Mesonen am Gitterpunkte 1 entsprechen. Da sich später zeigen wird, dass zu dieser Streuung noch eine weitere, stärkere Streuung hinzukommt, ist das genaue Aussehen der Eigenschwingungen weniger wichtig, und wir stellen daher ihre (approximative) Berechnung in den Anhang (Anhang 1) zurück. Das Spektrum der Eigenfrequenzen ist dasselbe wie in \mathcal{H}' , d. h. es gilt

$$\sum_s' c_{rs} U_s''(k) = \omega_k^2 U_r''(k) \quad (r \neq 1). \quad (50)$$

Mit den zu (45) bis (48) analogen Formeln, wo nur überall die einfachen durch doppelte Akzente zu ersetzen sind (dabei ist $U_1'' = 0$), kommt dann:

$$\mathcal{H}'' = \frac{1}{2} \int dK \{B''^* B'' + \omega_k^2 A''^* A''\}. \quad (51)$$

Wenn nun ausser dem x -Raum auch der k -Raum durch ein Punktgitter ersetzt wird, etwa vermöge einer Periodizitätsforderung für den x -Raum, so ergeben sich die Eigenwerte der Schrödingergleichung (37) zu

$$E = -g^2 Y_1 + \sum_k \omega_k (n_k' + n_k'' + 1), \quad (52)$$

wo $n_k', n_k'' (\geq 0)$ die Mesonenzahlen in den verschiedenen Eigenschwingungen bedeuten. Auf die Eigenfunktionen F brauchen wir hier nicht einzugehen. Nach (52) ist die Selbstenergie des Proton-Neutrons $= -g^2 Y_1$, also negativ und dem Betrage nach von der Grössenordnung g^2/l . Die Ladungsquantenzahl m kommt in dieser Näherung überhaupt nicht vor.

§ 6. Störungsrechnung.

Wir kommen jetzt zu den Gleichungen (30) zurück, wobei die bisher vernachlässigten Terme

$$\frac{1}{4} \frac{p'^2 - \frac{1}{4}}{q_1^2} = \Phi', \quad \frac{1}{4} \frac{p''^2 - \frac{1}{4}}{q_1^2} = \Phi'' \quad (53)$$

nunmehr mitgenommen werden sollen. Der durch (37) definierte Operator \mathcal{H} schreibt sich in den alten Koordinaten:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} p_1^2 + \sum_s p_s^* p_s + \sum_{r,s} c_{rs} q_r^* q_s - 2 G q_1 + g^2 Y_1;$$

daher lauten die Gleichungen (30) mit der Bezeichnung (53)

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H} - (E + g^2 Y_1) + 2 G q_1 + \Phi'\} F' - 2 G q_1 F'' &= 0 \\ \{\mathcal{H} - (E + g^2 Y_1) + 2 G q_1 + \Phi''\} F'' - 2 G q_1 F' &= 0, \end{aligned}$$

oder, mit

$$F' + F'' = F^+, \quad F' - F'' = F^-, \quad (54)$$

$$\frac{1}{2} (\Phi' + \Phi'') = \Phi^+, \quad \frac{1}{2} (\Phi' - \Phi'') = \Phi^-; \quad (55)$$

$$\{\mathcal{H} - (E + g^2 Y_1) + \Phi^+\} F^+ + \Phi^- F^- = 0 \quad (56)$$

$$\{\mathcal{H} - (E + g^2 Y_1) + 4 G q_1 + \Phi^+\} F^- + \Phi^- F^+ = 0. \quad (57)$$

F^+, F^- entwickeln wir nach den Eigenfunktionen der Gleichung (37):

$$\{\mathcal{H} - (E_\varrho + g^2 Y_1)\} F_\varrho = 0, \quad (58)$$

$$F^+ = \sum_\varrho a_\varrho F_\varrho, \quad F^- = \sum_\varrho b_\varrho F_\varrho. \quad (59)$$

Dabei sollen die F_ϱ orthogonal und auf 1 normiert sein. Einsetzen in (56), (57) ergibt, wenn die Matrixelemente wie üblich durch Doppelindices angezeigt werden:

$$a_\sigma (E_\sigma - E) + \sum_\varrho a_\varrho \Phi_{\varrho\sigma}^+ + \sum_\varrho b_\varrho \Phi_{\varrho\sigma}^- = 0 \quad (60)$$

$$b_\sigma (E_\sigma - E) + \sum_\varrho b_\varrho (4 G q_{1\varrho\sigma} + \Phi_{\varrho\sigma}^+) + \sum_\varrho a_\varrho \Phi_{\varrho\sigma}^- = 0. \quad (61)$$

Diese noch exakt gültigen Gleichungen sollen nun zunächst nach einer Störungsmethode annähernd gelöst werden. In nullter Näherung soll natürlich nach Obigem $F' = F''$, also $F^- = 0$ sein, während F^+ gleich einer bestimmten der Funktionen F_ϱ gesetzt werden soll. Für die erste Näherung setzen wir also an:

$$a_\sigma = \delta_{\sigma\tau} + \alpha_\sigma, \quad b_\sigma = \beta_\sigma, \quad E = E_\tau + \varepsilon_\tau, \quad (62)$$

und man erhält aus (60) in bekannter Weise:

$$\varepsilon_\tau = \Phi_{\tau\tau}^+, \quad \alpha_\sigma = \frac{1}{E_\tau - E_\sigma} \Phi_{\tau\sigma}^+ \quad (\sigma \neq \tau). \quad (63)$$

In (61) ist aber zu beachten, dass, im Gegensatz zu Φ^+ und Φ^- , der Term Gq_1 als gross zu gelten hat, da er schon in der nullten Näherung (§ 5) eine entscheidende Rolle spielte. In der Tat ist nach (34) $q_1 \cong Gl^3 Y_1$, bis auf Terme der Ordnung $|Q_1| \sim \mu^{-\frac{1}{2}}$, die wegen (39) klein sind. Setzen wir also in (61) zur Abschätzung $Gq_1 = g^2 Y_1$, $Gq_{1e\sigma} = g^2 Y_1 \cdot \delta_{e\sigma}$, so ergibt sich mit (62):

$$\beta_\sigma = -\frac{1}{4g^2 Y_1 + E_\sigma - E_\tau} \cdot \Phi_{\tau\sigma}^-.$$

Nun ist aber nach (52) $|E_\sigma - E_\tau| \sim \omega_k \lesssim l^{-1} \sim Y_1$, also wegen $g^2 \gg 1$: $|E_\sigma - E_\tau| \ll g^2 Y_1$. (Hohe Vielfache von ω_k kommen nicht in Betracht, da die entsprechenden Matrixelemente von Φ^- erheblich kleiner sind.) Daher:

$$\beta_\sigma = -\frac{1}{4g^2 Y_1} \cdot \Phi_{\tau\sigma}^-. \quad (64)$$

Da überdies, wie sich sogleich zeigen wird, die Matrixelemente $\Phi_{\tau\sigma}^-$ klein sind gegen die wesentlichen Matrixelemente von Φ^+ , sind die β_σ gänzlich belanglos verglichen mit den α_σ (63), d. h. es gilt auch in dieser Näherung $F^- = 0, F'' = F'$.

Zur Berechnung der Matrizen Φ^+, Φ^- nach (55) und (53) schreiben wir die durch (31) definierten p', p'' auf Grund der Transformationsformeln (33) und (41) neu an:

$$\left. \begin{matrix} p' \\ p'' \end{matrix} \right\} = (m \pm \frac{1}{2}) - \sum_s' (Q_s' P_s'' - Q_s'' P_s') - Gl^3 \sum_s' Y_s P_s''. \quad (65)$$

Bei der Darstellung von Q_s'' und P_s'' durch die Variablen A'', B'' wären hier streng genommen die durch (50) definierten Eigenschwingungen U'' zu verwenden. Wir wollen hier eine geringfügige Vernachlässigung in Kauf nehmen, die darin besteht, die in U'' enthaltene Streuwelle wegzulassen, d. h. $U'' = U'$ zu setzen; da nämlich die Amplitude dieser Streuwelle nach Anhang 1 zu l proportional ist, verschwindet der damit begangene Fehler im Limes $l \rightarrow 0$. In dieser Näherung ist es auch gleichgültig, ob bei Summationen über die Gitterpunkte der Punkt 1 mitgenommen oder weggelassen wird. Man erhält dann:

$$\sum_s' (Q_s' P_s'' - Q_s'' P_s') \cong \int dK \{A' B'' - A'' B'\} \quad (66)$$

$$Gl^3 \sum_s' Y_s P_s'' \cong g \cdot \sqrt{\frac{2}{(2\pi)^3}} \cdot \int dK \frac{1}{\omega_k^2} e^{-ikx_1} B''(k). \quad (67)$$

Der Operator (66) ist mit $\mathcal{H} = \mathcal{H}' + \mathcal{H}''$ vertauschbar und kann daher durch Wahl geeigneter Eigenfunktionen F_ρ diagonal gemacht werden; seine Eigenwerte sind ganzzahlig. Zur Abkürzung schreiben wir:

$$m - \int dK \{A' B'' - A'' B'\} = m', \quad (68)$$

wo m' wie m halbzahlig ist; hiermit wird

$$\left. \begin{matrix} p' \\ p'' \end{matrix} \right\} = (m' \pm \frac{1}{2}) + g \sqrt{\frac{2}{(2\pi)^3}} \int dK \frac{1}{\omega_k^2} e^{-ikx_1} B''(k). \quad (69)$$

Da $m - m'$, d. h. die Grösse (66), als die Ladung der „freien“ Mesonen interpretiert werden kann, bedeutet $m' + \frac{1}{2}$ nach Obigem (vgl. § 4) die Ladung des Proton-Neutrons einschliesslich seiner gebundenen Mesonen. m' übernimmt also hier die Rolle der Zahl m des § 3.

Den Faktor q_1^{-2} in (53) entwickeln wir gemäss (34) nach Potenzen von Q_1 :

$$q_1^{-2} = (gl^{\frac{3}{2}} Y_1)^{-2} - 2(gl^{\frac{3}{2}} Y_1)^{-3} \cdot Q_1 + \dots, \quad (70)$$

wo $Q_1 = Q_1'$ gemäss (46) als lineare Funktion der A' auszudrücken ist. Diese Entwicklung ist wegen (39) rasch konvergent.

Ordnet man die verschiedenen in (53) bzw. (55) auftretenden Terme nach fallenden Potenzen von g , so ergibt sich folgendes Bild: In Φ^+ ist der höchste Term von der Ordnung g^0 , nämlich:

$$\frac{1}{l^3 Y_1^2} \cdot \frac{1}{2(2\pi)^3} \cdot \left/ \int dK \frac{1}{\omega_k^2} e^{-ikx_1} B''(k) \right/ ^2 = \Phi^{(0)}. \quad (71)$$

Als quadratische Form in den B'' liefert dieses $\Phi^{(0)}$ einerseits Diagonalelemente, welche gemäss (63) zu den Energie-Eigenwerten beitragen, andererseits nicht-diagonale Elemente, welche Streuprozesse beschreiben. Da die Terme der Ordnung g^0 im folgenden § 7 exakt, d. h. ohne die Fehler der störungsmässigen Näherung, behandelt werden, kann hier auf die Berechnung der Matrixelemente von $\Phi^{(0)}$ verzichtet werden. Es sei aber hier schon bemerkt, dass der Beitrag von $\Phi^{(0)}$ zur Selbstenergie des Proton-Neutrons von der Grössenordnung $1/l$ ist, also dem Betrage nach klein gegen die „Selbstenergie nullter Näherung“ — $g^2 Y_1$ (vgl. (52), $Y_1 \sim 1/l$, $g^2 \gg 1$).

Φ^+ enthält ferner Terme der Ordnung g^{-1} , die teils linear in den B'' , teils dritten Grades in den A' und B'' sind; die linearen Terme entsprechen (virtuellen) Emissions- und Absorptions-Prozessen der Mesonen, die anderen entsprechen höheren Prozessen,

wie z. B. der Bildung eines Zweier-Schauers aus einem primären Meson. Die Wirkungsquerschnitte solcher Prozesse sind, da sie den Faktor g^{-2} enthalten, klein gegen den Streuquerschnitt.

Von den Termen der Ordnung g^{-2} in Φ^+ ist namentlich das Diagonalelement

$$\frac{1}{4 g^2 l^3 Y_1^2} \cdot m'^2 \quad (72)$$

bemerkenswert, da es den höchsten ladungsabhängigen Term in der Selbstenergie darstellt, entsprechend dem zu m^2 proportionalen Term in (24). Wir finden also auch hier wieder die *quadratische Abhängigkeit der Masse von der Ladungszahl*: Neutron und Proton ($m' = \mp \frac{1}{2}$) sind die stabilsten Zustände, wogegen die Massen der nächsten Nachbarzustände um $(2 g^2 l^3 Y_1^2)^{-1}$ höher liegen; dieser Massenzuwachs ist von der Größenordnung $g^{-2} l^{-1}$, also nach (39) klein gegen die Mesonmasse μ .

In Φ^- sind die höchsten Terme diejenigen der Ordnung g^{-1} . Damit werden die Koeffizienten β_σ nach (64) von der Ordnung g^{-3} und, wie schon erwähnt, für die hier diskutierten Effekte belanglos.

§ 7. Die Terme $\sim g^0$.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Eigenwerte und Eigenfunktionen bis auf Terme der Ordnung g^0 hinunter exakt zu behandeln, was natürlich mit der obigen ersten störungstheoretischen Näherung noch nicht getan ist, da in höheren Näherungen wiederum Terme $\sim g^0$ auftreten würden. Zur Erleichterung der Rechnung soll aber hier $l \ll 1/\mu$ angenommen werden, d. h. wir vernachlässigen alle Terme, die im Limes $l = 0$ verschwinden. Dann kann, wie in § 6, die in U'' enthaltene Streuwelle ignoriert werden ($U'' = U'$), und die in dieser Näherung oben erhaltenen Ausdrücke für Φ^+ und Φ^- sind ohne weiteres verwendbar.

Entwickelt man in den exakten Gleichungen (60), (61) die a_σ, b_σ nach fallenden Potenzen von g , so ist ähnlich wie in § 6 leicht zu sehen, dass die höchsten Terme in a_σ von der Ordnung g^0 , diejenigen in b_σ von der Ordnung g^{-3} sind. Behält man also nur die Terme höchster Ordnung bei, und ersetzt man in diesem Sinne auch Φ^+ durch $\Phi^{(0)}$ (71), so lauten die Gleichungen (60), (61):

$$a_\sigma(E_\sigma - E) + \sum_\rho a_\rho \Phi_{\rho\sigma}^{(0)} = 0, \quad b_\sigma = 0,$$

und entsprechend die Gleichungen (56), (57):

$$\{\mathcal{H} + \Phi^{(0)} - (E + g^2 Y_1)\} F^+ = 0, \quad F^- = 0. \quad (73)$$

Wir brauchen also nur die Hauptachsentransformation der quadratischen Form $\mathcal{H} + \Phi^{(0)}$ durchzuführen.

Es ist zweckmässig, mit folgender kanonischen Transformation zu beginnen:

$$\left. \begin{aligned} A'(k) &= -\frac{1}{\omega_k} b'(k), & A''(k) &= -\frac{1}{\omega_k} b''(k), \\ B'(k) &= +\omega_k a'(k), & B''(k) &= +\omega_k a''(k). \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Nach (49), (51) und (71) wird dann:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}' &= \frac{1}{2} \int dK \{b'^* b' + \omega_k^2 a'^* a'\} \\ \mathcal{H}'' &= \frac{1}{2} \int dK \{b''^* b'' + \omega_k^2 a''^* a''\} \\ \Phi^{(0)} &= \frac{1}{2} \Gamma \int dK \frac{1}{\omega_k} e^{-ikx_1} |a''(k)|^2 \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

wo

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{l^3 Y_1^2} \left(\sim \frac{1}{l} \right). \quad (76)$$

Die eingestrichenen Freiheitsgrade sind bereits separiert. Das Hauptachsenproblem von $\mathcal{H}'' + \Phi^{(0)}$ führt auf folgendes lineare Gleichungssystem:

$$(\omega_k^2 - \nu^2) a''(k) + \frac{\Gamma}{\omega_k} e^{ikx_1} \cdot \int dK' \frac{1}{\omega_{k'}} e^{-ik'x_1} a''(k') = 0. \quad (77)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass für jede Eigenfrequenz ν der Ausdruck $a''(k) \cdot (\omega_k^2 - \nu^2) \omega_k e^{-ikx_1}$ von k unabhängig ist. Setzt man demgemäss

$$a''(k) = \alpha(\nu) \cdot \frac{1}{\omega_k (\omega_k^2 - \nu^2)} e^{ikx_1}, \quad (78)$$

so ergibt sich durch Einsetzen in (77):

$$1 + \Gamma \cdot \int dK' \frac{1}{\omega_{k'}^2 (\omega_{k'}^2 - \nu^2)} = 0.$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte ν haben wir also die Gleichung

$$\int dK \frac{1}{\omega_k^2 (\nu^2 - \omega_k^2)} = \frac{1}{\Gamma}. \quad (79)$$

Um eine abzählbare Schar von Eigenfrequenzen zu erhalten, verwandeln wir wie üblich den kontinuierlichen k -Raum in ein Punktgitter, indem wir im Koordinatenraum eine Periodizitätsforderung gestellt denken. Die Elementarzelle des k -Gitters habe

das Volumen v , so dass das Symbol $\int dK \dots$ durch $v \cdot \sum_k \dots$ zu ersetzen ist. Die den verschiedenen Gitterpunkten in V zuzuordnenden ω_k -Werte mögen so gewählt sein, dass keine zwei unter ihnen gleich sind; diese Wahl ist zulässig, da die Beziehung $\omega_k^2 = \mu^2 + k^2$ erst im Limes $v = 0$ exakt zu gelten braucht. An Stelle von (79) hat man jetzt:

$$\sum_k \frac{1}{\omega_k^2 (v^2 - \omega_k^2)} = \frac{1}{v \Gamma}, \quad (80)$$

wo die Summe über die Gitterpunkte in V zu erstrecken ist. Lässt man v in dem Intervall zwischen zwei benachbarten ω_k -Werten variieren, so variiert die linke Seite von (80) monoton zwischen $+\infty$ und $-\infty$, so dass ein und nur ein v -Wert in diesem Intervall die Gleichung (80) befriedigt¹⁾. Es liegt also zwischen je zwei konsekutiven ω_k -Werten gerade eine Eigenfrequenz ν_p , ferner noch eine weitere oberhalb des höchsten ω_k -Wertes ($\omega_{\max} \cong (\mu^2 + 3(\pi/l)^2)^{\frac{1}{2}}$), da von dort aus die linke Seite von (80) monoton von ∞ auf 0 abfällt. Diese höchste Eigenfrequenz, die ν_0 heissen möge, ist, wie man leicht abschätzt, nicht wesentlich grösser als ω_{\max} , d. h. von der Grössenordnung $1/l$.

Die Energie-Eigenwerte der Gleichung (73) sind nun:

$$E = -g^2 Y_1 + \sum_k \omega_k (n_k' + \frac{1}{2}) + \sum_p \nu_p (n_p'' + \frac{1}{2}). \quad (81)$$

Die Energie des Grundzustandes ($n_k', n_p'' = 0$) unterscheidet sich von der Nullpunktsenergie des Vacuum-Mesonfeldes um

$$-g^2 Y_1 + \frac{1}{2} \left(\sum_p \nu_p - \sum_k \omega_k \right); \quad (82)$$

diese Energiedifferenz kann als die Selbstenergie des Proton-Neutrons in unserer Näherung interpretiert werden. Dazu liefert die Eigenfrequenz ν_0 einen Beitrag der Grössenordnung $1/l$, während die anderen Summenterme in (82) höchstens einen Beitrag der gleichen Ordnung geben können (wegen $\omega_{\max} - \omega_{\min} \sim 1/l$). Dieses Resultat stimmt übrigens, was die Grössenordnung anlangt, mit dem der störungsmässigen Berechnung nach § 6 überein. Verglichen mit dem Hauptterm $g^2 Y_1 (\sim g^2/l)$ sind die Terme $\sim g^0$ unbedeutend. Es sei daran erinnert, dass die Ladungsabhängigkeit der Selbstenergie erst in den Termen $\sim g^{-2}$ zutage tritt.

¹⁾ Vgl. eine ähnliche Diskussion bei WIGNER, CRITCHFIELD und TELLER, Phys. Rev. 56, 530, 1939.

Die zu einer Eigenfrequenz ν_p gehörige Lösung a'' von (77) nennen wir $u_p(k)$; also nach (78):

$$u_p(k) = \alpha_p \cdot \frac{1}{\omega_k (\omega_k^2 - \nu_p^2)} e^{ikx_1}. \quad (83)$$

Da keine Entartung vorliegt, besteht Orthogonalität, und durch Wahl von α_p kommt:

$$\sum_k u_p^*(k) u_{p'}(k) = \delta_{pp'}. \quad (84)$$

Die Einführung der Normalkoordinaten durch

$$a''(k) = \sum_p u_p(k) a(p), \quad b''(k) = \sum_p u_p^*(k) b(p) \quad (85)$$

bewirkt dann die Separation von $\mathcal{H}'' + \Phi^{(0)}$ und gestattet die Eigenfunktionen F^+ von (73) in bekannter Weise zu bestimmen, worauf hier nicht eingegangen zu werden braucht.

Bei der Diskussion wollen wir eine einschränkende Voraussetzung machen, die, wie sich zeigen wird, hohe Frequenzen ausschliesst. Wir sahen oben, dass ausser ν_0 jede Eigenfrequenz ν_p zwischen zwei Frequenzen ω_k liegt, sagen wir: zwischen ω_p und ω_{p+1} . Es sei nun angenommen, dass ν_p sehr viel näher bei ω_p liegt als bei ω_{p+1} :

$$|\nu_p - \omega_p| \ll |\nu_p - \omega_{p+1}|. \quad (86)$$

Dies wird allgemein der Fall sein, wenn $|\nu_p - \omega_p|$ klein ist gegen den mittleren Abstand zweier benachbarter ω_k -Werte, d. i. gegen

$$\frac{v}{4\pi\omega_p |p|}$$

(wo $|p| = \sqrt{\omega_p^2 - \mu^2}$); wir fordern demnach:

$$\frac{1}{4\pi\omega_p} \cdot \frac{v}{|\nu_p - \omega_p|} \gg |p|. \quad (87)$$

Um zu sehen, unter welchen Umständen diese Bedingung erfüllt ist, spalten wir in der Summe in (80) den grössten Term ($k = p$) ab und schreiben, unter Vernachlässigung von Termen, die nach (86) klein sind:

$$\sum_k \frac{1}{\omega_k^2 (\nu_p^2 - \omega_k^2)} = \frac{1}{2\omega_p^3 (\nu_p - \omega_p)} + \sum'_{k \neq p} \frac{1}{\omega_k^2 (\omega_p^2 - \omega_k^2)}.$$

Zur Abschätzung der \sum'_k kann man diese durch ein Integral über den k -Raum ersetzen, wo eine schmale Kugelschale ($\omega_p - \varepsilon < \omega_k < \omega_p + \varepsilon$) auszulassen ist; dies ist gleichbedeutend damit, dass bei

der Integration über den Pol des Integranden der Hauptwert des Logarithmus zu nehmen ist; auf diese Weise ergibt sich:

$$v \cdot \sum'_{\substack{k \\ (k \neq p)}} \frac{1}{\omega_k^2 (\omega_p^2 - \omega_k^2)} = - \frac{2 \pi^2 \mu}{\omega_p^2}.$$

Durch Einsetzen in (80) erhält man:

$$\frac{1}{4 \pi \omega_p} \cdot \frac{v}{\nu_p - \omega_p} = \frac{\omega_p^2}{2 \pi \Gamma} + \pi \mu. \quad (88)$$

Dieser Ausdruck soll nun nach (87) gross gegen $|p|$ sein, was für

$$|p| \ll \mu \quad (89)$$

offenbar erfüllt ist; dagegen ist $|p| \gtrsim \mu$ unzulässig, da dann $|p| \sim \omega_p$ und $\omega_p^2/\Gamma \sim \omega_p^2 l \gtrsim \omega_p$ ist. Die Bedingung (87) lässt also nur Meson-Geschwindigkeiten zu, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind. Dann ist übrigens in (88) der erste Term rechterhand klein gegen den zweiten (wegen $1/\Gamma \sim l \ll 1/\mu$), so dass man setzen kann:

$$\frac{v}{\nu_p - \omega_p} = 4 \pi^2 \mu^2. \quad (90)$$

Von den zur Eigenfrequenz ν_p gehörigen Eigenschwingungskomponenten $u_p(k)$ (83) ist dann diejenige mit $k = p$ die bei weitem grösste:

$$u_p(p) = \alpha_p \cdot \frac{1}{2 \mu^2 (\omega_p - \nu_p)} e^{i p x_1} = - \alpha_p \cdot \frac{2 \pi^2}{v} e^{i p x_1}; \quad (91)$$

für die übrigen Komponenten kann man angenähert schreiben:

$$u_p(k) = \alpha_p \cdot \frac{1}{\omega_k (\omega_k^2 - \omega_p^2)} e^{i k x_1} \quad (k \neq p). \quad (92)$$

Die dieser Eigenschwingung im Koordinatenraum entsprechende Ortsfunktion ist

$$u_{p,s} = v \sum_k u_p(k) e^{-i k x_s}. \quad (93)$$

Spalten wir hier wieder den grössten Term $k = p$ ab, und ersetzen wir die restliche Summe durch ein Integral, so kommt mit (91), (92):

$$u_{p,s} = \alpha_p \left\{ -2 \pi^2 e^{-i p (x_s - x_1)} + \int dK \frac{1}{\omega_k (\omega_k^2 - \omega_p^2)} e^{-i k (x_s - x_1)} \right\}.$$

Das k -Integral stellt bekanntlich eine Kugelwelle mit dem Punkt x_1 als Zentrum dar, und zwar eine Superposition von auslaufender und einlaufender Kugelwelle, wenn wie oben bei der Integration über den Pol des Integranden der Hauptwert des Logarithmus genommen wird. Eine auslaufende Kugelwelle allein erhält man, wie bekannt, indem man dem Pol nach einer Seite ausweicht; dann ergibt sich für $|x_s - x_1| \gg 1/|p|$:

$$u_{p,s} = -2\pi^2 \alpha_p \left\{ e^{-ip(x_s - x_1)} + \frac{1}{\mu} \frac{e^{-i|p||x_s - x_1|}}{|x_s - x_1|} \right\}. \quad (94)$$

Hier ist gemäss (89) $\omega_p = \mu$ gesetzt.

Dass die Eigenschwingungen nicht reine ebene Wellen, sondern ebene plus Kugelwellen sind, heisst natürlich, dass die Mesonen durch das Proton-Neutron *gestreut* werden. Die Amplitude der Streuwelle entspricht einem Wirkungsquerschnitt der Grösse $4\pi/\mu^2$. Da $1/\mu \gg l$ vorausgesetzt wurde, ist diese Streuung wesentlich stärker als die in § 5 erwähnte Streuung, deren Wirkungsquerschnitt nach der im Anhang 1 mitgeteilten Rechnung von der Grössenordnung l^2 ist.

Ferner ist zu beachten — dies gilt übrigens für beide Arten von Streuung —, dass nur die Eigenschwingungen der zweigestrichenen Freiheitsgrade Streuwellen enthalten, während die eingestrichenen Eigenschwingungen reine ebene Wellen sind. Berechnet man nun für irgendeinen Zustand des Mesonfeldes die Ladung e_s in einem Punkte $s \neq 1$:

$$e_s = i(q_s p_s - q_s^* p_s^*) = (Q_s' + Gl^3 Y_s) P_s'' - Q_s'' P_s',$$

so treten in e_s keine Terme auf, welche die *Amplitudenquadrate* der Kugelwellen enthalten (d. h. welche zu $|x_s - x_1|^{-2}$ proportional sind); wohl gibt es Interferenzterme zwischen ebenen und Streuwellen, doch liefern diese im Mittel über genügend grosse Raumbereiche keinen Beitrag zur Ladung. Dies kann aber nur bedeuten, dass *die Streuwellen im Mittel ungeladen sind, also gleichviel positive und negative Mesonen enthalten, gleichgültig, welche Ladung die Primärwelle trägt*. Wenn also ein positives Meson auf ein Proton oder Neutron auftrifft, ist das gestreute Meson mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv oder negativ geladen. Diese Möglichkeit der Streuung unter Ladungswechsel hängt mit der Existenz der isobaren Protonzustände beliebiger Ladung zusammen: wenn ein positives Meson sich in ein negatives umwandelt, nimmt die Kernpartikel zwei Ladungseinheiten auf. Dass die Streuprozesse

mit und ohne Ladungswechsel sich als gleichwahrscheinlich ergeben, beruht natürlich auf der Vernachlässigung des Massenunterschiedes der beiden isobaren Endzustände; wenn dieser Massenunterschied mit $(\omega_p - \mu)$ vergleichbar ist, werden sich quantitative Unterschiede in der Streuwahrscheinlichkeit ergeben.

Man kann den Streuvorgang noch näher untersuchen, indem man solche Zustände des Mesonfeldes betrachtet, in denen eine bestimmte Eigenschwingung, die als Superposition einer eingestrichenen und einer zweigestrichenen Komponente gewonnen wird, einfach besetzt ist. Während diesen Komponenten einzeln die Streuquerschnitte 0 bzw. $4\pi/\mu^2$ zukommen, ergibt sich für die Streuung eines positiven oder eines negativen langsamen Mesons der Wirkungsquerschnitt $2\pi/\mu^2$, wovon je die Hälfte auf die Streuung mit und ohne Ladungswechsel entfällt.

Wie weit sich die Eigenschwingungen mit $|p| \lesssim \mu$ berechnen lassen, ohne dass willkürliche Annahmen über die Gitterstruktur des x - und des k -Raumes wesentlich eingehen, müsste eine besondere Untersuchung lehren, auf die hier verzichtet werden soll. Es sei nur bemerkt, dass die störungsmässige Berechnung nach § 6 in der ersten Näherung einen Streuquerschnitt von der Grössenordnung $1/l^2 \omega_p^4$ liefert, was für kleine Energien ω_p nach Obigem sicher zu hoch liegt; immerhin deutet dieses Ergebnis darauf hin, dass der Streuquerschnitt mit wachsender Energie abnimmt, und und zwar bei den höchsten Energien ($\omega_p \sim 1/l$) vermutlich bis zur Grössenordnung l^2 .

II. Die Kernkräfte.

§ 8. Verallgemeinerung der Ansätze des § 4.

Es mögen jetzt N ruhende Proton-Neutronen vorhanden sein; ihre Orte, die beliebig wählbar sind, nennen wir x_1, x_2, \dots, x_N ; die Gitterpunkte $s > N$ sind von Kernpartikeln frei. Somit schreiben wir statt (6):

$$H = H^0 - G \sum_{s \leq N} \{(\tau_1^{(s)} + i\tau_2^{(s)}) \psi_s + (\tau_1^{(s)} - i\tau_2^{(s)}) \psi_s^*\}. \quad (95)$$

Die Schrödingerfunktion F , die jetzt 2^N Komponenten hat, bestimmt sich durch

$$(H - E)F = 0. \quad (96)$$

In Verallgemeinerung der kanonischen Transformation (26), (27) führen wir jeweils für $s \leq N$ in der komplexen ψ_s -Ebene

Polarkoordinaten q_s, ϑ_s ein. Die neuen Lagenkoordinaten seien:
für $s \leq N$: q_s, ϑ_s (hermitisch), für $s > N$: q_s, q_s^* (nicht-hermitisch),
und die dazu kanonisch konjugierten Impulse:

für $s \leq N$: p_s, p_{ϑ_s} (hermitisch), für $s > N$: p_s, p_s^* (nicht-hermitisch).
Die Transformationsformeln lauten:

$$s \leq N: \left\{ \begin{array}{l} \psi_s = q_s e^{i \vartheta_s}, \quad \psi_s^* = q_s e^{-i \vartheta_s}, \\ \pi_s = \frac{1}{2} e^{-i \vartheta_s} \left(p_s - \frac{i}{q_s} p_{\vartheta_s}' \right), \quad \pi_s^* = \frac{1}{2} e^{i \vartheta_s} \left(p_s + \frac{i}{q_s} p_{\vartheta_s}' \right), \end{array} \right\} \quad (97)$$

$$s > N: \psi_s = q_s e^{i \vartheta}, \quad \psi_s^* = q_s^* e^{-i \vartheta}, \quad \pi_s = p_s e^{-i \vartheta}, \quad \pi_s^* = p_s^* e^{i \vartheta},$$

wo

$$p_{\vartheta_s}' = p_{\vartheta_s} - \frac{1}{N} i \sum_{r > N} (q_r p_r - q_r^* p_r^*) \quad (s \leq N), \quad (98)$$

$$\vartheta = \frac{1}{N} \sum_{s \leq N} \vartheta_s. \quad (99)$$

Die Vertauschungsrelationen der alten und neuen Variablen folgen auseinander; dabei ist wieder wesentlich, dass $p_{\vartheta_s}' (s \leq N)$ mit den $\psi_r, \psi_r^*, \pi_r, \pi_r^* (r > N)$ kommutiert. $p_{\vartheta_s}' = i (\psi_s \pi_s - \psi_s^* \pi_s^*)$ bedeutet die Mesonladung e_s am Punkte s ; folglich gilt nach (98):

$$\sum_{s \leq N} p_{\vartheta_s}' = \sum_{s \leq N} e_s + \sum_{r > N} e_r = \sum_s e_s \quad (100)$$

= Gesamtladung des Mesonfeldes.

In den neuen Variablen lautet H^0 (3):

$$H^0 = \frac{1}{4} \sum_{s \leq N} \left(\frac{1}{\sqrt{q_s}} p_s^2 \sqrt{q_s} + \frac{1}{q_s^2} (p_{\vartheta_s}'^2 - \frac{1}{4}) \right) + \sum_{s > N} p_s^* p_s + \sum_{r, s} \check{c}_{rs} q_r^* q_s, \quad (101)$$

wo $q_r^* = q_r$ für $r \leq N$, und wo

$$\left. \begin{array}{l} \check{c}_{rs} = c_{rs} e^{i(\vartheta_s - \vartheta_r)}, \quad \text{wenn } r \leq N, s \leq N, \\ \check{c}_{rs} = c_{rs} e^{i(\vartheta - \vartheta_r)} = \check{c}_{sr}^*, \quad \text{wenn } r \leq N, s > N, \\ \check{c}_{rs} = c_{rs}, \quad \text{wenn } r > N, s > N. \end{array} \right\} \quad (102)$$

H_0 hängt also jetzt von den Azimutwinkeln ϑ_s ab, aber, genauer gesagt, nur von den Differenzen $\vartheta_s - \vartheta_r$: es besteht Invarianz gegenüber der Substitution $\vartheta_s \rightarrow \vartheta_s + \varphi, \vartheta \rightarrow \vartheta + \varphi$, entsprechend dem Erhaltungssatz für die Gesamtladung.

In Verallgemeinerung des Ansatzes (29) setzen wir:

$$F = \prod_{s \leq N} \left(e^{i(m_s + \frac{1}{2} \tau_3^{(s)}) \vartheta_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{q_s}} \right) \cdot F', \quad (103)$$

mit ganzzahligen $m_s \pm \frac{1}{2}$, wo die 2^N Komponenten von F' nur noch von den q_s, q_s^* und von den relativen Azimuten $\vartheta_s - \vartheta_r$ abhängen sollen. Dann bedeutet

$$\sum_{s \leq N} (m_s + \frac{1}{2} \tau_3^{(s)}),$$

wie aus (100) ersichtlich, die Gesamtladung des Mesonfeldes, und

$$\sum_{s \leq N} (m_s + \frac{1}{2})$$

bedeutet die Ladung des Gesamtsystems: Mesonen plus Proton-Neutronen.

In Berücksichtigung der für die isotopen Spinmatrizen gültigen Relationen

$$\tau_2^{(s)} \tau_3^{(s)} = i \tau_1^{(s)}, \quad \tau_1^{(s)} \tau_3^{(s)} = -\tau_3^{(s)} \tau_1^{(s)} = -i \tau_2^{(s)}$$

findet man durch elementare Rechnung:

$$\{(\tau_1^{(s)} + i \tau_2^{(s)}) e^{i\vartheta_s} + (\tau_1^{(s)} - i \tau_2^{(s)}) e^{-i\vartheta_s}\} \cdot e^{\frac{i}{2} \tau_3^{(s)} \vartheta_s} = e^{\frac{i}{2} \tau_3^{(s)} \vartheta_s} \cdot \tau_1^{(s)}.$$

Somit ergibt sich durch Einsetzen von (103) in (96), (95) die folgende Schrödingergleichung für F' , welche den früheren Gleichungen (30) entspricht:

$$\left\{ \frac{1}{4} \sum_{s \leq N} \left(p_s^2 + \frac{p_{(s)}'^2 - \frac{1}{4}}{q_s^2} \right) + \sum_{s > N} p_s^* p_s + \sum_{r, s} \check{c}_{r s} q_r^* q_s - 2G \sum_{s \leq N} \tau_1^{(s)} q_s - E \right\} F' = 0, \quad (104)$$

wo

$$p'_{(s)} = (m_s + \frac{1}{2} \tau_3^{(s)}) + p_{\vartheta_s} - \frac{1}{N} i \sum_{r > N} (q_r p_r - q_r^* p_r^*). \quad (105)$$

Nach seinem Ursprung entspricht $p'_{(s)}$ der Mesonladung am Punkte $s (\leq N)$.

Wir interessieren uns nun, starke Kopplung voraussetzend, wieder nur für die Lösungen mit negativer Selbstenergie, und nach dem Vorangegangenen werden wir erwarten, eine gute erste Nähe-

zung zu erhalten, wenn wir alle 2^N Komponenten von F' einander gleich setzen und die Terme $(p'_{(s)} - \frac{1}{4})/q_s^2$ in (104) vernachlässigen:

$$\left\{ \frac{1}{4} \sum_{s \leq N} p_s^2 + \sum_{s > N} p_s^* p_s + \sum_{r, s} \check{c}_{r, s} q_r^* q_s - 2 G \sum_{s \leq N} q_s - E \right\} F^+ = 0, \quad (106)$$

wo F^+ eine einkomponentige Funktion ist.

§ 9. Die Kernkräfte in erster Näherung (Terme $\sim g^2$).

Die zu (33) analoge Translation im q -Raume sei jetzt:

$$\left. \begin{aligned} q_s &= Q_s + Gl^3 \cdot Z_s, & q_s^* &= Q_s^* + Gl^3 \cdot Z_s^*, \\ p_s &= P_s, & p_s^* &= P_s^*, \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

wo

$$Q_s = Q_s^*, P_s = P_s^*, Z_s = Z_s^* \quad \text{für } s \leq N. \quad (108)$$

Zur Beseitigung der linearen Glieder in (106) fordern wir:

$$\left. \begin{aligned} \sum_s (\check{c}_{rs} Z_s + \check{c}_{sr} Z_s^*) &= 2l^{-3} & \text{für } r \leq N, \\ \sum_s \check{c}_{rs} Z_s &= 0 & \text{für } r > N. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Dann wird nämlich

$$\sum_{r, s} \check{c}_{rs} q_r^* q_s - 2 G \sum_{s \leq N} q_s = \sum_{r, s} \check{c}_{rs} Q_r^* Q_s - g^2 \sum_{s \leq N} Z_s. \quad (110)$$

Anstelle von (109) schreiben wir nach (102) und (108):

$$\sum_{s \leq N} c_{rs} \cos(\vartheta_r - \vartheta_s) Z_s + \sum_{s > N} c_{rs} \frac{1}{2} (e^{i(\vartheta - \vartheta_r)} Z_s + e^{-i(\vartheta - \vartheta_r)} Z_s^*) = l^{-3} \quad \text{für } r \leq N, \quad (111)$$

$$\sum_{s \leq N} c_{rs} e^{i(\vartheta_s - \vartheta)} Z_s + \sum_{s > N} c_{rs} Z_s = 0 \quad \text{für } r > N. \quad (112)$$

Um zunächst die Z_s mit $s > N$ zu eliminieren, setzen wir:

$$Z_t = \sum_{s \leq N} \alpha_{st} e^{i(\vartheta_s - \vartheta)} Z_s \quad (t > N) \quad (113)$$

und fordern, um (112) zu genügen:

$$\sum_{t > N} c_{rt} \alpha_{st} = -c_{rs} \quad \text{für } r > N, s \leq N. \quad (114)$$

Die hierdurch definierten α_{st} bestimmen sich wie folgt: Sei

$$Y_{rs} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dK \frac{1}{\omega_k^2} e^{ik(x_s - x_r)}, \quad (115)$$

wo Y_{1s} mit dem früheren Y_s (35) übereinstimmt, so gilt nach (4) und (1):

$$\sum_s c_{rs} Y_{r's} = l^{-3} \delta_{rr'}. \quad (116)$$

Ferner sei Δ die N -reihige Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{vmatrix}, \quad (117)$$

und ihre $(N - 1)$ -reihigen Unterdeterminanten seien Δ_{rs} :

$$\Delta_{rs} = \frac{\partial \Delta}{\partial Y_{rs}}. \quad (118)$$

Dann lautet die Lösung von (114):

$$\alpha_{st} = \frac{1}{\Delta} \sum_{r \leq N} \Delta_{rs} Y_{rt} \quad (s \leq N, t > N). \quad (119)$$

In der Tat kommt hiermit wegen (116):

$$\sum_{t > N} c_{rt} \alpha_{st} = \frac{1}{\Delta} \sum_{r' \leq N} \Delta_{r's} (l^{-3} \delta_{rr'} - \sum_{t \leq N} c_{rt} Y_{r't})$$

oder wegen $\sum_{r' \leq N} \Delta_{r's} Y_{r't} = \Delta \cdot \delta_{st}$ (für $t \leq N$):

$$\sum_{t > N} c_{rt} \alpha_{st} = \begin{cases} -c_{rs} & \text{für } r > N, \\ -c_{rs} + l^{-3} \cdot \frac{\Delta_{rs}}{\Delta} & \text{für } r \leq N, \end{cases} \quad (120)$$

was für $r > N$ mit (114) übereinstimmt. Die α sind wie die Y reell. Eliminiert man nun mit Hilfe von (113) die Z_t ($t > N$) aus (111), so kommt:

$$\sum_{s \leq N} Z_s \cos(\vartheta_r - \vartheta_s) \cdot (c_{rs} + \sum_{t > N} c_{rt} \alpha_{st}) = l^{-3} \quad (r \leq N),$$

oder mit (120):

$$\sum_{s \leq N} Z_s \cdot \cos(\vartheta_r - \vartheta_s) \cdot \Delta_{rs} = \Delta \quad (r \leq N). \quad (121)$$

Diese N linearen Gleichungen dienen zur Bestimmung von Z_1, Z_2, \dots, Z_N , und damit zur Berechnung des konstanten Terms in (110):

$$-g^2 \sum_{s \leq N} Z_s = E_0, \quad (122)$$

welcher für den tiefsten Eigenwert E der Näherungsgleichung (106) massgebend ist. Zur Berechnung der höheren Eigenwerte

hätte man noch die Hauptachsentransformation der quadratischen Form in (110) durchzuführen, was mit derselben Methode wie für $N = 1$ (Anhang 1) geschehen kann. Da für die Diskussion der Kernkräfte die Kenntnis des tiefsten Energie-Eigenwertes genügt, gehen wir darauf nicht ein. Es sei aber bemerkt, dass bei Vernachlässigung der Mesonstreuung, die im Limes $l = 0$ verschwindet (vgl. Anhang 1), die Eigenfunktionen der Gleichung (106) wie im Falle $N = 1$ mit den Vacuum-Eigenfunktionen identisch werden; insbesondere sind sie in dieser Näherung von den relativen Azimuten $\vartheta_s - \vartheta_r$ unabhängig.

Dagegen ergeben sich die Energie-, „Eigenwerte“ vermöge (122) und (121) als Funktionen von $\cos(\vartheta_r - \vartheta_s)$ ($r, s = 1 \cdots N$), was den *Austauschcharakter* der Kernkräfte bekundet. In der Tat ist nach (103)

$$e^{i(\vartheta_r - \vartheta_s)} F_{m_1 \cdots m_r \cdots m_s \cdots m_N} = F_{m_1 \cdots m_{r+1} \cdots m_{s-1} \cdots m_N},$$

d. h. der Operator $e^{i(\vartheta_r - \vartheta_s)}$ verwandelt die Eigenfunktion F in eine andere, deren Ladungsquantenzahlen m_r, m_s um 1 grösser bzw. kleiner sind. Dieser „Austauschoperator“ wirkt also nicht etwa auf die isotopen Spinindices der Kernpartikel; vielmehr handelt es sich um einen Ladungsaustausch, der als direkter Übergang eines gebundenen Mesons vom Teilchen r zum Teilchen s oder umgekehrt gedeutet werden kann. Man bestätigt dies leicht durch Anwendung der Operatoren $p'_{\vartheta_r}, p'_{\vartheta_s}$ (98), die nach § 8 die Mesonladungen in den Punkten r, s darstellen; es gilt nämlich:

$$p'_{\vartheta_r} e^{i(\vartheta_r - \vartheta_s)} F = e^{i(\vartheta_r - \vartheta_s)} (p'_{\vartheta_r} + 1) F,$$

$$p'_{\vartheta_s} e^{i(\vartheta_r - \vartheta_s)} F = e^{i(\vartheta_r - \vartheta_s)} (p'_{\vartheta_s} - 1) F.$$

Die weitere Aufgabe, die Energie als Matrix bezüglich der Ladungsquantenzahlen auf Diagonalf orm zu transformieren, braucht hier nicht behandelt zu werden.

Für die folgende Diskussion bemerken wir noch, dass nach (115) die Y_{rs} für $r = s$ alle einander gleich und gleich dem in §§ 5 bis 7 verwendeten Y_1 (38) sind:

$$Y_{ss} = Y_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dK \frac{1}{\omega_k^2}, \quad (123)$$

während sich für $|x_s - x_r| \gg l$ gemäss (40) das Yukawa-Potential ergibt:

$$Y_{rs} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\mu|x_s - x_r|}}{|x_s - x_r|} \quad \text{für } |x_s - x_r| \gg l. \quad (124)$$

Für den Fall, dass N (die Anzahl der anwesenden Proton-Neutronen) gleich 2 ist, ergibt die Auflösung der Gleichungen (121):

$$Z_1 = Z_2 = \frac{(Y_1^2 - Y_{12}^2)(Y_1 + Y_{12} \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2))}{Y_1^2 - Y_{12}^2 \cos^2(\vartheta_1 - \vartheta_2)}. \quad (125)$$

Die Energie $E_0 = -g^2 \cdot 2 Z_1$ geht für $|x_1 - x_2| = \infty$, $Y_{12} = 0$ in das Doppelte der früher berechneten Selbstenergie eines Proton-Neutrons ($-g^2 Y_1$) über; zieht man die Selbstenergie der beiden Partikeln von E_0 ab, so entspricht der Rest ihrer potentiellen Energie:

$$E_{\text{pot}} = -2 g^2 (Z_1 - Y_1) \\ = -2 g^2 \frac{(Y_1^2 - Y_{12}^2) Y_{12} \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) - Y_1 Y_{12}^2 \sin^2(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{Y_1^2 - Y_{12}^2 \cos^2(\vartheta_1 - \vartheta_2)}. \quad (126)$$

Für Abstände $|x_1 - x_2| \gg l$ (wobei durchaus $|x_1 - x_2| \gtrsim 1/\mu$ sein darf, sofern $l \ll 1/\mu$) wird

$$\frac{Y_{12}}{Y_1} \sim \frac{l}{|x_1 - x_2|} \ll 1$$

und man erhält aus (126) angenähert:

$$E_{\text{pot}} = -2 g^2 Y_{12} \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = -g^2 Y_{12} (e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)} + e^{i(\vartheta_2 - \vartheta_1)}). \quad (127)$$

Im Limes $l = 0$ gilt dies sogar exakt, wenigstens was die Terme $\sim g^2$ anlangt. Obwohl hier das negative Yukawa-Potential als Faktor auftritt, weicht unser Ergebnis doch von dem Bekannten insofern ab, als in (127) die Summe *zweier* Austausch-Operatoren auftritt; so wird beispielsweise das Paar „Neutron-Proton“ durch den Operator (127) nicht nur in das Paar „Proton-Neutron“, sondern auch in das Paar „negatives Proton-doppeltpositives Proton“ verwandelt. In sehr kleinen Abständen ($|x_1 - x_2| \sim l$) ist der Austauschcharakter nach (126) noch komplizierter.

Will man also z. B. die stationären Zustände eines Zweikörperproblems (etwa des Deuterons) in üblicher Weise berechnen, so führt dieses Problem auf unendlich viele Differentialgleichungen für ebenso viele Schrödingerfunktionen, da ja alle Zustände gleicher Gesamtladung ($m_1 + m_2 = m = \text{const.}$) direkt oder indirekt miteinander gekoppelt sind. Dabei ist der Charakter der Differentialgleichungen von m ganz unabhängig, da E_{pot} in unserer Näherung von m_1, m_2 nicht abhängt: die Kräfte sind „ladungsunabhängig“; für alle m -Werte ergibt sich das gleiche (kontinuierliche) Energiespektrum der stationären Zustände. Allerdings gilt dies nur bei konsequenter Vernachlässigung aller Terme niederer Ordnung in g , was in praxi unzulässig ist, da zum mindesten die Abhängigkeit

der Teilchenmasse von der Ladungszahl berücksichtigt werden sollte, welche nach (72) in den Termen der Ordnung g^{-2} zutage tritt. Die hier erhaltene Ladungsunabhängigkeit der Kräfte beruht also ganz wesentlich auf der Annahme $g \gg 1$. Würde man versuchsweise den Kraftansatz (127) auch auf den Fall $g \lesssim 1$ anwenden (obwohl er nur für $g \gg 1$ abgeleitet ist) und E_{pot} als klein gegen den Massenunterschied von Proton und doppelpositivem Proton betrachten, so würde sich die Kopplung mit den höheren Isobaren als belanglos erweisen, d. h. (127) wäre praktisch gleichbedeutend mit einem *nur* zwischen Proton und Neutron wirkenden Austauschpotential, wie es auch die Yukawa'sche Theorie für geladene Mesonen (ohne „Neutretto“-Feld) für $g \ll 1$ in erster störungsmässiger Näherung liefert.

Für den Fall, dass die Partikelzahl $N > 2$ ist, nehmen wir einfachheitshalber an, dass die Partikelabstände r alle $\gg l$ seien, und entwickeln nach Potenzen von l/r . Da dann nach (123), (124) die Ausserdiagonalglieder der Determinante Δ (117) wie l/r klein gegen die Diagonalelemente sind, ergeben sich für Δ und für die Unterdeterminanten Δ_{rs} folgende Entwicklungen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= Y_1^N (1 - Y_1^{-2} \sum_{s < s'} Y_{ss'}^2 + \dots) \\ \Delta_{rr} &= Y_1^{N-1} (1 - Y_1^{-2} \sum_{\substack{s < s' \\ (s, s' \neq r)}} Y_{ss'}^2 + \dots) \\ \Delta_{rs} &= Y_1^{N-2} (-Y_{rs} + Y_1^{-1} \sum_{\substack{s' \\ (s' \neq r, s)}} Y_{rs'} Y_{s's} + \dots) \quad (r \neq s). \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Hier laufen alle Summationsindices nur zwischen 1 und N . Entwickeln wir entsprechend auch Z_s :

$$Z_s = Z_s^0 + Z_s' + Z_s'' + \dots, \quad (129)$$

so ergibt sich aus den Termen höchster Ordnung ($\sim Y_1^N$) in den Gleichungen (121):

$$Z_r^0 = Y_1, \quad (130)$$

und durch schrittweises Weitergehen zu höheren Näherungen:

$$\begin{aligned} Z_r' &= \sum_{\substack{s \\ (s \neq r)}} Y_{rs} \cos(\vartheta_r - \vartheta_s), \quad (131) \\ Z_r'' &= \frac{1}{Y_1} \left\{ - \sum_{\substack{s \\ (s \neq r)}} Y_{rs}^2 + \sum_{\substack{s, s' \\ (s \neq r, s' \neq s)}} Y_{rs} Y_{ss'} \cos(\vartheta_r - \vartheta_s) \cos(\vartheta_s - \vartheta_{s'}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{s, s' \\ (s \neq r, s' \neq r, s' \neq s)}} Y_{rs} Y_{ss'} \right\}, \dots \quad (132) \end{aligned}$$

Für $N = 2$ stimmt dies mit der Entwicklung von (125) überein.

In der Energie E_0 (122) entsprechen die Terme höchster Ordnung in l/r der Selbstenergie der N Partikeln; zieht man diese ab, so bleibt für die potentielle Energie:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{pot}} &= V' + V'' + \dots \\ V' &= -g^2 \sum_r Z_r' = -g^2 \sum_{\substack{r,s \\ (r \neq s)}} Y_{rs} \cos(\vartheta_r - \vartheta_s), \\ V'' &= -g^2 \sum_r Z_r'', \dots \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

V' ist die Summe der Wechselwirkungsenergien der einzelnen Partikelpaare gemäss (127). V'' enthält (in den dreifachen Summen) Terme, die von den Koordinaten dreier Partikel abhängen; diese stellen „Dreikörperkräfte“ dar. In V''' treten auch Vierkörperkräfte auf, usf., Diese n -Körperkräfte sind aber, verglichen mit den Zweikörperkräften, klein wie $(l/r)^{n-2}$; im Limes $l = 0$ bleibt V' allein übrig.

§ 10. Die Selbstenergie von N Kernpartikeln; Terme $\sim g^0$.

Die Berechnung der Energie-Eigenwerte bis zur Ordnung g^0 kann im Prinzip ebenso durchgeführt werden, wie dies in § 7 für den Fall $N = 1$ geschah. Bezüglich der abstandsabhängigen Terme ergibt sich dabei nichts wesentlich Neues: zu (133) treten nur Potentialterme ähnlichen Charakters hinzu, die aber grössenordnungsmässig um den Faktor g^{-2} kleiner sind; wir gehen hierauf nicht ein. Merkwürdig ist aber, dass die Selbstenergie, wenn man die Abstände aller Partikelpaare unendlich gross werden lässt, im Limes *nicht* proportional der Partikelzahl N wird. Die Gültigkeit dieser Aussage dürfte kaum auf den Fall starker Kopplung beschränkt sein. Da es sich hier um eine Frage handelt, die trotz des problematischen Charakters aller Selbstenergie-Betrachtungen von prinzipieller Bedeutung sein könnte, sei der Sachverhalt kurz geschildert.

Führt man für den Fall $N > 1$ die gleichen Überlegungen durch, die in § 7 zu den Formeln (73) bis (80) führten, und zwar für so grosse Partikelabstände, dass alle nicht-diagonalen Y_{rs} vernachlässigt werden können, so erhält man als Gleichung für die Bestimmung der Eigenfrequenzen ν_p anstelle von (80):

$$\sum_k \frac{1}{\omega_k^2 (\nu^2 - \omega_k^2)} = \frac{1}{v \Gamma} \cdot \frac{1}{N^2}, \quad (134)$$

mit der gleichen Bedeutung von Γ (vgl. (76)). Der neue Faktor $1/N^2$ stammt daher, dass das in $\Phi^{(0)}$ (75) quadratisch auftretende

Integral jetzt eine Summe von N Termen an Stelle eines einzigen enthält, so dass nach Vernachlässigung der Interferenzterme (Y_{rs} mit $r \neq s$) Γ mit N^2 multipliziert erscheint.

Für die Lösungen der Gleichung (134) gilt qualitativ wieder das in § 7 Gesagte: zwischen zwei benachbarten ω_k -Werten gibt es eine und nur eine Lösung ν_p , und eine letzte ν_0 liegt oberhalb des höchsten ω_k -Wertes (ω_{\max}). In quantitativer Hinsicht ist aber die Abhängigkeit der ν_p von N offenbar eine komplizierte, namentlich für $p = 0$. Bildet man nun, in Verallgemeinerung von (81) und (82), die Energie des Grundzustandes des mit N Proton-Neutronen gekoppelten Mesonfeldes, bzw. ihren Überschuss über die Nullpunktsenergie des Vacuumfeldes:

$$E_0(N) = -g^2 Y_1 \cdot N + \frac{1}{2} \left(\sum_p \nu_p(N) - \sum_k \omega_k \right), \quad (135)$$

so wird der hier erhaltene Term der Ordnung g^0 keineswegs zu N proportional sein. Eine rohe Abschätzung für $N = 1$ und $N = 2$ ergibt, dass $E_0(2)$ *kleiner* als das Doppelte von $E_0(1)$ ist, und zwar ist $2 E_0(1) - E_0(2)$ von der Grössenordnung $1/l$. Sofern also $E_0(1)$ als die wirkliche Selbstenergie des Protons gelten darf, würde dies heissen, dass das Wechselwirkungspotential zweier Partikel mit wachsendem Abstand nicht gegen Null geht, sondern einem negativen Wert der Ordnung $1/l$ zustrebt. Bei Vorgängen, in denen sich die Partikelzahl ändert, wie bei der Paar-Erzeugung, müsste sich eine derartige Nicht-Additivität der Selbstenergie bemerkbar machen.

Diese Schwierigkeit besteht indessen nur, solange man nur *wenige* Kernpartikeln als existent annimmt. Im Limes $N \rightarrow \infty$ nähern sich nämlich die ν_p mit $p \neq 0$ asymptotisch den Lösungen der Gleichung

$$\sum_k \frac{1}{\omega_k^2 (\nu^2 - \omega_k^2)} = 0, \quad (136)$$

d. h. sie streben gegen konstante Grenzwerte; andererseits wächst ν_0 über alle Grenzen, wie daraus zu ersehen ist, dass die entsprechende Lösung der Gleichung (136) $\nu = \infty$ ist; sobald aber $\nu_0 \gg \omega_{\max}$, kann man statt (134) schreiben:

$$\frac{1}{\nu_0^2} \sum_k \frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{\nu \Gamma} \cdot \frac{1}{N^2},$$

oder:

$$\nu_0 = \alpha \cdot N, \quad \text{wo } \alpha = \left(\Gamma \nu \sum_k \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} = ((2\pi)^3 \Gamma Y_1)^{\frac{1}{2}} = (l^3 Y_1)^{-\frac{1}{2}} \sim 1/l.$$

Dies gilt, wie man leicht sieht, bis auf Terme, die für $N = \infty$

verschwinden. Somit geht $E_0(N)$ für grosse N asymptotisch in eine lineare Funktion von N über:

$$E_0(N) = -\left(g^2 Y_1 - \frac{\alpha}{2}\right) N + \text{const.}^1). \quad (137)$$

Die additive Konstante kann man durch eine Subtraktionsvorschrift beseitigt denken. Somit entspricht die Theorie, was die Terme $\sim g^0$ anlangt, wenigstens im Limes $N \rightarrow \infty$ den gewohnten Vorstellungen.

§ 11. Diskussion.

Bevor wir daran gehen, die Hauptergebnisse der vorstehenden Rechnungen im Hinblick auf die aktuellen Probleme der Mesontheorie kurz zu diskutieren, sei nochmals an die zugrunde gelegten Voraussetzungen erinnert. Neben der Beschränkung auf geladene Mesonen mit Spin 0 war wesentlich die Annahme „starker Kopplung“ zwischen Mesonen und Kernpartikeln, was — in dem hauptsächlich interessierenden Fall „Gitterkonstante $l \lesssim$ Meson-Comptonwellenlänge $1/\mu$ “ — bedeutete, dass der Kopplungsparameter $g = Gl^{\frac{3}{2}}$ gross gegen $(\mu l)^{-\frac{1}{2}}$ sein sollte (vgl. (39)). Übrigens ist es diese Voraussetzung in erster Linie, die uns hindert, in den obigen Formeln die Gitterkonstante l , die die Rolle einer Abschneidelänge spielt, gegen null gehen zu lassen, es sei denn, dass man gleichzeitig g wie $l^{-\frac{1}{2}}$ gegen ∞ gehen liesse, was aber zu unendlich grossen Kernkräften führen würde. Da jedoch das Problem des Grenzübergangs $l \rightarrow 0$ mit dem speziellen Ziel dieser Arbeit nichts zu tun hat, betrachten wir die Länge l hier als eine gegebene, nicht verschwindende Konstante.

Obwohl dem Proton-Neutron a priori nur zwei Zustände mit den Ladungen 0 und +1 zugeschrieben wurden, besitzt es, wie wir gezeigt haben, bei starker Kopplung mit dem Mesonfeld stationäre Zustände mit beliebigen Ladungszahlen $Z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dies ist so zu verstehen, dass das Proton-Neutron imstande ist, Mesonen dauernd an sich zu binden, und zwar ohne dass damit notwendig die Anwesenheit freier Mesonen verknüpft wäre. Die Masse bzw. die Selbstenergie der verschiedenen „Proton-Isobaren“ ergab sich näherungsweise als eine quadratische Funktion der Ladungszahl Z :

$$E = \text{const.} + \varepsilon(Z - \frac{1}{2})^2,$$

wo $\varepsilon \sim g^{-2} l^{-1}$ im Falle $l \lesssim 1/\mu$ (vgl. (72)).

¹⁾ Setzt man diese Entwicklung nach fallenden Potenzen von N fort, so lautet der nächste Term: $\alpha/4N$. Die Reihe bricht also keineswegs beim konstanten Glied ab.

Trotz oberflächlicher Ähnlichkeit darf man diese aus der Yukawa'schen Theorie abgeleiteten Aussagen nicht verwechseln mit der kürzlich von HEITLER¹⁾ veröffentlichten Hypothese, nach welcher den Kernpartikeln a priori, d. h. unabhängig von der Kopplung mit dem Mesonfeld, energetisch höhere Zustände mit den Ladungswerten -1 und $+2$ zugeschrieben werden. Eine solche Hypothese greift tief in die Grundlagen der Yukawa'schen Theorie ein und führt dementsprechend auch zu ganz anderen Folgerungen, so z. B. hinsichtlich der Mesonstreuung, die sich viel kleiner ergibt infolge gewisser, aus der Theorie der Lichtstreuung bekannter Interferenz-Effekte. Gerade dieser Umstand hat HEITLER zur Aufstellung seiner Hypothese veranlasst, da der grosse Streuquerschnitt der ursprünglichen Yukawa-Theorie mit den Experimenten nicht verträglich war. Die Unterschiede der Heitler'schen gegenüber der Yukawa'schen Theorie treten am deutlichsten zutage, wenn man dem Proton unendlich viele A-priori-Zustände zuschreibt, derart dass alle ganzzahligen Ladungen vorkommen und die Masse von der Ladungszahl unabhängig ist (was natürlich nur näherungsweise zutreffen könnte); koppelt man das skalare Mesonfeld mit einem so beschaffenen „Proton“, so lässt sich, wie wir im Anhang zeigen (vgl. Anhang 2), das statische Mesonfeld exakt abseparieren, und die Mesonstreuung am ruhenden (unendlich schweren) Proton verschwindet identisch (bei beliebiger Kopplungsstärke, nicht nur in störungsmässiger Näherung)²⁾.

Wenn unsere auf Grund der ursprünglichen Yukawa-Theorie für den Fall starker Kopplung gewonnenen Aussagen, trotz des Auftretens höherer isobarer Zustände, ganz anders lauten, so beruht dies natürlich auf den andersartigen Eigenschaften dieser Isobaren, die aus je einem Proton-Neutron und gebundenen Mesonen zusammengesetzt sind. Freilich wird eine *qualitative* Übereinstimmung zwischen beiden Theorien bestehen hinsichtlich solcher Folgerungen, die wesentlich nur auf der *Existenz* der isobaren Zustände beruhen. Dies gilt beispielsweise von der β -Instabilität der höheren Isobaren, wobei zu bemerken ist, dass die Lebensdauer unserer zusammengesetzten Isobaren durch diejenige des Mesons eindeutig bestimmt ist. Was den Austauschcharakter der Kernkräfte anlangt, treten in beiden Theorien Austauschoperatoren auf, die der Möglichkeit der Umwandlung in höhere Isobare Rechnung tragen (vgl. § 9). Auch gehen beide Theorien darin einig, dass ein Meson bei der Kernstreuung seine Ladung umkehren

¹⁾ Nature **145**, 29, 1940.

²⁾ Auf die Verallgemeinerung für vektorielle Mesonen gehen wir hier nicht ein.

kann, indem die Kernpartikel zwei Ladungseinheiten aufnimmt oder abgibt (§ 7). Diese Übereinstimmung erstreckt sich aber keineswegs auf die quantitativen Verhältnisse.

Die hier für starke Kopplung ($g \gg 1$) erhaltenen Aussagen können natürlich nicht unmittelbar mit Erfahrungsdaten verglichen werden. Dies gilt namentlich von den Kernkräften, von denen wir gezeigt haben (§ 9), dass sie bei zunehmendem g asymptotisch wie g^2 anwachsen. Anders der Streuquerschnitt, der nach § 7 nicht über alle Grenzen anwächst, sondern einem konstanten Grenzwert zustrebt, nämlich dem Wert $2\pi/\mu^2$ im Falle langsamer Mesonen (wovon je die Hälfte auf die Streuung mit und ohne Ladungswechsel entfällt, falls der Massenunterschied der beteiligten Proton-Isobaren vernachlässigbar ist). Dieser Grenzwert des Streuquerschnitts liegt jedoch sehr hoch, mindestens 2 Zehnerpotenzen über dem für mittlere Energien ($\sim \mu$) beobachteten Querschnitt¹⁾, und es wäre daher für die Beurteilung der Yukawa'schen Theorie wichtig, zu untersuchen, etwa durch Fortsetzung der Entwicklung nach fallenden Potenzen von g , ob die Theorie eine genügend starke Abnahme des Streuquerschnitts beim Übergang von hohen zu mittleren Kopplungsstärken erwarten lässt. Auch müssten Mesonen mit Spin 1 und mit Spinkopplung in Rechnung gesetzt werden. Indessen ist zuzugeben, dass wir keinen Anhaltspunkt gefunden haben, der eine *einfache* Erklärung der schwachen Streuung auf Grund der unmodifizierten Yukawa'schen Theorie erhoffen lässt²⁾, so dass in dieser Hinsicht eine Hypothese wie die oben erwähnte Heitler'sche einen grossen Vorzug besitzt.

Anhang 1 (zu § 5).

Die Eigenschwingungen U'' .

Die Hauptachsentransformation von \mathcal{H}'' (42) erfordert die Auflösung der Gleichungen:

$$\sum'_s c_{rs} U_s'' - \nu^2 U_r'' = 0 \quad (r \neq 1, s \neq 1). \quad (138)$$

Wegen des Fehlens des Freiheitsgrades $s = 1$ sind die Lösungen nicht exakt ebene Wellen; wir schreiben sie als Fourier-Integrale:

$$U_s'' = V^{-\frac{1}{2}} \int dK \gamma(k) e^{ikx_s}. \quad (139)$$

¹⁾ J. G. WILSON, Proc. Roy. Soc. **174**, 73, 1940.

²⁾ Der Heisenberg'sche Einwand gegen die Störungstheorie der Streuung, dass sie die Rückwirkung der Streuwelle auf das streuende Teilchen ausser acht lässt (ZS. f. Phys. **113**, 61, 1939), kann gegen unsere Rechnung nicht erhoben werden.

Beachtet man, dass nach (1) und (4)

$$\sum_s' c_{rs} e^{ikx_s} = -c_{r1} e^{ikx_1} + \omega_k^2 e^{ikx_r},$$

so erhält man durch Einsetzen von (139) in (138):

$$\int dK \gamma(k) \{ -c_{r1} e^{ikx_1} + (\omega_k^2 - \nu^2) e^{ikx_r} \} = 0$$

für alle $r \neq 1$. Multiplikation mit $e^{-ik'x_r}$ und Summation nach r , unter Ausschluss von $r = 1$, ergibt bei nochmaliger Verwendung von (1) und (4):

$$\int dK \gamma(k) \{ c_{11} - (\omega_k^2 + \omega_k^2 - \nu^2) \} e^{i(k-k')x_1} + V \gamma(k') (\omega_{k'}^2 - \nu^2) = 0. \quad (140)$$

Der hier auftretende Koeffizient $c' = c_{11} - (\omega_k^2 + \omega_k^2 - \nu^2)$ enthält nur Terme, die durch das Fehlen des Freiheitsgrades 1 bedingt sind; es liegt daher nahe, ihn als kleine Grösse zu behandeln. Wäre er null (wie im Falle der Eigenschwingungen U' in § 5), so wären die Lösungen von (140): $\nu = \omega_p$, $\gamma(k') = \delta(k' - p)$, wo p ein beliebiger Wellenzahlvektor im Periodizitätsbereich V ist. Wir versuchen daher den Näherungsansatz:

$$\nu = \omega_p, \quad \gamma(k) = \delta(k - p) + \gamma'(k), \quad (141)$$

wo γ' wie c' klein ist, derart dass Terme $\sim \gamma' c'$ vernachlässigt werden können. Dann folgt aus (140) für $k' \neq p$:

$$\gamma'(k') = -\frac{1}{V} \frac{c_{11} - \omega_{k'}^2}{\omega_{k'}^2 - \omega_p^2} e^{i(p-k')x_1},$$

und mit (141) und (139):

$$U_s''(p) = V^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{ipx_s} - e^{ipx_1} \cdot \frac{1}{V} \int dK \frac{c_{11} - \omega_k^2}{\omega_k^2 - \omega_p^2} e^{ik(x_s - x_1)} \right\} (s \neq 1). \quad (142)$$

Die Eigenschwingung U_s'' besteht also aus einer ebenen und einer Streuwelle mit Zentrum in x_1 . Durch die Ausführung der Integration nach $|k|$ (Umgehung des Pols $|k| = |p|$ in der komplexen Ebene) kann bekanntlich erreicht werden, dass die Streuwelle nur eine auslaufende Kugelwelle enthält. Für $|p| < \pi/l$ (die Kugel $|p| = \text{const}$ liegt ganz im Periodizitätsbereich V) erhält man in bekannter Weise, sofern $|x_s - x_1| \gg 1/|p|$:

$$U_s''(p) = V^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{ipx_s} - e^{ipx_1} \cdot \frac{e^{i|p||x_s - x_1|}}{|x_s - x_1|} \cdot \frac{2\pi^2}{V} (c_{11} - \omega_p^2) \right\}. \quad (143)$$

Die Amplitude der Streuwelle entspricht einem Wirkungsquerschnitt

$$Q = 4 \pi \left[\frac{2 \pi^2}{V} (c_{11} - \omega_p^2) \right]^2 = \frac{1}{4 \pi} [l^3 (c_{11} - \omega_p^2)]^2. \quad (144)$$

(Vgl. hierzu aber § 7: der Streuquerschnitt eines positiven oder eines negativen Mesons ist = $Q/2$.) Für c_{11} ergibt sich aus der Definitionsgleichung (4) durch Ausführung der Integration über den Periodizitätskubus V :

$$c_{11} = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + \mu^2, \quad \text{also } c_{11} - \omega_p^2 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 - p^2.$$

Hiermit wird

$$Q = \frac{\pi^3}{4} l^2 \left[1 - \left(\frac{l}{\pi} p \right)^2 \right]^2 \quad \left(|p| < \frac{\pi}{l} \right). \quad (145)$$

Der Streuquerschnitt ist also von der Grössenordnung l^2 .

Es bleibt noch zu beweisen, dass je zwei Eigenschwingungen (142) aufeinander orthogonal sind, auch wenn sie zur gleichen Eigenfrequenz ω_p gehören. In der Tat ergibt sich aus (142), wenn entsprechend unserer Rechengenauigkeit die in den Streuwellen-Amplituden quadratischen Terme vernachlässigt werden, mit Hilfe von (1):

$$\begin{aligned} \sum_s' U_s''^*(p) U_s''(p') - \delta(p - p') &= \\ &= -\frac{1}{V} e^{i(p'-p)x_1} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{11} - \omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega_{p'}^2} - \frac{1}{V} \int dK \frac{c_{11} - \omega_k^2}{\omega_k^2 - \omega_{p'}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{c_{11} - \omega_{p'}^2}{\omega_{p'}^2 - \omega_p^2} - \frac{1}{V} \int dK \frac{c_{11} - \omega_k^2}{\omega_k^2 - \omega_p^2} \right) \right] \\ &= e^{i(p'-p)x_1} \cdot \frac{1}{V^2} \int dK (c_{11} - \omega_k^2) \left(\frac{1}{\omega_k^2 - \omega_{p'}^2} + \frac{1}{\omega_k^2 - \omega_p^2} \right). \end{aligned}$$

Der hier übrigbleibende Ausdruck muss aber, da für $\omega_{p'} \neq \omega_p$ die Orthogonalität aus den Definitionsgleichungen der Eigenschwingungen folgt, die Grössenordnung der vernachlässigten Terme haben, und dies gilt offenbar auch im Limes $\omega_{p'} = \omega_p$, was zu beweisen war.

Anhang 2 (zu § 11).

Zur Hypothese der Zustände höherer Ladung.

Wir beschränken uns wieder auf den Fall des skalaren geladenen Mesonfeldes und benutzen zu seiner Beschreibung dieselben Bezeichnungen wie bisher (vgl. § 2). Es befinde sich wiederum eine (unendlich schwere) Kernpartikel am Orte x_1 , doch soll diese jetzt — ohne Mesonen — nicht nur 2, sondern unendlich viele Ladungszustände gleicher Masse besitzen; die Ladungszahl n durchläuft also alle ganzen Zahlen. Ferner sei angenommen, dass hinsichtlich der Wechselwirkung mit dem Mesonfeld alle Ladungszustände gleichberechtigt sind: der Kopplungsparameter soll von der Ladungszahl n unabhängig sein. An Stelle von (9) hat man dann die Gleichungen:

$$(H^0 - E) F_n - G (\psi_1 F_{n+1} + \psi_1^* F_{n-1}) = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \dots), \quad (146)$$

wo F_n die Schrödingerfunktion des Mesonfeldes bedeutet für den Fall, dass sich die Kernpartikel im Ladungszustand n befindet.

Zur Lösung der Gleichungen (145) benutzen wir den Operator:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{in\varphi} e^{-iG l^3 \sum_s Y_s (\pi_s e^{-i\varphi} + \pi_s^* e^{+i\varphi})}. \quad (147)$$

Die Y_s haben hier dieselbe Bedeutung wie in § 5, d. h. es gilt gemäss (36):

$$\sum_s c_{rs} Y_s = l^{-3} \delta_{r1}.$$

Hieraus folgt, bei Verwendung der Hamiltonfunktion (3):

$$[H^0, \sum_s Y_s \pi_s] = i \sum_{r,s} c_{rs} \psi_r^* Y_s = i l^{-3} \psi_1^*.$$

Auf Grund dieser Formel beweist man leicht die Identität:

$$H^0 \cdot A_n - G (\psi_1 A_{n+1} + \psi_1^* A_{n-1}) = A_n \cdot (H^0 - g^2 Y_1), \quad (148)$$

wo gemäss (7) $g^2 = G^2 l^3$. Mit dem Ansatz

$$F_n = F_n^{(m)} = A_{n-m} \cdot f \quad (m = \text{ganze Zahl}) \quad (149)$$

kommt demnach:

$$\begin{aligned} (H^0 - E) F_n^{(m)} - G (\psi_1 F_{n+1}^{(m)} + \psi_1^* F_{n-1}^{(m)}) \\ = A_{n-m} \cdot \{H^0 - (E + g^2 Y_1)\} \cdot f = 0, \end{aligned}$$

womit die Zurückführung auf das bekannte Problem des ungekoppelten Mesonfeldes:

$$\{H^0 - (E + g^2 Y_1)\} f = 0 \quad (150)$$

erreicht ist. Wird also auf irgendeine Eigenfunktion f des „Vacuumfeldes“ der Operator A_{n-m} angewendet, wo m eine beliebige ganze Zahl ist, so resultiert daraus eine Eigenfunktion des Problems (146). Alle Energie-Eigenwerte liegen um $g^2 Y_1$ tiefer als im Vacuumfalle. Wird diese Selbstenergie $-g^2 Y_1 (Y_1 \sim 1/l)$ subtrahiert, so kann man auch ohne weiteres den Grenzübergang $l \rightarrow 0$ vollziehen. Ferner beweist man leicht:

$$\sum_n A_{n-m}^* A_{n-m'} = \delta_{m m'}, \quad \sum_m A_{n-m}^* A_{n'-m} = \delta_{n n'}, \quad (151)$$

woraus die Orthogonalität und die Vollständigkeit der angegebenen Eigenfunktionen folgt.

Der Operator A_n lässt sich durch eine Besselfunktion vom Index n darstellen, worauf aber nicht eingegangen werden soll. Dagegen benutzen wir eine bekannte Rekursionsformel der Besselfunktionen, die sich durch partielle Integration nach φ in (147) ergibt:

$$iGl^3 \sum_s Y_s (\pi_s A_{n-1} - \pi_s^* A_{n+1}) = -n A_n. \quad (152)$$

Kommutiert man nämlich den Operator der totalen Mesonladung

$$e = i \sum_s (\psi_s \pi_s - \psi_s^* \pi_s^*)$$

mit A_n , so ergibt sich gerade der Ausdruck linkerhand in (152); man erhält demnach:

$$[e, A_n] = -n A_n. \quad (153)$$

Wendet man also den Operator e auf eine der Eigenfunktionen (149) an, so kommt:

$$e F_n^{(m)} = e A_{n-m} f = A_{n-m} (-n + m + e) f,$$

und unter Hinzufügung des der Kernladung n entsprechenden Terms:

$$(e + n) F_n^{(m)} = A_{n-m} (m + e) f. \quad (154)$$

Wählt man nun für f solche Vacuum-Eigenfunktionen, welche die Mesonladung e diagonal machen, so ist offenbar im Schema der Eigenfunktionen $F_n^{(m)}$ die Gesamtladung $e + n$ (Meson- plus Kernladung) diagonal, und ihre Eigenwerte sind gleich den Eigenwerten e des Vacuumfeldes, vermehrt um die ganze Zahl m . Somit bedeutet m offenbar die Ladung des Kerns einschliesslich seiner gebundenen Mesonen.

Der Operator A_{n-m} bringt die Verzerrung zum Ausdruck, welche das Vacuumfeld durch die Anwesenheit der Kernpartikel

erfährt. Die räumliche Abhängigkeit dieser Verzerrung wird durch die Koeffizienten Y_s bestimmt, die nach (40), ausser in der nächsten Umgebung des Kerns ($|x_s - x_1| \sim l$), die Ortsabhängigkeit des Yukawa-Potentials aufweisen. Dieses nimmt aber mit wachsendem Abstand exponentiell ab und verschwindet praktisch für $|x_s - x_1| \gg 1/\mu$, so dass dort auch die Verzerrung des Feldes aufhört:

$$A_{n-m} \simeq \delta_{nm}, \quad F_n^{(m)} \simeq f \cdot \delta_{nm} \quad \text{für } |x_s - x_1| \gg 1/\mu. \quad (155)$$

Betrachtet man beispielsweise eine Vacuum-Eigenfunktion f , welche der Anwesenheit eines einzigen Mesons vom Impuls k entspricht, so stimmt das durch die Funktion $F_n^{(m)}$ (mit beliebigem m) beschriebene Mesonfeld in grossen Abständen völlig mit dem entsprechenden Vacuumfeld überein, und das heisst natürlich, dass das Meson an einem Kern der hier betrachteten Art nicht gestreut werden kann. Damit ist der Beweis für die im § 11 angeführte Behauptung erbracht.

Falls N Protonen der betrachteten Art anwesend sind, ist der Operator A_{n-m} in (149) durch ein Produkt von N entsprechenden Operatoren zu ersetzen. Für die Energie des Grundzustandes ergibt sich dann:

$$E_0 = -Ng^2 Y_1 - g^2 \sum_{\substack{rs \\ (r \neq s)}} Y_{rs} O_{rs}, \quad (156)$$

wo Y_{rs} die gleiche Bedeutung wie in § 9 hat (vgl. (115)), und wo O_{rs} den Austauschoperator bedeutet, der die Ladungsquantenzahlen eines Partikelpaars m_r, m_s in $m_r + 1, m_s - 1$ verwandelt (r, s beziehen sich hier nur auf Proton-besetzte Gitterpunkte). Die Kräfte entsprechen also hinsichtlich ihrer Ortsabhängigkeit exakt den Yukawakräften, während ihr Austauschcharakter den beiden Möglichkeiten der Umwandlung in benachbarte Isobarenpaare Rechnung trägt (vgl. §§ 9 und 11).

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.