

# Zum Temperaturproblem der Seen

Autor(en): **Emden, R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **13 (1940)**

Heft V

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111072>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Zum Temperaturproblem der Seen

von R. Emden †.

(27. VIII. 40.)

Über die Temperaturverhältnisse in unseren Seen liegen zahlreiche zuverlässige Messungen vor, deren Ergebnisse aber nur durch mehr oder minder allgemein gehaltene Betrachtungen mit dem Einstrahlungsprozess in Verbindung gebracht werden. Die unvermeidlich auftretenden Konvektionsströme scheinen eine exaktere Behandlung auszuschalten. Die theoretische Untersuchung beschränkt sich, die Bilanz zwischen Einstrahlung und Temperaturgewinn zu ziehen<sup>1)</sup>. Die vorliegende Arbeit versucht, diese Lücke zu schliessen. Denn erst, wenn die Vorbedingungen für das Auftreten dieser Konvektionsströme ermittelt sind, lässt sich ihre Wirkung einigermaßen beurteilen.

Wir denken uns das Seebecken erfüllt mit einer *starren* Masse, aber ausgestattet mit den gleichen physikalischen Eigenschaften wie das Wasser; also gleicher Dichte, gleicher spezifischer Wärme, gleichem Vermögen für Wärmeleitung und gleichen Absorptionsverhältnissen gegenüber eindringender Strahlung. Aus Bequemlichkeitsgründen werden wir dies Gebilde weiterhin einfach den „Glasse“ nennen. Allein selbst die Temperaturvorgänge im Glasse lassen sich nur unter wesentlich vereinfachten Annahmen behandeln. Dass Abkühlung der Oberfläche durch Verdampfen nicht eintreten kann, ist selbstverständlich. Ausgeschlossen wird, dass die Sonnenstrahlung unter mit der Zeit veränderlichen Winkeln einfällt; gleichen Weglängen des eindringenden Strahles würden sonst mit der Zeit veränderliche Seetiefen entsprechen. Die Strahlungsquelle soll deshalb stets im Zenithe stehen. Selbstverständlich können die so wechselnden meteorologischen Bedingungen nicht berücksichtigt werden. Abgesehen wird von dem einfallenden zerstreuten Sonnenlichte und der von der Seeoberfläche reflektierte Betrag von rund 2% einfallender Strahlung sei bereits im Werte der Solarkonstanten berücksichtigt. Von fundamentaler Bedeutung sind die Absorptionsverhältnisse für eindringende Strahlung. Schon oberflächliche Betrachtung zeigt,

<sup>1)</sup> W. SCHMIDT. Absorption der Sonnenstrahlung im Wasser. Wiener Sitzungsberichte. 117. IIa. S. 237. 1908.

dass diese von See zu See ausserordentlich verschieden sein können; doch liegen keine brauchbaren Messungen vor. Hinlänglich genaue Absorptionskoeffizienten sind nur für destilliertes Wasser bekannt. So ist man leider genötigt, destilliertes Wasser anzunehmen und den Einfluss vermehrter Absorption abzuschätzen. Der theoretischen Behandlung liegt somit ein ausserordentlich vereinfachtes Modell zugrunde; trotzdem dürften die Ergebnisse für die Thermik der wirklichen Seen von Bedeutung sein.

### § 1. Exkurs über Wärmeleitung.

Nach weit verbreiteter Meinung spielt beim Temperaturproblem der Seen die Wärmeleitung keine Rolle. Der leitende Gedanke, auf die einfachste Form gebracht, ist folgender. Wir behandeln ein ebenes Wärmeleitungsproblem und legen die  $x$ -Achse vertikal nach unten. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung lautet bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 \text{ für Wasser} = 0,0014 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$$

und soll unter folgenden Bedingungen gelöst werden:

- a) Zur Zeit  $t = 0$  sei die ganze Wassermasse auf der konstanten Temperatur  $u_0$ .
- b) Die Oberfläche werde auf der konstanten Temperatur  $\bar{u}$  gehalten.

Um Konvektionsströme auszuschliessen sei  $\bar{u} > u_0$ . Dann ist nach bekannter Lösung die Temperatur  $u$  in der Tiefe  $x$  zur Zeit  $t$  durch die Bedingung gegeben:

$$\bar{u} - u = (\bar{u} - u_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta. \quad (1)$$

Aus dieser Form der Gleichung ist ersichtlich, dass homologe Zeiten mit dem Quadrate der Tiefe  $x$  anwachsen, was bei zunehmender Tiefe zu ausserordentlich grossen Zeiten führt. Zur Zeit  $t = 0$  sei die Temperaturdifferenz Oberfläche — Tiefe  $x$

$$\bar{u} - u = \bar{u} - u_0.$$

Fragen wir nach der Zeit, die verstreichen muss bis diese Tempera-

turdifferenz auf die Hälfte abgenommen hat, so sind  $x$  und  $t$  so zu wählen, dass

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{1}{2} \text{ wird.}$$

Aus den Tabellen entnehmen wir, dass dann

$$\frac{x}{2a\sqrt{t}} = 0,4769; \quad t = 785,1'' x^2.$$

Es ergeben sich so notwendige Zeiten:

$$\begin{array}{ll} \text{Für } x = 1 \text{ cm} & t = 785,1'' = 13^m 5'' \\ x = 10 \text{ ,,} & = 21^h 48^m \\ = 1 \text{ m} & = 90^d 21^h \\ = 10 \text{ ,,} & = 24,9 \text{ Jahre.} \end{array}$$

Solche Zeiten sind bei den in Betracht kommenden Tiefen selbstverständlich ausgeschlossen, und da sich auch bei anderen, üblicher Weise behandelten Leitungsproblemen Zeiten von gleicher Grössenordnung ergeben, wird gefolgert, dass von Wärmetransport durch Leitung abgesehen werden kann. Dass dieser Schluss nicht haltbar ist, zeigt z. B. die Überlegung, dass eine in die Tiefe absteigende Temperaturwelle durch Leitung ihr Profil ändern muss; ihr Einfluss in einigen andern Fällen wird in der vorliegenden Untersuchung dargelegt werden.

Das Integral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta$$

wird weiterhin mit  $A$  bezeichnet. Wir stellen die Werte des Integrals  $A$  für die in vorliegender Untersuchung in erster Linie in Betracht kommenden  $x$ - und  $t$ -Werte zusammen.

Werte des Integrals A.

$x =$	1	10	20	50	100	500	1000	$\infty$ cm
$t = 1 \text{ h}$	0,247	0,996	1	1	1	1	1	1
12 h	0,072	0,637	0,931	1	1	1	1	1
24 h	0,052	0,480	0,802	0,999	1	1	1	1
30·24 h	0,009	0,093	0,186	0,443	0,760	1	1	1
90·24 h	0,004	0,054	0,108	0,265	0,502	0,991	1	1
180·24 h	0,002	0,038	0,077	0,189	0,368	0,983	1	1



Wir notieren ferner:

$$A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2a\sqrt{t}}{e^{-\beta^2}} d\beta = 0,1 \text{ ergibt } t = 2,2595 \cdot 10^4 x^2$$

$$= 0,2 \quad ,, \quad t = 5,561 \cdot 10^3 x^2$$

$$= 0,4 \quad ,, \quad t = 1,298 \cdot 10^3 x^2$$

$$= 0,6 \quad ,, \quad t = 5,042 \cdot 10^2 x^2$$

$$= 0,8 \quad ,, \quad t = 2,179 \cdot 10^2 x^2$$

$$= 0,9 \quad ,, \quad t = 1,32 \cdot 10^2 x^2$$

$$= 1,0 \quad ,, \quad t = 0,000$$

§ 2. Zahlenwerte.

Die Sonnenstrahlung ändert mit Eindringen in die Seetiefe, da das Absorptionsvermögen des Wassers Funktion der Wellenlänge ist, ihre Zusammensetzung und ihre erwärmende Wirkung pro Wegeinheit. Die vorliegende Untersuchung müsste deshalb in jeder Wellenlänge einzeln mit nachfolgender Summation durchgeführt werden. Man erhält jedoch genügend genaue Werte, wenn man das Sonnen-Spektrum in hinreichend enge Wellenlänge-Bereiche von der Breite  $\Delta\lambda$  einteilt, denen ein mittlerer Absorptionskoeffizient zukommt. Spalte 1 der Tabelle I gibt diese Ein-

Tabelle 1.

$\Delta\lambda (\mu)$	$\nu (\text{cm}^{-1})$	$i_\lambda$ cal/cm <sup>3</sup> min	$i_\lambda \Delta\lambda$ cal/cm <sup>2</sup> min	Trans- missions- koeffizient $p,$	$i_\lambda \Delta\lambda \cdot p_\lambda$ cal/cm <sup>2</sup> min
0,00—0,45	0,0002	—	0,120	0,530	0,0636
0,45—0,50	0,0002	1,733	0,087	0,674	0,0586
0,50—0,55	0,00025	1,584	0,079	0,719	0,0566
0,55—0,60	0,0006	1,469	0,073	0,746	0,0544
0,60—0,65	0,0021	1,308	0,065	0,781	0,0508
0,65—0,70	0,0036	1,129	0,056	0,820	0,0459
0,70—0,75	0,015	0,990	0,049	0,848	0,0415
0,75—0,80	0,023	0,887	0,044	0,860	0,0377
0,80—0,85	0,032	0,775	0,038	0,870	0,0331
0,85—0,90	0,052	0,659	0,033	0,888	0,0284
0,90—1,00	0,24	0,548	0,055	0,893	0,0491
1,00—1,15	0,28	0,414	0,062	0,906	0,0561
1,15—1,35	1,17	0,297	0,059	0,915	0,0540
1,35—1,85	23,0	0,182	0,091	0,902	0,0820
1,85—2,5	67,0	0,059	0,033	0,900	0,0297
2,5 —3,5	1000		} 0,057	0,900	0,0513
3,5—∞	500			1,000	

teilung in Wellenlänge-Bereiche, Spalte 2 den zugehörigen Absorptionskoeffizienten  $\nu$   $\text{cm}^{-1}$  gemittelt aus den umfangreichen Messungsreihen von ASCHKINASS<sup>1)</sup>. Diese Messungen beziehen sich auf destilliertes Wasser. Brauchbare Messungen an Seewasser liegen nicht vor; Wasser verschiedener Seen würde sicher sehr verschiedene Werte liefern, und im einzelnen See können sich die Absorptionsverhältnisse mit dem Gehalt an suspendierten Teilchen von Schicht zu Schicht ändern. So ist man leider auf die Behandlung eines idealisierten Sees aus destilliertem Wasser und Schätzung des Einflusses zunehmender Trübung angewiesen.

Die Angaben über Sonnenstrahlung und atmosphärische Verhältnisse sind den bekannten Veröffentlichungen des Smithsonian Institution entnommen<sup>2)</sup>. Die der Flächeneinheit in Erdentfernung zugestrahlte Energiemenge wird, wie üblich, gemessen in  $\text{cal/cm}^2\text{min}$ ; bei Umrechnung in C.G.S.-System ist deshalb mit 60 zu dividieren. In diesen Einheiten hat die Solarkonstante den Wert 2. Spalte 3 enthält  $i_\lambda$   $\text{cal/cm}^2\text{min}$ <sup>3)</sup>, die Intensität der betr. Wellenlängegruppe, Spalte 4  $i_\lambda \Delta_\lambda$   $\text{cal/cm}^2\text{min}$ , ihren Energiebeitrag, beide bezogen auf Sonnenstrahlung von der Intensität 1. Spalte 5 enthält den Transmissionskoeffizienten  $p_\lambda$  der Atmosphäre<sup>4)</sup> und Spalte 6 den Energiebeitrag, in welchem die Wellenlängegruppe nach Durchlaufen der Atmosphäre die Seeoberfläche erreicht. Der Transmissionskoeffizient der Atmosphäre ergibt sich so zu 0,7928, genügend genau zu 0,8. Zu beachten ist, dass sich diese Werte auf das „ausgeglichene“ Sonnenspektrum beziehen, d. h. die im langwelligen Teile des Sonnenspektrums auftretenden Absorptionsbanden des Wasserdampfes und der Kohlensäure sind durch einen kontinuierlichen Linienzug ausgeglichen. Die Wirkung dieser Bänder wird an geeigneter Stelle berücksichtigt werden.

Die Solarkonstante, die Intensität der Sonnenstrahlung in Erdentfernung, beträgt rund  $2 \text{ cal/cm}^2\text{min}$ . Durch eine Wolkendecke wird dieser Energiestrom abgeschnitten und scheidet für die Erwärmung der Seen aus. In den Veröffentlichungen des Smithsonian Institution (loc. cit.) wird die Anzahl von Tagen mit bedecktem Himmel, über die ganze Erde mitgeteilt, zu 48% angegeben, doch wechselt diese Zahl stark von Ort zu Ort. Die jährlichen Sonnenscheindauern in Wien und Zürich werden zu 1843

<sup>1)</sup> E. ASCHKINASS. Untersuchung des Absorptionsspektrum von Wasser. Wied. Annal., Bd. 55, S. 401, 1895.

<sup>2)</sup> Annales of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution; by C. G. ABBOT, F. P. FOWLE and L. B. ALDRIAN. Washington 1900, 1908, 1913.

<sup>3)</sup> Loc. cit. Bd. I. Table 16.

<sup>4)</sup> Bd. II, p. 112, 113 u. Bd. III, p. 135.

und 1600 St. angegeben; dies sind 42% resp. 37% der möglichen Sonnenscheindauer. Diese Verhältnisse wechseln wieder stark mit der Jahreszeit. In Wien bemisst sich die Sonnenscheindauer im Winter zu 25% im Sommer zu 53%; in Zürich sind die Zahlen 23% und 50%<sup>1)</sup>. Da die Sonnenstrahlung im Sommer ungleich stärker zur Geltung kommt, werden wir mit Werten rechnen, die gegen 50% hinliegen. Nun schwächen Wasserdampf und Kohlensäure durch Absorption die auffallende Sonnensstrahlung um rund 12%, während andererseits der Erdoberfläche durch diffuse Strahlung rund 9% zugeführt werden, wobei die letztere Zahl sehr unsicher ist (Smith. Inst.). Wir werden also keinen grossen Fehler machen, wenn wir für den Erwärmungsprozess der Seen 50% der an der Grenze der Atmosphäre eindringenden Strahlung ansetzen und erreichen dies am einfachsten, wenn wir die Solarkonstante mit halbem Werte, also 1 cal/cm<sup>2</sup>min, einführen. Dadurch kann man leicht zu anderen Werten übergehen, da die berechneten Temperaturen und Wärmemengen der Solarkonstanten direkt proportional sind.

### § 3. Die Differentialgleichung und der stationäre Zustand.

Wir bestimmen wie üblich das Wärmeleitungsvermögen durch einen Koeffizienten  $k$  cal/cm sec, die Temperaturleitung durch den Koeffizienten  $\frac{k}{\rho c} = a^2$  cm<sup>2</sup>/sec. Für Wasser haben beide denselben Zahlenwert 0,0014; er wird unabhängig von der Temperatur angenommen. Die Temperatur absolut werde mit  $T$ , in Celsiusgraden mit  $u$  bezeichnet;  $\Delta T = \Delta u$ . Die  $x$ -Achse geht von der Seeoberfläche senkrecht nach unten.

In der Theorie der Wärmeleitung wird gezeigt, dass in Folge des Leitungsvorganges die Temperatur eines Volumenelementes im Zeitraum  $\Delta t$  gegeben ist durch die Beziehung

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Delta t = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta t = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta t.$$

Beträgt die Sonnenstrahlung  $i$  cal/cm<sup>2</sup>min, so fällt auf die Seeoberfläche in Wellenlänge  $\lambda$  der Energiebetrag  $i_\lambda p_\lambda \Delta \lambda = i'_\lambda \Delta \lambda$ , von dem der Bruchteil  $i'_\lambda \Delta \lambda e^{-\nu_\lambda x}$  das Niveau  $x$  erreicht. Auf dem weiteren Wege  $\Delta x$  wird der Bruchteil  $\nu_\lambda \Delta x$  absorbiert, so dass ein Volumenelement in dieser Tiefe eine Temperatursteigerung

$$\frac{\partial T_\lambda}{\partial t} \Delta t = \frac{\nu_\lambda i'_\lambda \Delta \lambda}{\rho c} e^{-\nu_\lambda x} \Delta t$$

<sup>1)</sup> J. HANN, Lehrbuch der Meteorologie, 3. Aufl., p. 299. Leipzig 1915.

erfährt. Summation beider Grössen gibt die Temperatursteigerung in Folge von Leitung und Einstrahlung und wir erhalten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial T_\lambda}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial x^2} + \frac{\nu_\lambda i_\lambda' \Delta_\lambda e^{-\nu_\lambda x}}{\rho c}.$$

Die Gleichung ist linear und wir erhalten durch Summation über alle Wellenlänge die den Vorgang regelnde Differentialgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Sigma \nu_\lambda i_\lambda' \Delta_\lambda e^{-\nu_\lambda x}}{\rho c}. \quad (2)$$

Dauert der Einstrahlungsprozess genügend lange Zeit an, so wird ein stationärer Zustand erreicht, bedingt durch die Beziehung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Bezeichnen wir die Temperatur, die sich nach  $\infty$  langer Zeit einstellt, mit  $T_\infty$ , so ergibt sich

$$\frac{d^2 T_\infty}{dx^2} = - \frac{\Sigma \nu_\lambda i_\lambda' \Delta_\lambda e^{-\nu_\lambda x}}{k} \quad (3)$$

und integriert unter der Bedingung, dass  $\infty$  hohe Temperaturen ausgeschlossen sind:

$$\frac{dT_\infty}{dx} = + \frac{\Sigma i_\lambda' \Delta_\lambda e^{-\nu_\lambda x}}{k}. \quad (4)$$

Während nach weit verbreiteter Anschauung die Temperatur mit der Tiefe abnimmt, weil die Strahlung in den obersten Schichten am stärksten absorbiert wird, namentlich durch Wegfiltrieren der langwelligen Strahlung, zeigt sich, dass mit Berücksichtigung der Leitung bei genügend langer Einstrahlung gerade das Entgegengesetzte eintritt: in jeder Tiefe, auch an der Oberfläche, nimmt im Glasse, also bei Ausschluss von Konvektionsströmen, die Temperatur mit der Tiefe *zu*. Dabei zeigt sich, dass an der Oberfläche,  $x = 0$ , der Temperaturgradient *unabhängig* von der Wellenlänge, einzig durch die Wärmeleitung  $k$  bedingt ist. Je *schlechter* die Wärmeleitung, desto *grösser* die Temperaturgradienten. Wir bezeichnen weiterhin Grössen, die sich auf die Oberfläche beziehen, durch einen aufgesetzten Querstrich. Dann erhalten wir für die Oberfläche für

$$i = 1 \text{ cal/cm}^2 \text{ sec}, \quad \Sigma i_\lambda' \Delta_\lambda = 0,7928$$

$$\frac{d\bar{T}_\infty}{dx} = + \frac{0,7928}{60 \cdot 0,0014} = + 9,438^\circ/\text{cm}$$



in Folge der Kleinheit von  $k$  ein ausserordentlich hoher Betrag. Bei Temperaturen  $u > 4^{\circ}$  werden Konvektionsströme diese Temperaturzunahme mit der Tiefe ausgleichen. Festzuhalten aber ist das Ergebnis, dass bei dauernder konstanter Einstrahlung der See nicht von der Oberfläche, sondern von der Tiefe aus erwärmt wird. Dies scheinbar widersinnige Resultat wird sich gleich als selbstverständlich herausstellen. Wie der in der Regel beobachtete negative Temperaturgradient resultiert, wird sich in § 6 ergeben.

Bei nochmaliger Integration ergibt sich die Temperaturverteilung des stationären Zustandes

$$T_{\infty} = \bar{T}_{\infty} + \frac{1}{k} \sum \frac{i_{\lambda}' \Delta_{\lambda}}{\nu_{\lambda}} (1 - e^{-\nu_{\lambda} x}). \quad (5)$$

$$T_{\infty} - \bar{T}_{\infty} = u_{\infty} - \bar{u}_{\infty} = + \frac{1}{k} \sum \frac{i_{\lambda}' \Delta_{\lambda}}{\nu_{\lambda}} (1 - e^{-\nu_{\lambda} x}).$$

Die Werte der Tabelle 1 gestatten die Ausrechnung und wir erhalten für den Glassee (die Solarkonstante = 1 cal/cm<sup>2</sup>min gesetzt):

$x =$	0,01	0,1	1	10	20	50	100	500	1000	$\infty$ cm
$u_{\infty} - \bar{u}_{\infty} =$	0,094	0,94	7,80	58,9	109,5	244	454	1646	2876	11560 <sup>o</sup>

Diese hohen Temperaturen in der Tiefe erscheinen auf den ersten Blick widersinnig. Sie werden sofort selbstverständlich durch die Überlegung, dass bei vollständigem Fehlen der Wärmeleitung ( $k = 0$ ) sich an jeder Stelle bei dauernder Einstrahlung durch Absorption stetig wachsende Wärmemengen ansammeln und sich schliesslich  $\infty$  hohe Temperaturen einstellen müssten. Die Leitfähigkeit hat zur Folge, dass im stationären Zustande die absorbierten Wärmemengen nach der Oberfläche abfliessen können. Dazu müssen sich die positiven Temperaturgradienten, mit der Tiefe wachsende Temperaturen, ausbilden. Die berechneten höchsten Temperaturen können sich aber aus einem anderen Grunde nicht einstellen. Die Sonnenstrahlung hat eine effektive Temperatur von 6000<sup>o</sup> und bei Ausschluss anderer Energiequellen kann nach dem 2. Hauptsatze damit keine höhere Temperatur erzielt werden. Der Widerspruch löst sich dadurch, dass bei wachsenden Temperaturen die Wärmeabgabe durch Strahlung nicht mehr ausser acht gelassen werden darf. Bei dem Temperaturproblem der Seen, mit dem wir uns zu beschäftigen haben, treten aber nur Temperaturdifferenzen auf, so dass wir innerhalb der Flüssigkeit von Wärmetransport durch gegenseitige Zustrahlung absehen, was um so gerechtfertigter erscheint, als Wasser für Strahlung dieser Temperaturen höchst wahrscheinlich ausserordentlich undurch-

lässig ist. Müsste die innere Strahlung eines ungleich temperierten Mediums zur Geltung kommen, so müsste die auf der Grundannahme von FOURIER entwickelte Theorie der Wärmeleitung vollständig umgebaut werden. Transport durch Leitung bleibt aber von fundamentaler Bedeutung.

Die massgebende Differentialgleichung würde zu ihrer strengen Lösung erfordern, dass die schliessliche numerische Ausrechnung für jedes  $x$  in den 15 ausgewählten Wellenlängen separat durchgeführt und dann summiert wird. Um diese allzu mühsame Rechenarbeit zu umgehen, ist man auf eine weitere Mittelwertbildung mit all ihrer Unsicherheit angewiesen. Mittelwerte können nach verschiedenen Überlegungen gebildet werden. Wir bilden einen Mittelwert  $|\nu|$  gemäss der Bedingung

$$\Sigma \nu_{\lambda} i_{\lambda}' \Delta_{\lambda} \cdot e^{-\nu_{\lambda} x} = |\nu| e^{-|\nu| x} \Sigma i_{\lambda}' \Delta_{\lambda} = 0,7928 |\nu| e^{-|\nu| x}. \quad (6)$$

Die physikalische Bedeutung dieses Mittelwertes ist klar. Für die weiterhin in Betracht kommenden  $x$ -Werte berechnet sich<sup>1)</sup>:

$x = 0,01$	$0,1$	$1$	$10$	$20$	$50$	$100$	$500$
$ \nu : (1)$	$(0,9)$	$0,3400$	$0,0580$	$0,0385$	$0,0161$	$0,00923$	$0,00251$
		$1000$		$\infty$ cm			
		$0,00147$		$0,00082$ cm <sup>-1</sup>			

Und nun schlagen wir zur weiteren Behandlung des Problems notgedrungen ein überaus gewaltsames Verfahren ein. Wir nehmen an, dass auch bei anderen, physikalisch in Betracht kommenden Mittelwertbildungen sich genügend genau dieselben  $|\nu|$  ergeben würden, so dass jedem  $x$  ein besonderer, ausgezeichneter Mittelwert  $|\nu|$  zukommt. Führen wir weiterhin statt  $|\nu|$  wieder die einfachere Schreibweise  $\nu$  ein und mit  $i$  den Betrag der Sonnenstrahlung, welcher die Seeoberfläche erreicht, so nimmt Gl. (2) die Form an:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{i \nu e^{-\nu x}}{\rho c}, \quad (7)$$

Obwohl  $\nu$  Funktion von  $x$  ist, wird bei der Integration  $\nu$  als Konstante behandelt, bei der numerischen Auswertung aber für jedes  $x$  der zugehörige Wert  $\nu$  angesetzt. Vom rein mathematischen Standpunkte aus ist dies Verfahren gänzlich unstatthaft; in Wirklichkeit werden solche Bedenken wesentlich herabgesetzt durch den

<sup>1)</sup> Aus den von SCHMIDT (loc. cit.) berechneten absorbierten Wärmemengen können folgende  $|\nu|$  abgeleitet werden

$x = 0,01$	$0,1$	$1$	$10$	$100$	$1000$	$10000$	cm
$ \nu  = 0,95$	$0,85$	$0,32$	$0,06$	$0,0103$	$0,0018$	$0,00067$	

Umstand, dass die weiterhin entwickelten Formeln strenge gelten, falls in einzelnen Wellenlängen mit dem zugehörigen konstanten  $\nu_\lambda$  gerechnet wird. Durch nachfolgende Summation können dann beliebig exakte Temperaturwerte ermittelt werden. In jedem Falle könnte so für jede Tiefe ein neuer Mittelwert  $|\nu|$  abgeleitet werden, der dasselbe leistet. An Stelle dieses unbekanntes  $|\nu|$  wird nun der oben berechnete Mittelwert  $\nu$  benutzt, dessen Anwendung durch seinen physikalischen Sinn gestützt wird. Stichproben ergaben für die in Betracht kommenden  $x$ - und  $t$ -Werte annehmbare Übereinstimmung. Auch kommt es bei den folgenden Untersuchungen weniger darauf an, Zahlenwerte als einen Überblick über den Ablauf der Temperaturänderungen zu gewinnen.

(Anmerkung. Mit Rücksicht auf die unsicheren Absorptionsverhältnisse im langwelligen Teile des Spektrums wurden die den Werten  $x$  0,01 und 0,1 cm zugehörigen  $|\nu|$ -Werte durch graphische Extrapolation gewonnen. Für  $x = \infty$  wurde der Mittelwert

$$\frac{1 - e^{-|\nu|x}}{|\nu|} \sum i'_\lambda \Delta_\lambda = \sum i''_\lambda \Delta_\lambda \frac{1 - e^{-\nu_\lambda x}}{\nu_\lambda} \text{ für } x = \infty$$

ermittelt.)

#### § 4. Konstant gehaltene Oberflächentemperatur.

Der Temperaturverlauf im See, bedingt durch Einstrahlung und Wärmeleitung, ist durch Gl. (7) geregelt. Die Gleichung ist vom 2. Grade, eine eindeutige Lösung erfordert 2 Bedingungen. Die einfachsten Verhältnisse liegen vor, wenn sich zur Zeit  $t = 0$  die ganze Wassermasse auf konstanter Temperatur befindet und die Oberfläche weiterhin auf einer andern konstanten Temperatur gehalten wird. Diese Bedingungen sind in Wirklichkeit nicht erfüllt; trotzdem gibt die Lösung Einblick in den tatsächlichen Temperaturgang.

Zu lösen ist die Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{i \nu}{\rho c} e^{-\nu x} \quad (7)$$

mit den Bedingungen

$$\begin{aligned} \text{a) } & t = 0 \quad x > 0 \quad T = \text{const} = T_0 \\ \text{b) } & x = 0 \quad t > 0 \quad T = \text{const} = \bar{T} \end{aligned}$$

Wir haben oben gezeigt, dass die Temperatur  $T_\infty$  des stationären Zustandes durch

$$T_\infty = \bar{T}_\infty + \frac{i}{k \nu} (1 - e^{-\nu x}); \text{ jetzt } \bar{T}_\infty = \bar{T} \quad (5)$$

gegeben ist.



Wir führen eine neue Variable ein

$$y = T - T_{\infty}$$

und erhalten nach leichter Umformung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$a') \quad t=0 \quad x>0 \quad y=T_0-T_{\infty} = \left( T_0 - \bar{T} - \frac{i}{k\nu} \right) + \frac{i}{k\nu} e^{-\nu x} = p + q e^{-\nu x}$$

$$b') \quad x=0 \quad t>0 \quad y = \bar{T} - \bar{T} = 0$$

(8) ist die gewöhnliche Differentialgleichung der Wärmeleitung und mit Berücksichtigung der Nebenbedingungen ergibt sich die bekannte Lösung<sup>1)</sup>:

$$y = p \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta + \frac{q}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\nu\alpha} \left( e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2t}} \right) d\alpha.$$

Setzen wir für  $p$  und  $q$  ihre Werte und für  $y$  wieder  $T - T_{\infty}$  ein, so ergibt sich schliesslich nach leichter Umformung:

$$u - u_0 = T - T_0 = (\bar{T} - T_0) (1 - A) + \frac{i}{k\nu} (1 - e^{-\nu x} - A + B)$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta \quad (9)$$

$$B = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\nu\alpha} \left( e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2t}} \right) d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \left[ e^{a^2\nu^2t - \nu x} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta - e^{a^2\nu^2t + \nu x} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \right]$$

oder anders geschrieben

$$u - \bar{u} = (u_0 - \bar{u}) A + \frac{i}{k\nu} [1 - e^{-\nu x} - A + B]. \quad (9a)$$

Setzt man  $i = 0$ , so erhält man die bereits in § 1 gegebene Lösung eines reinen Wärmeleitungsproblems. Dies reine Leitungsglied ver-

<sup>1)</sup> H. WEBER. Die partiellen Differentialgleichungen der Physik. Bd. II, § 37. Braunschweig 1901.

schwindet, wenn während des Einstrahlungsprozesses die Oberfläche auf ihrer anfänglichen Temperatur gehalten wird,  $\bar{u} = u_0$ ; die Wirkung der Einstrahlung  $i$  ist aber immer noch durch die Wärmeleitung bedingt. Je geringer die Wärmeleitung, desto höhere Temperaturen werden sich im Laufe der Zeit einstellen. Für  $a^2 = 0$  würden schon aus der Differentialgleichung  $\infty$  hohe Temperaturen hervorgehen. Je besser leitend das Material, desto leichter können die absorbierten Wärmemengen nach der Oberfläche abfließen.

Tabelle 2.

$t =$	0,1	0,5	1	12	24	48	96	$\infty$ h
$x = 0,01$ cm	0,055	0,086	0,088	0,111	0,113	0,115	0,116	0,119
0,1	0,52	0,74	0,85	1,04	1,072	1,091	1,10	1,19
1	1,19	3,23	4,16	8,42	8,94	9,12	9,42	9,88
10	0,22	0,96	3,28	17,46	28,20	37,40	47,82	74,6
20	0,00	0,49	1,08	12,85	23,90	39,57	57,75	138,4
50	0,00	0,22	0,44	5,16	10,87	21,46	40,97	309,0
100	0,00	0,16	0,22	2,64	5,29	8,41	16,72	575,8
500	0,000	0,000	0,047	0,522	1,04	2,09	4,17	2090
1000	0,000	0,000	0,020	0,242	0,485	0,969	1,939	3635
$\infty$								14640

Werte  $\frac{i}{k v} (1 - e^{-v x} - A + B)$  für  $i = 1$  cal/cm<sup>2</sup> min.

Wir stellen in Tab. 2 für einige  $x$  und  $t$ -Werte die nach Gl. (9) berechneten Temperaturen zusammen, die sich bei konstanter (bei  $\bar{u} = u_0$ ) Einstrahlung im Betrage von  $i = 1$  cal/cm<sup>2</sup>min ergeben. Würde die Sonne dauernd im Zenite stehend mit einer Solarkonstante 1 cal/cm<sup>2</sup>sec strahlen, so wäre bei einem Transmissionskoeffizienten  $p = 0,8$  anzusetzen  $i = 0,8$  cal/cm<sup>2</sup>min.

Um Überblick zu gewinnen, veranschaulichen wir den Inhalt der Tabelle in 2 Diagrammen; in beiden wird die Temperatur durch die Ordinate gemessen.

Diagramm 1. Auf der Abszissenachse werden die Zeiten aufgetragen, zu jeder Zeit die berechnete Temperatur als Ordinate mit angeschriebenen  $x$ -Werte und dann Kurven  $x = \text{konst.}$  gezogen. Jede dieser Kurven gestattet, die Temperatur in der Tiefe  $x$  als Funktion der Zeit zu verfolgen. Die Kurven liegen scheinbar regellos. An jeder  $x$ -Kurve ist rechts aussen die Temperatur angeschrieben, die sich in dieser Tiefe nach  $\infty$  langer Zeit (stationärer Zustand) einstellt. (Da  $i$  die Strahlung misst, welche die Seeoberfläche erreicht, sind die Seite 403 angeführten stationären Temperaturen im Verhältnis  $\frac{1}{0,7928}$  zu vergrößern.) In Reihenfolge

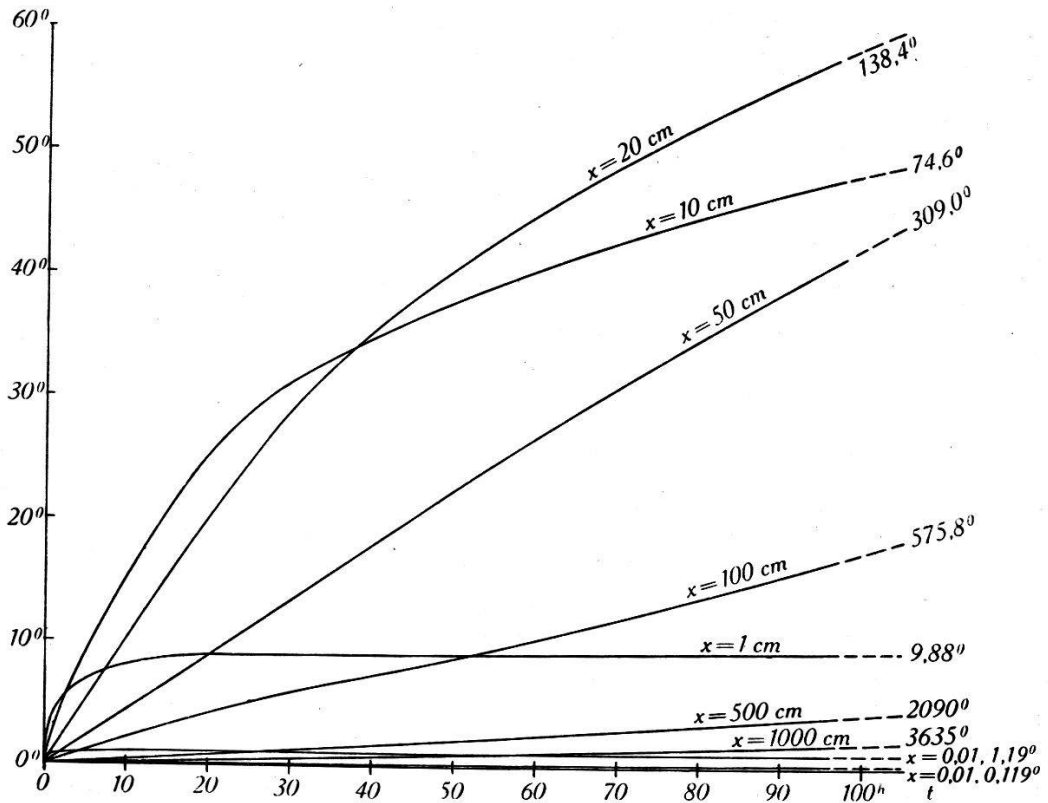


Diagramm 1.

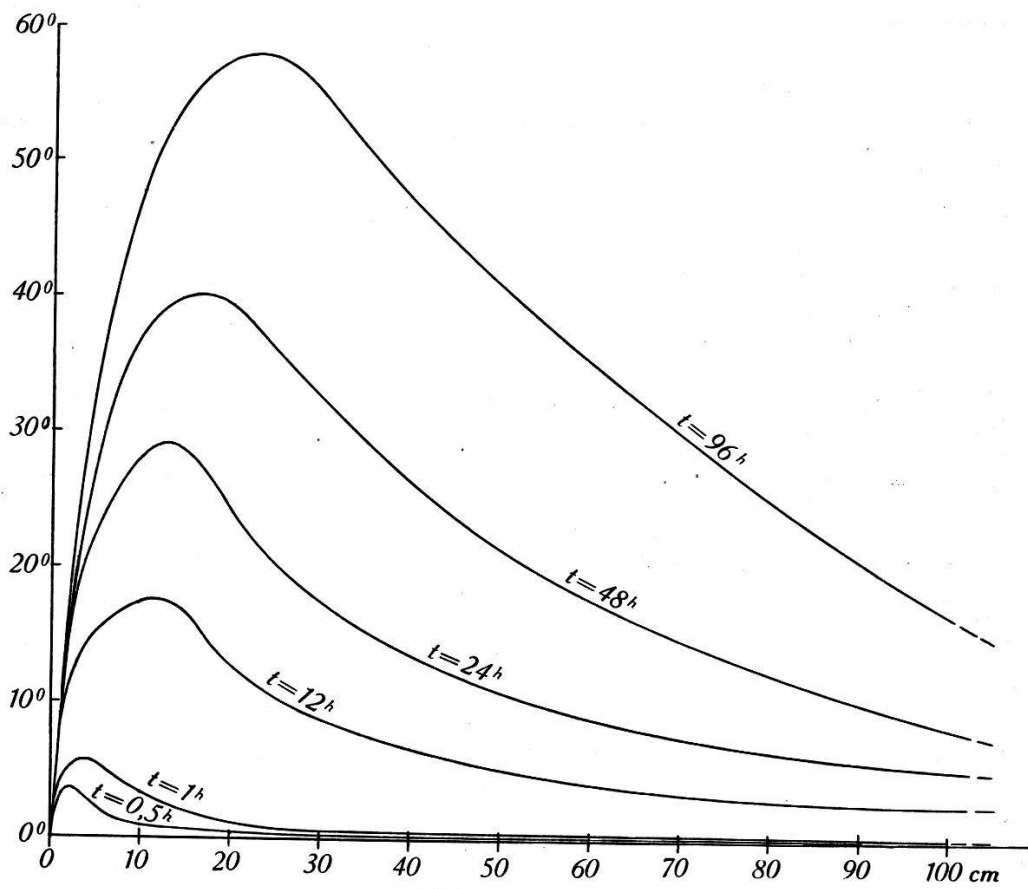


Diagramm 2.

dieser Temperaturen würden die  $x$ -Kurven gehörig verlängert sich anordnen. Dies ist nur möglich, wenn die  $x$ -Kurven sich schneiden und eine Anzahl solcher Schnittpunkte ist im Diagramm sichtbar. Wir gewinnen aber überraschende Einsicht, wenn wir eine andere Art der Darstellung wählen.

Diagramm 2: Auf der Abszissenachse tragen wir die Tiefen  $x$  auf und konstruieren die Kurven  $t = \text{const}$ . Jede Kurve gestattet, zu ihrer Zeit die Temperaturen in der Tiefe  $x$  abzulesen. Die Kurven ordnen sich nach zunehmenden  $t$ -Werten. Auf jeder Kurve liegt eine Maximaltemperatur, deren genauer Wert rechnerisch nur äusserst mühsam festzustellen wäre; doch können, um Überblick zu gewinnen, die Kurven gefühlsmässig ergänzt werden. Unter Ausschluss von Konvektionsströmen würde die Temperatur mit der Tiefe bis zu einem Maximalwerte zunehmen. Im Laufe der Zeit wächst dieser Maximalwert und findet sich in immer grösserer Tiefe vor, um nach  $\infty$  langer Zeit den Maximalwert  $u_\infty$  für  $x = \infty$  anzunehmen. Schnittpunkte der Horizontalen  $u = \text{const}$  mit den Kurven  $t = \text{const}$  bestimmen die Schnittpunkte der  $x$ -Kurven im Diagramm 1. In Wirklichkeit hindern Konvektionsströme den aufsteigenden Ast der Kurven; es bildet sich eine genähert isotherme Schicht in zunehmender Mächtigkeit aus, an welche sich rasche, dann langsam abklingende Temperaturabnahme anschliesst. *So bildet sich durch zunehmende Erwärmung der Tiefe eine Sprungschicht aus.* Wie sich in der warmen Schicht auch schwache negative Temperaturgradienten ausbilden können, wird sich in § 6 ergeben.

### § 5. Erzwungene Oberflächen-Temperatur.

In den Ausführungen des vorigen Paragraphen wurde der Oberfläche des Sees eine bestimmte, konstant bleibende Temperatur vorgeschrieben. In Wirklichkeit aber wird diese Oberflächentemperatur durch Einstrahlung und Wärmeleitung bestimmt und muss rechnerisch ermittelt werden. So besteht äussere Ähnlichkeit mit einem Probleme, das in der Theorie der Wärmeleitung als „Abkühlung durch Wärmeleitung nach aussen“ bekannt ist. Doch liegen hier die Verhältnisse wesentlich anders. Es kann nicht, wie dort, angenommen werden, dass ein äusseres Medium von konstant bleibender Temperatur der Seeoberfläche die Temperatur aufzwingt, vielmehr liegen die Verhältnisse wie bei den andern meteorologischen Prozessen, wo bei ruhender Atmosphäre die Erdtemperatur die Lufttemperatur bestimmt. Das vorliegende Problem nimmt vielmehr seine einfachste Form an, wenn bei *Abwesenheit einer Atmosphäre* die Seeoberfläche Wärme durch Ausstrahlung abgibt.

Die in Betracht kommende Oberflächenbedingung ist prinzipiell einfach. Bildet sich an der Oberfläche ein Temperaturgradient  $\frac{dT}{dx}$  aus, so muss ein Energiebetrag  $S$  durch Strahlung abgegeben werden:

$$k \frac{dT}{dx} = S \quad (10)$$

$S$  sei sekundlich abgegebene Wärmemenge pro Flächeneinheit, und im stationären Zustande muss  $S$  gleich der sekundlich zugestrahlten Energiemenge sein.

In den bisherigen Untersuchung haben wir von der Zustrahlung der Atmosphäre abgesehen und ihren Betrag in  $i$  einbezogen. Ihre Wellenlänge ist im Sonnenspektrum nicht mehr messbar vertreten, und ihr Absorptionskoeffizient ist unbekannt. Nehmen wir an, dass er zum mindesten nicht kleiner ist wie im langwelligen Teile des Sonnenspektrums, wo er ausserordentlich hohe Werte erreicht, so wird sich deren Absorption nur in einer sehr dünnen Oberflächenschicht bemerkbar machen und die oben berechneten  $|\nu|$  nur wenig beeinflussen. Die Bedeutung der atmosphärischen Zustrahlung für die Oberflächentemperatur wird am Ende dieses Paragraphen dargelegt werden.

In erster Linie ist zu bestimmen, bei welcher Oberflächentemperatur die Strahlung  $S$  abgegeben wird. Von der auf die Seeoberfläche auffallenden Strahlung werde in der Wellenlänge  $\lambda$  der Bruchteil  $a_\lambda$  absorbiert, der Bruchteil  $r_\lambda$  reflektiert und der Bruchteil  $d_\lambda$  durchgelassen,  $a_\lambda + r_\lambda + d_\lambda = 1$ . Für einen See, eventuell mit seinem Untergrunde, ist offenbar  $d_\lambda = 0$  und bei senkrechter Inzidenz werden bekanntlich von einer Wasseroberfläche nur rund 2% der einfallenden Strahlung reflektiert,  $r_\lambda = 0,02$ , so dass wir mit hinreichender Genauigkeit  $r_\lambda = 0$  setzen können. (Ein Fehler von 1% in  $a$  würde für das daraus folgende  $T$  einen Fehler von  $\frac{1}{4}\%$  ergeben.) Wir setzen deshalb mit genügender Genauigkeit für die in Betracht kommenden Wellenlängen  $a_\lambda = 1$  mit der Folge, dass die Oberfläche eines Sees schwarze Strahlung aussendet, in der Beziehung:

$$S = s T^4; \quad s = 1,369 \cdot 10^{-12} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec} = 8,21 \cdot 10^{-11} \text{ cal/cm}^2 \text{ min.}$$

Wir erhalten so die Oberflächenbedingung

$$S = k \frac{\partial T}{\partial x} = s T^4. \quad (10)$$

Diese Temperatur ist genau genommen eine „effektive“ Temperatur. Da aber Wasser für die ausgesandte überaus kurzwellige

Strahlung überaus starke Absorption besitzt, sie demnach einfallend bereits in den obersten Schichten absorbiert würde, können wir mit genügender Genauigkeit dieser die Temperatur  $T$  zuschreiben. Zur Orientierung seien einige Temperaturen angegeben, bei welchen ein schwarzer Strahler die Energiemengen  $i$  liefert:

$i =$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,5	cal/cm <sup>2</sup> min
$T =$	186,8	222,1	264,2	292,3	314,3	332,6	348	367	

Die Oberflächenbedingung (10) ist überaus durchsichtig, aber nicht linear und deshalb in Verbindung mit der Differentialgleichung nicht ohne weiteres brauchbar. Wir sind zu einer angenäherten, linearen Umformung gezwungen. Wir führen für die in Wirklichkeit zu erwartenden Temperaturen  $T$  eine mittlere Temperatur  $T_m$  ein, gegeben durch die Bedingung

$$T = T_m + u'0$$

Für die in Wirklichkeit vorkommenden Wassertemperaturen ist das Intervall nicht gross, so dass  $u'$  klein gegen  $T_m$  angenommen werden kann. Wir können deshalb setzen:

$$s T^4 = s (T_m + u')^4 = 4 s T_m^3 \left( \frac{T_m}{4} + u' \right) = H \vartheta ;$$

$$H = 4 s T_m^3 \text{ cal/cm}^2\text{sec}, \quad \vartheta^0 = \frac{T_m}{4} + u'0. \quad (11)$$

Wir setzen, der Wirklichkeit angepasst,  $T_m = 295$  und erhalten so für eine neue Konstante  $h$  einen bequemen Zahlenwert, nämlich

$$H = 0,0001405 \text{ cal/cm}^2\text{sec} \quad \text{und} \quad h = \frac{H}{k} = \frac{0,0001405}{0,0014} = 0,1 \text{ cm}^{-1}.$$

(Wir notieren noch  $273 + u^0 = 295 + u'0$ .) Wir haben so weiterhin 3 Temperaturen zu berücksichtigen:  $T, u, \vartheta$ . Handelt es sich um Temperaturen, die nicht zu weit von 295 abliegen, so können wir mit genügender Genauigkeit  $\Delta T = \Delta u = \Delta \vartheta$  ansetzen, für weiter abliegende Temperaturen wird die Temperatur  $T$  aus der Beziehung  $s T^4 = H \vartheta$  berechnet. Durch Einführung der neuen Konstanten erhalten wir die lineare Oberflächenbedingung

$$\frac{d\vartheta}{dx} = h \vartheta, \quad (12)$$

Formal gleich der Oberflächenbedingung bei „Wärmeabgabe durch Leitung nach aussen“, doch hat jetzt  $h$  einen theoretisch begründeten Wert.



Wir befassen uns nun mit der Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{i\nu}{\rho c} e^{-\nu x} \quad (7)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad t = 0 \quad \vartheta &= \vartheta_0 \\ \text{b)} \quad x = 0 \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= h \vartheta. \end{aligned}$$

Der stationäre Zustand ergibt sich zu

$$\vartheta_\infty = \bar{\vartheta}_\infty + \frac{i}{k\nu} (1 - e^{-\nu x}); \quad \bar{\vartheta}_\infty = \frac{i}{H} = \frac{i}{hk}.$$

Die nicht ganz einfache mathematische Aufgabe kann auf 2 Arten gelöst werden.

I. Wir führen ein

$$v = \vartheta + \frac{i}{k\nu} e^{-\nu x}$$

mit der Folge

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \text{a')} \quad t = 0, \quad v &= \vartheta_0 + \frac{i}{k\nu} e^{-\nu x} \\ \text{b')} \quad x = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - hv &= -\frac{i}{k} \left(1 + \frac{h}{\nu}\right) \end{aligned}$$

und weiter

$$w = \frac{\partial v}{\partial x} - hv$$

mit der Folge

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \text{a'')} \quad t = 0 \quad w &= -h\vartheta_0 - \frac{i}{k} \left(1 + \frac{h}{\nu}\right) e^{-\nu x} = p + qe^{-\nu x} \\ \text{b'')} \quad x = 0 \quad w &= -\frac{i}{k} \left(1 + \frac{h}{\nu}\right). \end{aligned}$$

Wir erhalten so ein Problem, das wir oben (§ 4) bereits gelöst haben. Aus dem so ermittelten  $w$  ergibt sich für  $v$  mit sinngemäß bestimmter Integrationskonstanten

$$v = -e^{+hx} \int_x^\infty e^{-hx} w dx$$



und damit unmittelbar der Wert von  $\vartheta$ . Die Lösung erscheint so in sehr kompakter Form, allein als Doppelintegral, das sich für die numerische Ausrechnung zu spröde erweist.

II. Wir benützen ein Lösungsverfahren, das H. WEBER<sup>1)</sup> entwickelt hat. Wir führen ein

$$z = \vartheta - \vartheta_{\infty}$$

und erhalten

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\text{a) } t = 0 \quad z = \left( \vartheta_0 - \frac{i}{kh} - \frac{i}{kv} \right) + \frac{i}{kv} e^{-vx} = p + q e^{-vx}$$

$$\text{b) } x = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial x} - hz = 0.$$

Zur direkten Bestimmung von  $z$  ohne 2. Integration betrachten wir mit WEBER einen Körper, der sich von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstreckt. Ist für diesen zur Zeit  $t = 0$  im ganzen Intervall  $z = \Phi(\alpha)$ , so ist die bekannte Lösung der Differentialgleichung:

$$\text{c) } z = \frac{1}{2 a \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4 a^2 t}} d\alpha$$

die wir auch schreiben können:

$$\text{c) } z = \frac{1}{2 a \sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left( \Phi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4 a^2 t}} - \Phi(-\alpha) e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4 a^2 t}} \right) d\alpha.$$

Im Intervall von  $0 - \infty$  ist nach a)  $z = p + q e^{-vx}$  zu setzen und  $\Phi(-\alpha)$  ist so zu bestimmen, dass für  $x = 0$  die Bedingung b) erfüllt ist. WEBER erhält für  $\Phi(-\alpha)$  eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit der Lösung

$$\Phi(-\alpha) = \Phi(\alpha) - 2 h e^{-h\alpha} \int_0^{\alpha} \Phi(\alpha) e^{h\alpha} d\alpha.$$

In vorliegendem Problem ergibt sich

$$\Phi(-\alpha) = p(2 e^{-h\alpha} - 1) + q \left[ \frac{v+h}{v-h} e^{-v\alpha} - \frac{2h}{v-h} e^{-h\alpha} \right]$$

<sup>1)</sup> H. WEBER, loc. cit. Bd. II, S. 37.

und in c) eingesetzt, folgt nach einfacher Ausrechnung die Lösung:

$$z = p A_h + q B_h \quad (12)$$

$$A_h = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta + e^{a^2 h^2 t + hx} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{ah\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \quad (12\varepsilon)$$

$$B_h = \frac{1}{2} \left[ e^{a^2 v^2 t - vx} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{av\sqrt{t} - \frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta + \frac{v+h}{v-h} e^{a^2 v^2 t + vx} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{av\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta - \frac{2h}{v-h} e^{a^2 h^2 t + hx} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{ah\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \right] \quad (12b)$$

Setzt man für  $z$ ,  $p$  und  $q$  ihre Werte ein und beachtet, dass  $\Delta u = \Delta \vartheta$ , so erhält man nach leichter Umformung

$$u - u_0 = (\bar{u}_\infty - u_0) (1 - A_h) + \frac{i}{k\nu} [1 - A_h + B_h - e^{-\nu x}]; \quad (13)$$

$$u - u_0 = T - T_0 \quad \bar{u}_\infty - u_0 = \bar{T}_\infty - T_0,$$

also äusserlich denselben Ausdruck, wie für konstant gehaltene Oberflächentemperatur, doch haben  $A_h$  und  $B_h$  andere Werte. Namentlich ist zu beachten, dass  $A_h$  nicht mehr ein reines Leitungsintegral ist, sondern den Strahlungskoeffizienten  $h$  enthält. Um die Temperatur der Oberfläche zu erhalten ist in (13)  $x = 0$  zu setzen, mit der Folge:

$$\bar{A}_h = e^{a^2 h^2 t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{ah\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \quad (14a)$$

$$\bar{B}_h = \frac{\nu}{\nu-h} e^{a^2 \nu^2 t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{av\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta - \frac{h}{\nu-h} e^{a^2 h^2 t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{ah\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta. \quad (14b)$$

(Es mag überraschen, dass an der Oberfläche ein  $\nu$ , genauer geschrieben  $|\nu|$  auftritt; da für die Fläche  $x = 0$  der Begriff Absorption hinfällig ist. Allein, hätten wir die Untersuchung in den einzelnen Wellenlängen durchgeführt, so ist klar, dass wir  $\nu_\lambda$ , also eine Materialkonstante anzuschreiben hätten. Wir setzen deshalb

für  $\nu$  den Wert  $\nu = 1$  ein, der sich für die der Oberfläche möglichst nahe liegenden Schicht  $x = 0,01$  cm ergab.)

Nach hinreichend langer Zeit wird

$$\bar{B}_h - \bar{A}_h = -\frac{1}{ah\sqrt{t}}. \quad (14c)$$

Ein negativer Wert war zu erwarten. Nehmen wir an, dass sich zur Zeit  $t = 0$  die ganze Wassermasse auf der Temperatur  $\bar{u}_\infty$  befand, also der Temperatur, welche die Oberfläche im stationären Zustande wieder erreicht, so stellen sich hier in der Zwischenzeit tiefere Temperaturen ein. Denn zur Zeit  $t = 0$  ist noch kein Temperaturgradient  $\frac{du}{dx}$  vorhanden, welcher der Oberfläche die ausgestrahlte Wärmemenge zuführt. Die Temperaturen der Oberfläche und der benachbarten Schichten werden deshalb sinken, bis sich entsprechende Gradienten ausgebildet haben, um von da ab bis zu den Temperaturen des stationären Zustandes anzusteigen.

Entsprechend der Untersuchung des vorigen Paragraphen nehmen wir jetzt die ganze Wassermasse auf der Temperatur  $\bar{u}_\infty$  an und erhalten so den von der Einstrahlung  $i$  abhängigen Temperaturverlauf. Wir geben in Tabelle 3 die Temperaturen

$$u - u_0 = \frac{i}{k\nu} (1 - A_h + B_h - e^{-\nu x})$$

für dieselben  $x$  und  $t$ -Werte und  $i = 1$  und konstruieren wie dort die Kurven  $x = \text{const}$  (Diagramm 3) und  $t = \text{const}$  (Diagramm 4). Für kleine Werte von  $x$  ergeben sich kleinere Werte wie oben;

Tabelle 3.

$t =$	0,1	0,5	1	12	24	48	96 h	36d	$\frac{1}{4}$ Jahr	$\frac{1}{2}$ Jahr	1 Jahr	$\infty$
$x=0,00$ cm	- 5,06	- 7,09	- 7,37	- 5,62	- 4,63	- 3,67	- 2,53 <sup>0</sup>					0,119 <sup>0</sup>
0,1	- 4,50	- 6,93	- 7,12	- 5,14	- 4,15	- 2,97	- 2,11					1,19
1	- 0,49	- 4,05	- 5,89	- 5,65	- 3,84	- 1,05	+ 2,23					9,88
10	+ 0,23	+ 0,98	+ 1,77	+ 4,50	+ 6,35	+ 10,57	18,48					74,6
20	0,11	0,53	1,05	10,12	15,68	22,01	33,15					138,4
50	0,04	0,19	0,42	5,25	10,21	20,11	35,13					309,0
100	0,00	0,12	0,22	2,64	5,29	10,64	21,09	161,1	282	379	473 <sup>0</sup>	575,8
500	0,00	0,00	0,04	0,52	1,04	2,09	4,17		98	201	396	2090
1000	0,00	0,00	0,02	0,24	0,49	0,97	1,94		41,0	88,9	183	3635
$\infty$												14640

Werte von  $\frac{i}{k\nu} (1 - e^{-\nu x} - A_h + B_h)$  für  $i = 1$  cal/cm<sup>2</sup> min.

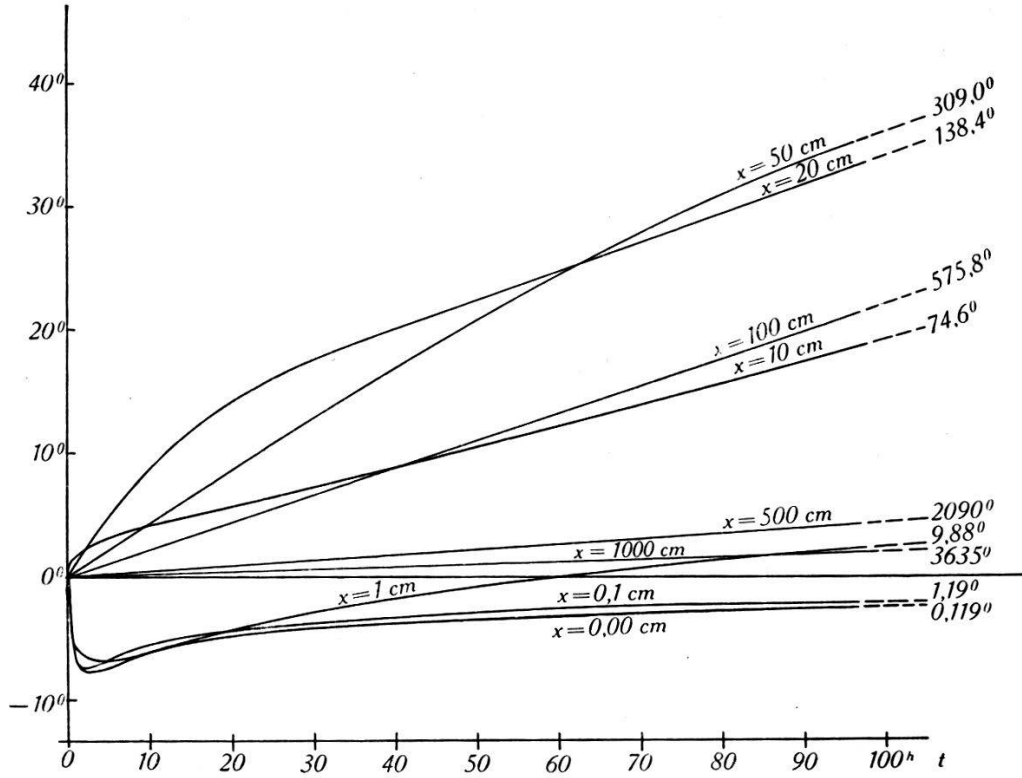


Diagramm 3.

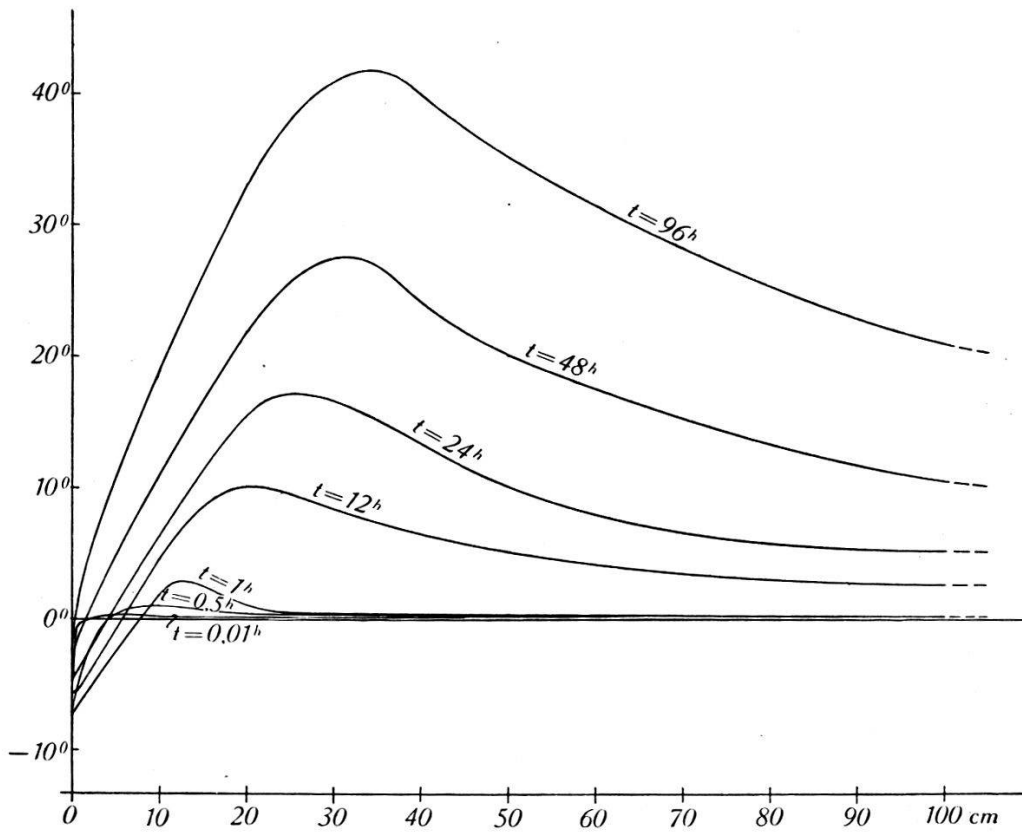


Diagramm 4.

selbstverständlich, da die Oberfläche durch Ausstrahlung sich abkühlt. Mit wachsender Tiefe nimmt der Einfluss der Oberflächenbedingung ab und die Temperaturen stimmen immer mehr überein. Wiederum findet die maximale Erwärmung nicht in der obersten Schicht, sondern in einer Tiefe von einigen dm statt. Wie zu erwarten war, ist die maximale Erwärmung geringer und scheinen die gezeichneten Maxima nach der Tiefe verschoben. Von der Einstrahlung hängt die Form der Kurven  $x = \text{const}$  nur so ab, dass sich ihre Ordinate proportional  $i$  ändern.

Wir untersuchen an Hand der Gl. (13) die nächtliche Abkühlung einer Wasseroberfläche und notieren, dass sich für einige  $\bar{A}_h$  folgende Werte ergeben:

	$t = 1$	4	12	24 h
	$\bar{A}_h = 0,79$	0,64	0,50	0,38
1 -	$\bar{A}_h = 0,21$	0,36	0,50	0,62

Unter der Annahme, dass mit Sonnenuntergang  $i = 0$  wird, wird das zugehörige  $\bar{T}_\infty$  ebenfalls = 0 und ergibt sich die Abkühlung

$$\Delta T = T - T_0 = -T_0(1 - A_h)$$

und für die Oberfläche

$$\Delta \bar{T} = \bar{T} - T_0 = -T_0(1 - \bar{A}_h)$$

Setzen wir der Grössenordnung nach  $T_0 = 290$ , ( $u_0 = 17^\circ$ ), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta \bar{T} &= -290 \cdot 0,21 = -60^\circ \text{ für 1 Stunde nach Sonnenuntergang} \\ &= -290 \cdot 0,36 = -104^\circ \quad \text{,, 4 ,, ,, ,,} \end{aligned}$$

also überraschend starke Abkühlung der obersten Schichten. Allein wir haben zu beachten, dass mit Sonnenuntergang  $i$  nicht = 0 wird, sondern ein  $i_a$  bestehen bleibt gleich der Gegenstrahlung der Atmosphäre. Diese Strahlungsverhältnisse der Atmosphäre habe ich an anderer Stelle<sup>1)</sup> eingehend behandelt und gezeigt, dass sie in erster Linie durch den Gehalt an Wasserdampf bedingt sind. Ich habe diese Gegenstrahlung unter verschiedenen Verhältnissen berechnet in genügender Übereinstimmung mit beobachteten Werten. Eine eingehende Diskussion dieser Verhältnisse liegt ausserhalb des Rahmens dieser Untersuchung; doch sollen einige typische Fälle herausgegriffen werden.

In Zürich,  $h=440$  m ergab sich (Lufttemp.  $15^\circ$ )  $i_a = 0,37$  cal/cm<sup>2</sup>min  
 In Wien,  $h=220$  m ,, ,, ( ,,  $19^\circ$ )  $i_a = 0,41$  cal/cm<sup>2</sup>min

<sup>1)</sup> R. EMDEN. Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung. Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. der Wissensch. Math.-Phys. Klasse, pag. 55, 1912.

Nehmen wir im Mittel  $i_a = 0,4$ , so wird das zugehörige  $\bar{T}_\infty = 264$ , und bei einer Wassertemperatur  $u_0 = 20^\circ$  wird

$$\begin{aligned}\overline{\Delta T} &= -29 \cdot 0,21 = -6^\circ \text{ für } t = 1 \text{ h} \\ &= -29 \cdot 0,36 = -11^\circ \text{ für } t = 4 \text{ h}\end{aligned}$$

welche Werte infolge von Konvektionsströmen nicht vollständig in Erscheinung treten. Im Gebirge nimmt mit zunehmender Höhe die Gegenstrahlung stark ab. In *Rauris*,  $h=950$  m,  $u_0 = 6^\circ$ , wurde  $i_a = 0,21$  gemessen. Zu  $i_a = 0,20$  gehört ein  $\bar{T}_\infty = 232$  und wird die Wassertemperatur zu  $7^\circ$  ( $T_0 = 280$ ) angenommen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta T} &= -48 \cdot 0,21 = -10^\circ \text{ für } t = 1 \text{ h} \\ &= -48 \cdot 0,36 = -17,4^\circ \text{ für } t = 4 \text{ h}\end{aligned}$$

Mit zunehmender Höhe nimmt der Wasserdampfgehalt der Atmosphäre und damit deren Zustrahlung stark ab; die Wasserlöcher der Gletscher werden sich deshalb durch Ausstrahlung, nicht durch „äussere Wärmeleitung“, bald nach Sonnenuntergang mit einer Eisschicht überziehen. Auch über hoch gelegenen Steppen und Wüsten nimmt die Gegenstrahlung der Atmosphäre so kleine Werte an, dass trotz hoher Lufttemperatur bei Tage sich Wassertümpel bei Nacht mit einer Eiskruste überziehen können. Diesbezügliches Beobachtungsmaterial findet sich bei HANN<sup>1)</sup>.

Die Zustrahlung  $i_a$  der Atmosphäre kann leicht in Gl. (13) einbezogen werden, da wir annehmen dürfen, dass diese überaus langwellige Strahlung bereits in den obersten Wasserschichten absorbiert wird. Die Oberflächenbedingung  $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - h \vartheta = 0$  wird dadurch nicht beeinflusst,  $\bar{T}_\infty$  aber vergrössert sich um den Betrag  $\frac{i_a}{kh}$ . Wir haben also dem nach Gl. (12) berechneten  $u$  einfach  $\frac{i_a}{ka}$  ( $1 - A_h$ ) zu addieren.

### § 6. Einstrahlung mit jährlicher und täglicher Periode.

Eine mit der Zeit veränderliche Einstrahlung kann durch eine Sinusreihe dargestellt werden. Es ist deshalb in erster Linie der Temperaturverlauf bei sinusförmiger Einstrahlung zu bestimmen. Dabei kann die Sonnenstrahlung nicht in der einfachen Form

<sup>1)</sup> J. HANN. Lehrbuch der Meteorologie. 1. Buch. Kap. II. Braunschweig, 1915.

$i \cdot \sin Nt$  angesetzt werden, da negative  $i$  selbstverständlich ausgeschlossen sind. Wir setzen deshalb an

$$i = i_1 + i_2 \sin Nt; \quad i_1 > i_2 \quad (15)$$

und notieren

$$N = 2\pi/\tau = 7,269 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1} \text{ für } \tau = 1 \text{ Tag} \\ = 1,991 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^{-1} \text{ für } \tau = 1 \text{ Jahr.}$$

Um den Gang der folgenden Untersuchung nicht zu unterbrechen, erledigen wir erst eine Hilfsaufgabe, indem wir eine Zeitfunktion  $w = f(t)$  entsprechend der Bedingung

$$\frac{dw}{dt} = a^2 \nu^2 w + \frac{i_2 \nu}{\rho c} \cdot \sin(Nt) \quad (16)$$

bestimmen. Wir finden

$$w = P \sin Nt + Q \cos Nt + C e^{at}, \quad q = a^2 \nu^2$$

Um  $\infty$  hohe Temperaturen zu vermeiden, ist die Konstante  $C = 0$  zu setzen. Damit wird

$$w = (P \sin Nt + Q \cos Nt) = R \sin(Nt - \varphi) \quad (17)$$

$$\text{tg } \varphi = -\frac{N}{a^2 \nu^2}$$

$$R = \frac{i_2 \nu}{\rho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{N^2 + a^4 \nu^4}}; \quad \sin \varphi = +\frac{N}{\sqrt{N^2 + a^4 \nu^4}};$$

$$w_0 = (w_{t=0}) = +\frac{i_2 \nu}{\rho c} \cdot \frac{N}{N^2 + a^4 \nu^4}; \quad \cos \varphi = -\frac{a^2 \nu^2}{\sqrt{N^2 + a^4 \nu^4}}.$$

Wir behandeln nun das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{i_1 \nu}{\rho c} e^{-\nu x} + \frac{i_2 \nu}{\rho c} \sin Nt e^{-\nu x} \quad (18)$$

$$\text{a) } t = 0; \quad \vartheta = \vartheta_0$$

$$\text{b) } x = 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - h \vartheta = 0.$$

Wir setzen

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$$

wobei

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} + \frac{i_1 \nu}{\rho c} e^{-\nu x}$$

$$\text{a) } t = 0 \quad \vartheta_1 = \vartheta_0$$

$$\text{b) } x = 0 \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} - h \vartheta_1 = 0.$$



Dieses System haben wir in § 5 behandelt und die Lösung gefunden:

$$u - u_0 = (\bar{u}_\infty - u_0) (1 - A_h) + \frac{i_1}{k\nu} (1 - A_h + B_h - e^{-\nu x}). \quad (\alpha) \quad (13)$$

Es bleibt also zu behandeln

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} + \frac{i_2 \nu}{\rho c} \sin Nt e^{-\nu x}$$

$$\text{a) } t = 0 \quad \vartheta_2 = 0$$

$$\text{b) } x = 0 \quad \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} - h \vartheta_2 = 0.$$

Wir setzen

$$\vartheta_2 = v + w e^{-\nu x}.$$

Für  $w$  ergibt sich die Gl. (17) mit der Lösung

$$w = R \sin (Nt - \varphi) \quad (\beta)$$

und  $v$  ist zu bestimmen gemäss

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\text{a) } t = 0 \quad v = -w_0 e^{-\nu x}$$

$$\text{b) } x = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} - h v = (\nu + h) w.$$

Wir zerlegen  $v = v_1 + v_2$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$$

$$\text{a) } t = 0 \quad v_1 = -w_0 e^{-\nu x} \quad \text{b) } x = 0 \quad v_1 = 0$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}$$

$$\text{a) } t = 0 \quad v_2 = 0$$

$$\text{b) } x = 0 \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - h v_2 = (\nu + h) w = (\nu + h) R \sin (Nt - \varphi).$$

Die Lösung für  $v_1$  ist durch Gl. (9) gegeben, doch haben wir in  $y = pA + qB$  zu setzen  $p = 0$  und  $q = -w_0$ . Dann wird

$$u - u_0 = -w_0 B. \quad (\gamma)$$

Um  $v_2$  zu bestimmen, setzen wir

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - h v_2 = z$$

und erhalten

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

a)  $t = 0 \quad z = 0$       b)  $x = 0 \quad z = (\nu + h) R \sin (Nt - \varphi)$

Ist  $z$  ermittelt, so ergibt sich mit sinngemässer Integrationskonstanten (vgl. oben § 5)

$$v_2 = e^{hx} \int_x^\infty e^{-hx} z dx.$$

Ist ganz allgemein  $z = F(t)$  für  $x = 0$  bekannt, so ergibt sich<sup>1)</sup>

$$z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\beta^2} F \left( t - \frac{x^2}{4 a^2 \beta^2} \right) d\beta$$

$\frac{x}{2 a \sqrt{t}}$

und auf den vorliegenden Fall spezialisiert

$$z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\nu + h) R \left[ \sin (Nt - \varphi) \int_x^\infty e^{-\beta^2} \cos \frac{N x^2}{4 a^2 \beta^2} d\beta - \cos (Nt - \varphi) \int_x^\infty e^{-\beta^2} \sin \frac{N x^2}{4 a^2 \beta^2} d\beta \right]$$

$\frac{x}{2 a \sqrt{t}}$

Um  $v^2$  zu erhalten, muss nochmals über  $x$  integriert werden. Das auftretende Gebilde liesse sich aber nicht mehr sinngemäss überblicken, geschweige denn numerisch auswerten. Um wenigstens einigermaßen Einblick in die tatsächlichen Verhältnisse zu erlangen, bleibt nichts anderes übrig, als sich auf so grosse Zeiten zu beschränken, dass mit hinreichender Genauigkeit  $\frac{x}{2 a \sqrt{t}} = 0$  gesetzt werden kann, so dass wir uns dem stationären Zustande hinreichend genähert haben ( $\frac{x}{2 a \sqrt{t}} < 1, x < 4, 5 \sqrt{t h}$  genügt). Dann ergibt sich mit Hilfe bekannter Integrale<sup>2)</sup>

$$z = (\nu + h) R e^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}} \sin \left( Nt - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} - \varphi \right).$$

<sup>1)</sup> H. F. WEBER, loc. cit., Bd. II, § 41.

<sup>2)</sup>  $\int_0^\infty e^{-x^2} \sin \frac{b^2}{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b\sqrt{2}} \sin b \sqrt{2};$

$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos \frac{b^2}{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b\sqrt{2}} \cos b \sqrt{2}.$

und damit<sup>1)</sup>

$$v_2 = \frac{(\nu + h) R^{-\frac{x}{a}} \sqrt{\frac{N}{2}}}{\left(h + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}\right)^2} \left[ \left(h + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}\right) \sin \left(Nt - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} + \varphi\right) - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} \cos \left(Nt - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} + \varphi\right) \right]. \quad (\delta)$$

Fassen wir die berechneten Teilglieder ( $\alpha$ ) ( $\beta$ ) ( $\gamma$ ) ( $\delta$ ) zusammen, so ergibt sich die gesuchte Lösung:

$$\begin{aligned} u - u_0 &= \left(\frac{i}{kh} - u_0\right) (1 - A_h) + \frac{i}{k\nu} [1 - A_h + B_h - e^{-\nu x}] \\ &\quad - w_0 B_h \\ &\quad + R e^{-\nu x} \sin(Nt - \varphi) \\ &\quad + \frac{\nu + h}{\left(h + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}\right)^2} \cdot R e^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}} \\ &\quad \left[ \left(h + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}\right) \sin \left(Nt - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} + \varphi\right) - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} \cos \left(Nt - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} + \varphi\right) \right] \\ R &= \frac{i_2 \nu}{\rho c} \frac{1}{\sqrt{N^2 + a^4 \nu^4}} e^{-\nu x}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{N}{a^2 \nu^2}, \\ w_0 &= + \frac{i_2 \nu}{\rho c} \frac{N}{N^2 + a^4 \nu^4}. \quad (19) \end{aligned}$$

Die beiden periodischen Glieder ergaben sich für so grosse Zeiten, dass wir  $\frac{x}{2a\sqrt{t}}$  vernachlässigen konnten, während die andern Glieder für beliebige Zeiten gelten. Führen wir auch die gleichen grossen Zeiten ein, so werden  $A_h$  und  $B_h = 0$ . Dann liefern sie stationäre Verhältnisse und wir erhalten im Glasse

$$u = u_{\text{stationär}} + 2 \text{ periodische Glieder.}$$

---

1)  $\int e^{ax} \sin bx \cdot dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2};$   
 $\int e^{ax} \cos bx \cdot dx = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2}.$

Das 2. periodische Glied können wir nach leichter Umformung auch schreiben

$$\frac{\nu + k}{\sqrt{\left(h + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}\right)^2}} \cdot R e^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}} \sin\left(Nt - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} - \varphi + \psi\right);$$

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{\frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}}{\left(h + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}\right) + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}}; \quad (20)$$

$$\psi = - 31^{\circ}40' = \text{rund } - 2^{\text{h}} \text{ für } \tau = 1 \text{ Tag}$$

$$\psi = - 4^{\circ}15' = \text{rund } - 1^{\text{h}} \text{ für } \tau = 1 \text{ Jahr}$$

Zum Vergleiche sei auf ein analoges Problem hingewiesen. Die Temperatur der Erdoberfläche sei  $u = u_0 \sin Nt$ . Dann pflanzen sich bekanntlich in die Tiefe Temperaturwellen fort von der Form

$$u = u_0 e^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}} \sin\left(Nt - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}\right)$$

$a^2$  das Temperaturleitvermögen des Erdbodens. Der Unterschied ist bedingt durch die verschiedenen Oberflächenbedingungen und den Umstand, dass beim See erwärmende Strahlung in die Tiefe eindringt.

Für den See ergibt sich ( $\lambda$  die Wellenlänge,  $V$  die Geschwindigkeit der Welle)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} &= 0,1612 \text{ cm}^{-1} & \lambda &= 39,11 \text{ cm} & V &= 4,51 \cdot 10^{-4} \text{ cm/sec} \\ & & & & & \text{für } \tau = 1 \text{ Tag} \\ &= 0,0084 \text{ „} & &= 745 \text{ „} & &= 2,36 \cdot 10^{-5} \text{ cm/sec} \\ & & & & & \text{für } \tau = 1 \text{ Jahr} \end{aligned}$$

Ist die Welle in die Tiefe um  $\lambda$  cm vorgedrungen, so hat die Exponentialgrösse um den Betrag  $e^{-2\pi} = 0,00195$  abgenommen. In grösserer Tiefe kommt deshalb nur die jährliche Welle zur Geltung.

Über die fortschreitende Welle lagert sich die stehende Schwingung

$$R e^{-\nu x} \sin \cdot (Nt - \varphi)$$

Dabei ist zu beachten, dass nach unseren Festsetzungen  $\varphi$  von  $\nu$ , also auch von  $x$  abhängt. Die verschiedenen Niveaus schwingen deshalb nicht synchron. Aus der Beziehung

$$- \operatorname{tg} \varphi = \frac{N}{a^2 \nu^2} = \operatorname{tg} (\pi - \varphi)$$

berechnet sich

	$\varphi$ (Tag)	$\varphi$ (Jahr)
$x = 0,01$ cm	2,97 <sup>0</sup>	0,00 <sup>0</sup>
0,1	3,59	0,00
1	24,19	0,07
10	86,23	2,42
20	88,36	5,48
50	89,72	29,31
100	89,91	59,24
500	89,93	89,99
1000	90 - $\varepsilon$	90 - $\varepsilon$

Das Maximum der Erwärmung stellt sich demnach in jeder Schicht um so später ein (und zunehmend), je tiefer sie liegt. Bei der jährlichen Periode stellt sich dasselbe schliesslich 6 Monate nach Frühlingsanfang ein. Dies Herabsteigen der maximalen Erwärmung mit zunehmender Amplitude kommt in der Isoplethen-Darstellung von AUFSESS<sup>1)</sup> mit einem Maximum Anfang September klar zum Ausdruck. Auch bei der täglichen Schwankung tritt in tieferen Schichten die maximale Erwärmung nicht zur Zeit höchsten Sonnenstandes, sondern in Übereinstimmung mit der Erfahrung im Laufe des Nachmittags ein. In Tiefen 5 m bei der jährlichen und 10 cm bei der täglichen Periode können wir mit einer synchronen Schwingung von der Phasendifferenz  $-\frac{\pi}{2}$  rechnen.

Wir befassen uns in erster Linie mit der jährlichen Periode. Aufgabe ist, die wirksame Sonnenstrahlung in die beiden Komponenten  $i_1$  und  $i_2$  zu zerlegen. Dazu halten wir uns an die bekannten Tabellen von ANGOT, gut und praktisch wiedergegeben bei MILANKOWITCH<sup>2)</sup>. Seine Tabelle III ist berechnet für einen Transmissionskoeffizienten 0,8, genügend genau mit dem oben ermittelten Werte 0,7928 übereinstimmend. Sie enthält für die Solarkonstante 1 cal/cm<sup>2</sup>min für eine Reihe geographischer Breiten  $\varepsilon$  und Sonnendeklationen  $\delta$  die tägliche Strahlungsmenge  $i$  cal/cm<sup>2</sup>min, welche den Erdboden erreicht. Aus den gegebenen Zahlwerten berechnet sich die wirksame Sonnenstrahlung durch Division mit  $1000\pi$ . Wir notieren für unsere Zwecke den Wert  $i$  cal/cm<sup>2</sup>min.

<sup>1)</sup> O. VON U. ZU AUFSESS. Die physikalischen Eigenschaften der Seen, pag. 107, Braunschweig 1905.

<sup>2)</sup> M. MILANKOWITCH. Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. Paris 1920.

Sonnen- deklination $\delta$	Datum	geogr. Breite $\varepsilon$		
		0°	40°	50°
+ 23° 27'	22. VI.	0,207	0,262	0,254
22	1. VI.	0,210	0,257	0,246
20	26. V.	0,213	0,248	0,235
16	4. V.	0,220	0,232	0,213
12	22. IV.	0,225	0,216	0,191
8	10. IV.	0,229	0,199	0,170
4	31. III.	0,231	0,180	0,148
0	21. III.	0,232	0,162	0,126
- 4	10. III.	0,231	0,144	0,106
- 8	29 III.	0,229	0,125	0,085
- 12	18. II.	0,225	0,106	0,067
- 16	6. II.	0,220	0,094	0,049
- 20	21. I.	0,213	0,071	0,034
- 22	10. I.	0,210	0,063	0,027
- 23° 27'	21. XII.	0,207	0,057	0,022

Trägt man diese Werte graphisch auf, so erhält man namentlich für die grösseren, in erster Linie wirksamen Werten, eine sehr sinusähnliche Kurve, so dass bei einer Fourier-Analyse das erste Glied stark überwiegen würde. Da es sich nicht um genaue Zahlenwerte handelt, sondern der Gang der Erscheinung überblickt werden soll, genügt es, nur das erste Glied in Betracht zu ziehen und die einfallende Strahlung in der Form

$$i_1 + i_2 \sin 2 \pi t/\tau$$

darzustellen. Dabei ist die Periode für die äquatorialen Gebiete nicht gleich 12, sondern gleich 6 Monaten anzusetzen. Wir erhalten so

$$\varepsilon = 50^\circ \quad i_1 = \frac{0,254 + 0,022}{2} = 0,138 \text{ cal/cm}^2 \text{ min}$$

$$i_2 = \frac{0,254 - 0,022}{2} = 0,116 \text{ cal/cm}^2 \text{ min}$$

$$\varepsilon = 40^\circ \quad i_1 = \frac{0,262 + 0,057}{2} = 0,160 \text{ cal/cm}^2 \text{ min}$$

$$i_2 = \frac{0,262 - 0,057}{2} = 0,103 \text{ cal/cm}^2 \text{ min}$$

$$\varepsilon = 0^\circ \quad i_1 = \frac{0,232 + 0,207}{2} = 0,220 \text{ cal/cm}^2 \text{ min}$$

$$i_2 = \frac{0,232 - 0,207}{2} = 0,013 \text{ cal/cm}^2 \text{ min}$$



Die Kenntnis von  $i_2$  gestattet, den Wärmeumsatz während einer Periode  $\tau$  zu berechnen. Für die massgebende Solarkonstante  $1 \text{ cal/cm}^2\text{sec}$  kommen während einer Periode  $\tau$  zum Umsatz:

$$2 \cdot i_2 \int_a^{\tau/2} \sin N t dt = \frac{2 \cdot i_2 \tau}{\pi} \text{ cal/cm}^2$$

und speziell

$$\begin{aligned} 3,88 \cdot 10^4 \text{ cal/cm}^2 &= 3,88 \cdot 10^5 \text{ Cal/m}^2 \text{ für } \varepsilon = 50^\circ \\ 3,44 \cdot 10^4 \quad ,, &= 3,44 \cdot 10^5 \quad ,, \quad ,, \quad \varepsilon = 40^\circ \\ 2,18 \cdot 10^3 \quad ,, &= 2,18 \cdot 10^4 \quad ,, \quad ,, \quad \varepsilon = 0^\circ \end{aligned}$$

Auf Grund vorliegender Temperaturmessungen im Sommer und Winter berechnete HANN<sup>1)</sup> den jährlichen Wärmeumsatz im Genfersee zu  $3,70 \cdot 10^5 \text{ Cal/m}^2$  (bis 60 m Tiefe), im Bodensee zu  $3,20 \cdot 10^5$  und SCHUBERT im Hintersteinersee (West-Preussen) zu  $2,80 \cdot 10^5$ . Die Übereinstimmung ist überraschend gut. Dies ist um so beachtenswerter, als sich weiterhin ein unüberbrückbarer Gegensatz zwischen Rechnung und Messung ergeben wird.

Diese Wärmebilanz bezieht sich auf den Glasseesee; bei dem wirklichen See muss der Verdunstung Rechnung getragen werden. Das für diesen Zweck zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial ist äusserst dürftig. Für die heisse, trockene Periode vom 5. August bis 14. September 1911 fand MAURER bei einer Lufttemperatur von  $24^\circ$  die tägliche Verdampfung auf dem Greifensee und Zürichersee zu 4,3 mm und 4,2 mm. Für den Zugersee und den Aegerisee ergaben sich in dem kalten Jahre 1912 die Jahressummen von 775 und 735 mm, das sind 2,1 und 2,0 mm täglich<sup>2)</sup>. Wir nehmen deshalb schätzungsweise eine mittlere tägliche Verdunstung von 3 mm an, welche eine Wärmezufuhr von  $0,017 \text{ cal/cm}^2\text{min}$  erfordert. Die mittlere Wärmezufuhr  $i_1$  bestimmten wir oben zu 0,138 und 0,160  $\text{cal/cm}^2\text{min}$  für mittlere Breiten. Wir können deshalb der Verdunstung *annähernd* Rechnung tragen, indem wir für den Erwärmungsprozess von der zugestrahlten Energiemenge 10% abziehen. Die berechneten jährlichen Wärmeumsätze sind dann um 10% zu verkleinern, wodurch die Übereinstimmung Rechnung/Messung noch vollständiger würde.

In den äquatorialen Gegenden ergaben sich für  $i_2$  ausserordentlich kleine Werte; die tropischen Ozeane zeigen deshalb nur sehr geringe jährliche Temperaturschwankungen.

<sup>1)</sup> J. HANN, Handbuch der Klimatologie, Bd. I, pag. 122. Stuttgart 1908.

<sup>2)</sup> J. HANN, Lehrbuch der Meteorologie. S. 218. 1915.



Wir stellen in Tabelle 4 die in Betracht kommenden  $R$  und Amplitudenwerte zusammen, berechnet für  $i = 1 \text{ cal/cm}^2\text{min}$ .

Tabelle 4.

$R = \frac{i v}{\rho c} \frac{1}{\sqrt{N^2 + a^4 v^4}}$	$Re^{-\nu x}$		$Re^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}}$			
	Tag	Jahr	Tag	Jahr	Tag	Jahr
$x = 0,01 \text{ cm}$	11,90	11,90	11,78	11,78	11,68	11,90
0,1	13,15	13,15	12,09	12,09	12,94	13,15
1	31,91	35,50	22,72	25,27	27,17	35,22
10	13,29	200,4	7,45	112,3	2,65	184,3
20	7,95	278,5	4,07	142,5	0,32	235,1
50	3,69	649,3	1,65	290,3	0,001	425,7
100	1,92	661,7	0,77	263,7	0,000	284,7
500	0,58	210,1	0,16	59,85	0,000	3,24
1000	0,32	123,2	0,08	28,27	0,000	0,000

Damit erhalten wir für die in Betracht kommenden  $i_2$ , da  $\frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} \ll h$ , folgende Temperaturamplituden:

Tabelle 5.

$R$	$Re^{-\nu x}$		$\frac{v+h}{h} R^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}}$ ; $N = 1,992 \cdot 10^{-7} \text{ (Jahr)}$ $\text{cm}^{-1}$			
	$\varepsilon = 40^\circ$	$50^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$
$x = 0,01 \text{ cm}$	1,23 <sup>0</sup>	1,38	1,22	1,37	12,3	13,8
0,1	1,35	1,52	1,24	1,40	13,5	15,2
1	3,65	4,12	2,61	2,93	16,0	17,9
10	29,75	23,4	11,6	13,0	29,9	33,9
20	28,7	32,5	14,7	16,5	33,4	37,8
50	66,8	75,3	29,9	33,6	52,0	57,2
100	68,1	76,7	27,1	30,6	32,1	33,4
500	27,6	74,4	6,17	6,94	0,33	0,39
1000	12,7	14,3	2,92	3,28	0,000	0,000
$10^4$	10		$6,10^{-5}$			

Die in die Tiefe absteigende Welle, in den höheren Schichten die stehende Schwingung übertreffend, ist in einer Tiefe von 10 m erloschen, in 5 m Tiefe könnte sie sich (theoretisch) noch bemerkbar machen. Ihre Amplitude ist vom Absorptionskoeffizienten nur sehr wenig, das Gesetz, nach welchem sie abklingt, gar nicht nur von  $a$  und  $N$ , abhängig. Sie verschwindet für  $a = 0$ , ein Bei,

spiel dafür, dass Wärmeleitung nicht ausser acht gelassen werden darf. Die stehende Schwingung wirkt in einer Tiefe von 10 m noch mit einer Amplitude von rund  $3^{\circ}$ , was eine Jahresschwankung der Temperatur von  $6^{\circ}$  bewirkt. Wenn wir aber lesen: „Die jährliche Temperaturschwankung dringt in den Boden bis 15—25 m (rund) ein, dagegen in unseren Seen bis zu und über 100 m, im

Tabelle 6.

Werte von  $R e^{-\nu x} \sin(Nt - \varphi)$ ;  $i = 1 \text{ cal/cm}^2 \text{ min.}$ 

$t =$	0	$\frac{1}{12} \tau$	$\frac{2}{12} \tau$	$\frac{3}{12} \tau$	$\frac{4}{12} \tau$	$\frac{5}{12} \tau$	$\frac{6}{12} \tau$
$x = 0 \text{ cm}$	0	5,95	10,30	11,90	10,3	5,95	0,00 <sup>0</sup>
10	- 4,70	51,9	94,8	113,2	104,0	60,00	4,70
20	- 13,70	59,2	115,2	141,0	129,5	95,2	19,7
50	- 141,9	3,49	150,5	253,0	290,2	249,7	141,9
100	- 226,6	- 128,2	3,58	134,5	230,2	263,8	226,6
500	- 59,80	- 51,9	- 29,91	0,00	29,91	51,8	59,8
1000	- 28,26	- 24,48	- 14,17	0,00	14,17	24,5	28,26

Tabelle 7.

Werte von  $\frac{\nu+h}{\nu} R e^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}} \sin(N + - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}} - \varphi + \psi)$ ;  $i = 1 \text{ cal/cm}^2 \text{ min.}$ 

$t =$	0	$\frac{1}{12} \tau$	$\frac{2}{12} \tau$	$\frac{3}{12} \tau$	$\frac{4}{12} \tau$	$\frac{5}{12} \tau$	$\frac{6}{12} \tau$
$x=0 \text{ cm}$	- 0,88	5,16	9,83	11,86	10,71	0,75	+ 0,88 <sup>0</sup>
10	- 36,2	57,1	138,4	180,6	174,5	121,8	+ 36,2
20	- 77,35	43,7	153,4	221,9	230,8	178,2	+ 77,35
50	- 358,1	- 196,4	18,27	228,2	376,8	424,5	+ 35,8
100	- 264,1	- 280,4	- 222,3	- 104,2	42,05	176,6	264,1
500	+ 1,39	2,665	3,18	2,925	1,833	0,259	- 1,39
1000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabelle 8.

Summe der Werte der Tabellen 6 und 7, reduziert auf  $i_2 = 0,11 \text{ cal/cm}^2 \text{ min.}$ 

$t =$	0	$\frac{1}{12} \tau$	$\frac{2}{12} \tau$	$\frac{3}{12} \tau$	$\frac{4}{12} \tau$	$\frac{5}{12} \tau$	$\frac{6}{12} \tau$
$x = 0$	- 0,97	1,22	2,21	2,61	2,32	1,36	+ 0,97
10	- 4,5	12,0	25,63	32,3	30,4	20,0	+ 4,5
20	- 10,0	11,3	29,55	39,9	39,6	30,1	+ 10,0
50	- 55,0	- 21,2	18,57	52,9	73,4	74,1	+ 55,0
100	- 54,0	- 45,0	- 24,1	3,33	29,9	48,4	+ 54,0
500	- 6,52	- 5,42	- 2,94	0,32	3,5	5,7	+ 6,52
1000	- 3,11	- 2,69	- 1,56	0,00	1,56	2,69	+ 3,11

Mittelmeer vielleicht bis zu 150 m“, so stossen wir auf einen schreienden Widerspruch zu unserer Rechnung. Rechnen wir mit einem mittleren Absorptionskoeffizienten von rund  $0,0012 \text{ cm}^{-1}$ , wie er sich für destilliertes Wasser in diesen Tiefen ergibt, so wird die Exponentialgrösse  $e^{-xv} = 6 \cdot 10^{-5}$  in 100 und  $1,5 \cdot 10^{-8}$  in 150 m Tiefe, und eine Temperaturamplitude von  $6 \cdot 10^{-50}$  in 100 m Tiefe würde sich der Beobachtung vollständig entziehen. Da das Seewasser aber sicher bedeutend stärkeres Absorptionsvermögen hat

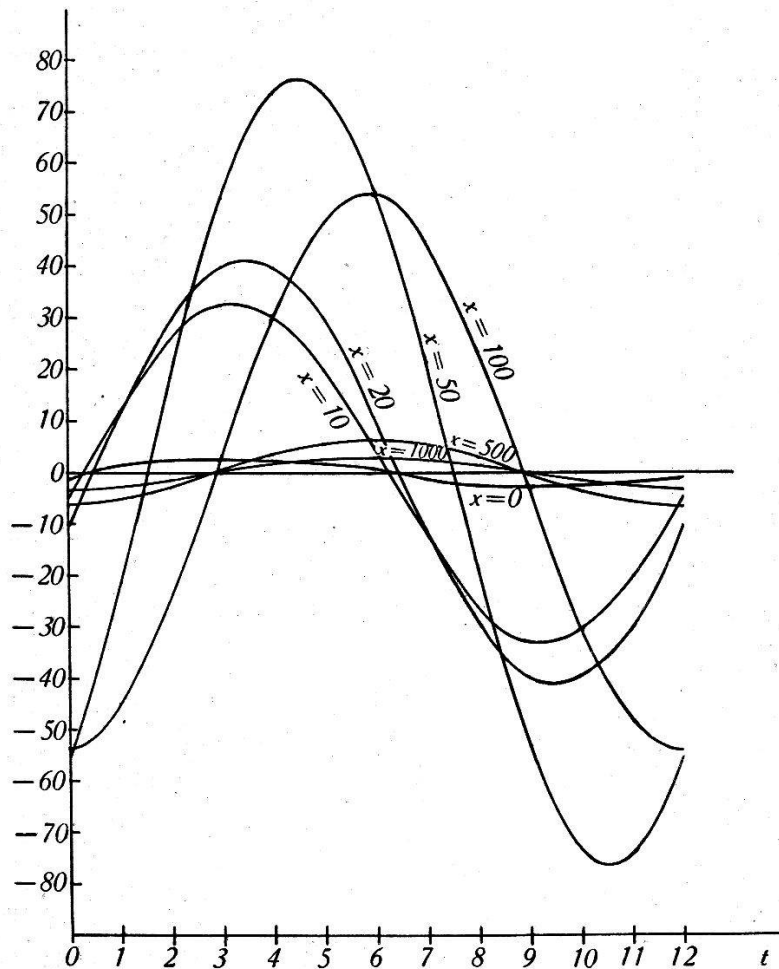


Diagramm 5.

wie destilliertes Wasser, würde sich die Temperaturschwankung noch um einige Zehnerpotenzen vermindern. Dieser Gegensatz ist um so auffälliger, als, wie oben gezeigt, in bezug auf Wärmeumsatz Rechnung und Beobachtung übereinstimmen. Das berechnete Temperaturdefizit in grösserer Tiefe wird ausgeglichen durch Temperaturzunahme in 50—100 cm Tiefe. Da aber das vorliegende Beobachtungsmaterial hinreichend gesichert erscheint, die direkt eindringende Sonnenstrahlung aber viel zu geschwächt wird, um wirksam in Erscheinung zu treten, haben wir uns nach einer

ändern, bisher unbekanntes Temperaturquelle umzusehen, die in grösseren Tiefen noch hinreichend kräftig wirksam ist. Konvektionsströme in vertikaler Richtung scheiden selbstverständlich aus. Diese unbekanntes Temperaturquelle wird weiterhin nochmals in Erscheinung treten.

Beide periodischen Glieder haben ihre maximalen Amplituden nicht, wie man vermuten könnte, bei  $x = 0$ , sondern in tieferen Schichten. Um Überblick über diese Verhältnisse zu gewinnen, habe ich für einige in Betracht kommende  $x$ - und  $t$ -Werte die beiden periodischen Glieder berechnet und in Tabellen 6 und 7 zusammengestellt. Das Zeitintervall ist das Jahr, eingeteilt in 12 Intervalle (Monate), beginnend mit Frühlingsanfang. Sie sind berechnet für  $i = 1 \text{ cal/cm}^2\text{min}$ , so dass unmittelbar zu anderen Werten der Einstrahlung übergegangen werden kann. Durch Summation ergibt sich die ganze jährliche Temperaturschwankung. Sie ist wiedergegeben in Tabelle 8, jedoch, der Wirklichkeit angepasst, berechnet für  $i_2 = 0,11 \text{ cal/cm}^2\text{min}$ , dem Mittelwerte für die geographischen Breiten  $40^\circ$  und  $50^\circ$ . Um Überblick zu gewinnen, ist ihr Inhalt in Diagramm 5 graphisch zur Darstellung gebracht. Abszissenachse ist die Zeit, gezeichnet sind die Kurven  $x = \text{const}$ . Wir entnehmen ihm:

- 1) Jede Schicht erhält ihr Temperaturmaximum um so später, mit einer Maximalverspätung von 6 Monaten, je tiefer sie liegt.
- 2) Die raschesten Temperaturanstiege erfolgen in den Monaten Mai und Juni.

Beide Gesetzmässigkeiten treten in der oben erwähnten IsoPLETHEN-Darstellung von AUFSCHNITT klar in Erscheinung. Doch tritt auch hier wieder die bereits erwähnte Unstimmigkeit auf, dass die Beobachtung sich in tieferen Schichten abspielt wie die Rechnung.

Für die tropischen Ozeane sind diese Temperaturwerte mit 10 zu dividieren ( $i_2 = 0,013$ ), was die beobachteten geringen Temperaturschwankungen liefert.

Die berechneten Temperaturen beziehen sich auf den Glasee; beim wirklichen See muss der Verdunstung Rechnung getragen werden. Wie oben Seite 426 dargelegt, erreichen wir dies, indem die zugeführte Strahlung um 10% verkleinert wird. Die Temperaturen sind dann um 10% zu erniedrigen. Sie können stehen bleiben, wenn die Solarkonstante zu 1,1 statt  $1 \text{ cal/cm}^2\text{min}$  angenommen wird. Die Gesetzmässigkeiten bleiben ungeändert.

Die tief unter dem Gefrierpunkt liegenden, berechneten Temperaturen dürfen nicht stutzig machen, denn die Temperaturschwankung lagert sich über die durch die konstante Einstrahlung  $i_1$

resultierende Temperatur (Tabelle 7). Wir haben, wie schon oben bemerkt, für hinreichend lange Zeiten, praktisch also für den stationären Zustand zu bilden:

$$u_{\infty} = \frac{i_1}{kh} + \frac{i_1}{h\nu} (1 - e^{-\nu x}) \quad (21)$$

Sie sind dort berechnet für die Einstrahlung  $i = 1 \text{ cal/cm}^2\text{min}$ ; jetzt ist zu setzen:

$$\begin{aligned} i &= i_1 = 0,15 \text{ für mittlere Breiten} \\ &= 0,22 \text{ „ äquatoriale Gegenden.} \end{aligned}$$

Erfolgt diese Einstrahlung während der Dauer einer Periode (ein Jahr), so stellen sich in Tiefen 1, 5 und 10 m Temperaturen von  $71^\circ$ ,  $59^\circ$  und  $27^\circ$  ein, welche die tiefen, negativen Temperaturen überwiegen. Dadurch werden die in § 4 besprochenen Konvektionsströme verstärkt und es würde sich eine annähernd isotherme Schicht ausbilden, wenn nicht die in die Tiefe absteigende Temperaturwelle eingreifen würde. Wie die Zahlen der Tabelle zeigen, liefert diese in den obersten Schichten mit der Höhe zunehmende Temperaturen. Wir erhalten so das typische Bild einer Sprungschicht: Eine warme Oberflächenschicht mit langsam abnehmender Temperatur, an welche sich unvermittelt erst rasche, dann langsam werdende Temperaturabnahme anschliesst. Wiederum aber zeigt sich die Unstimmigkeit, dass sich das beobachtete Phänomen in ungleich tiefern Schichten abspielt, als die Rechnung ergibt.

Für die Oberfläche  $x = 0$  ist zu  $i_1$  noch die Einstrahlung der Atmosphäre  $i_a$  hinzuzufügen. Ich habe (wie schon oben, S. 417) dieses  $i_a$  in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung berechnet und erhalten:

Bodentemperatur der Atmosphäre	$t = -20$	$-10$	$0$	$15$	$20^\circ$
Niveau von Zürich				0,38	
Meeresniveau	0,26	0,30	0,34		0,45

Damit können wir setzen:

Für den Sommer im Meeresniveau

$$i_1 + i_a = 0,15 + 0,45 = 0,60; \text{ gibt } \bar{u}_{\infty} = 19^\circ$$

Für den Winter im Meeresniveau

$$\begin{aligned} t = 0^\circ, & \quad i_1 + i_a = 0,15 + 0,34 = 0,49; \quad \text{„} \quad \bar{u}_{\infty} = 4,5^\circ \\ t = -10^\circ, & \quad i_1 + i_a = 0,15 + 0,30 = 0,45; \quad \text{„} \quad \bar{u}_{\infty} = -1,5^\circ \\ t = -20^\circ, & \quad i_1 + i_a = 0,15 + 0,26 = 0,41; \quad \text{„} \quad \bar{u}_{\infty} = -7,5^\circ \end{aligned}$$

Für Zürich

$$t = 15^\circ, \quad i_1 + i_a = 0,15 + 0,38 = 0,53; \quad \text{„} \quad \bar{u}_{\infty} = +13^\circ$$



Die Jahresschwankung erhöht diese Temperaturen um rund  $2,3^{\circ}$  und vermindert sie im Winter um denselben Betrag. Dies sind durchaus annehmbare Werte, bedingt durch Strahlung und Wärmeleitung, unter Ausschluss sogenannter „äusserer Wärmeleitung“.

Die *tägliche* Periode des Temperaturganges bietet in Anbetracht der viel kleineren umgesetzten Wärmemengen weniger Interesse wie die jährliche Periode. Ihre theoretische Behandlung aber stellt sich ungleich schwieriger. Während der jährliche Gang der Einstrahlung angenähert durch eine Sinuskurve dargestellt werden kann, ist diese Kurve bei der täglichen Periode diskontinuierlich: bei Tage Erhebungen von der Form  $A + B u 2\pi \frac{t}{\tau}$ , getrennt durch Stücke der Abszissenachse bei Nacht, analytisch darstellbar durch eine überaus schlecht konvergierende Fourierreihe. Einblick in die tatsächlichen Verhältnisse gestattet der Umstand, dass das  $N = \frac{2\pi}{\tau} \text{ cm}^{-1}$  der beiden Perioden von verschiedener Grössenordnung ist:  $N(\text{Jahr}) = 1,99 \cdot 10^{-7}$ ,  $N(\text{Tag}) = 7,27 \cdot 10^{-5}$ . Das hat zur Folge, dass im Ausdruck

$$e^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{N}{2}}}$$

bei der täglichen Welle der Exponent bei gleichem  $x$  20 mal kleiner ist. Die *absteigende* Temperaturwelle erlischt deshalb bereits in einer Tiefe von rund 50 cm, nachdem sie in einer Tiefe von rund 1 cm ihren Maximalwert erreicht hat. Dieser ist bei den praktisch vorliegenden Messungen bereits in der „Oberflächentemperatur“ enthalten. Die *stehende* Temperaturwelle wird, wenn die Einstrahlung durch eine Fourierreihe dargestellt wird, durch einen Ausdruck von der Form

$$\sum_{n=1} R_{N_n} e^{-\nu x}$$

gegeben. Dabei werden die  $N_1, N_2 \dots$  immer von gleicher Grössenordnung gegenüber den  $N(\text{Jahr})$  sein. Das hat zur Folge, dass die Phase  $\varphi$ ,  $\text{tg } \varphi = -\frac{N}{a^2 \nu^2}$  bereits in der geringen Tiefe von rund 20 cm ihren Maximalwert  $\frac{\pi}{2}$  erreicht. Mit zunehmender Tiefe stellt sich die Maximaltemperatur nicht immer später, sondern gleichzeitig im Laufe des Nachmittags ein, in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Nehmen wir aber bis 1 cm Tiefe eine tägliche Temperaturschwankung von (Tabelle)  $\frac{11,78 + 22,72}{2} = 17^{\circ}$  an, so hat diese schon in einer Tiefe von 5 m auf  $0,16^{\circ}$ , also  $\frac{1}{100}$  ihres Wertes abgenommen. Eine Schwankung von  $2^{\circ}$  hätte in 5 m Tiefe auf den

unmessbar kleinen Wert  $0,02^{\circ}$  abgenommen. Nun liegen für die tägliche Temperaturschwankung ausgezeichnete Messungen von GRIESINGER am Weissensee vor, deren Ergebnisse aber mit der Rechnung in krassem Widerspruch stehen. Denn wir lesen bei GRIESINGER: „Nehmen wir z. B. die Temperaturschwankung am 5. September, so finden wir an der Oberfläche des Sees eine Schwankung von  $2^{\circ}$ ; von 2—16 m Tiefe beträgt dieselbe durchschnittlich  $0,4^{\circ}$ , hierauf von 18—35 m stets  $0,1^{\circ}$  und schliesslich bei 40 m Tiefe ist keine Temperaturschwankung mehr zu konstatieren. Ähnliche Verhältnisse ergaben sich bei Temperaturmessungen von EXNER am Wolfgangsee. Ermittelt wurden folgende Schwankungen (mittlere Extreme):

in 24 cm Tiefe gemessen  $0,88^{\circ}$ , 149 cm  $0,35^{\circ}$ , 524 cm  $0,24^{\circ}$   
 in 87 cm „ „ „  $0,52^{\circ}$ , 274 cm  $0,24^{\circ}$ ,

Diese viel zu hohen Temperaturen in der Tiefe sind ohne andere Temperaturquelle nicht erklärbar, und ebensowenig die Griesinger'sche Angabe, dass im Intervalle 2—16 m eine mittlere Temperatur  $0,4^{\circ}$  und im Intervalle 18—35 m stets von  $0,1$  vorhanden ist, da doch die Einstrahlung proportional der Exponentialgrösse  $e^{-\nu x}$  abnimmt. Und die Wisconsin Geological and Natural History Survey, welche eine Untersuchung über den Betrag der Energie der in das Wasser eindringenden Sonnenstrahlen von mehr als 25 Seen durchführte (Schwarzkuigel-Thermometer im Vakuum) kommt auf Grund ihrer Energie- (nicht Temperatur-) Messungen zu dem Schlusse: „Es ist ganz unmöglich, dass ein nennenswerter täglicher Gang der Temperatur in den Seen in der Tiefe von 5 m gefunden werden kann“<sup>1)</sup>.

### Zusammenfassung.

Die vorstehenden Ausführungen dürften gezeigt haben, dass im Gegensatz zu hergebrachter Ansicht die Wärmeleitung im Temperaturproblem der Seen eine wesentliche Rolle spielt. Die Einstrahlung nimmt nach dem Gesetze  $ie^{-\nu x}$  mit der Tiefe ab und in der Zeiteinheit wird die absorbierte Energiemenge  $\nu ie^{-\nu x}$  in Wärme umgesetzt. Dadurch würde sich die Tatsache erklären, dass die Wassertemperatur mit der Tiefe abnimmt. Man beachtet dabei aber nicht, dass, um die so unbegrenzt ansteigenden Temperaturen zu verhüten, diese sich ansammelnden Wärmemengen nach der Wärme abgebenden Oberfläche abgeführt werden müssen. Da Konvektionsströme bei den negativen Temperaturgradienten nicht auftreten können, und bei den vorkommenden Temperaturen innere Strahlung keine Rolle spielen kann, bleibt zur Überführung

<sup>1)</sup> Die Absorption der Sonnenenergie in den Seen, Meteorol. ZS. S. 300, 1914.



nur Leitung übrig. Die Temperaturzunahme ohne Leitung würde durch die Gleichung

$$a) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i \nu}{\rho c} e^{-\nu x}$$

mit der Folge

$$u = \frac{i \nu}{\rho c} e^{-\nu x} \cdot t + \text{const}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{i \nu^2}{\rho c} e^{-\nu x} t$$

geregelt, und die Temperatur würde, bei *negativem* Gefälle, proportional der Zeit ansteigen. Mit Berücksichtigung der Leitung aber ist statt a) anzusetzen

$$b) \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{i \nu}{\rho c} e^{-\nu x}$$

Dauert der Einstrahlungsprozess hinreichend lange Zeit an, so dass sich annähernd stationäre Verhältnisse,  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , ausbilden, so folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = +\frac{i}{k} e^{-\nu x}$$

also *Umkehrung* des Vorzeichens, Temperaturzunahme nach der Tiefe, wodurch Leitung nach der Oberfläche ermöglicht ist. Wie in §§ 4 und 5 auseinandergesetzt, beginnt diese Schicht mit Temperaturzunahme nach unten, im Laufe der Zeit an Mächtigkeit zunehmend, sich schon mit beginnender Einstrahlung auszubilden. Konvektionsströme machen diese Schicht annähernd isotherm und nach unten nimmt die Temperatur erst rasch, dann immer langsamer ab. Wie weiter in § 6 auseinandergesetzt, bildet sich bei periodischer Einstrahlung durch Wärmeleitung, und nur dann, eine Temperaturwelle aus, die mit abnehmender Amplitude in die Tiefe absteigt. (Ähnlich der bekannten Temperaturwelle im festen Erdboden.) Dadurch erhöht sich die Temperatur der isothermen Schicht nach oben zu und wir erhalten so das Phänomen der Sprungschicht. Qualitativ werden so die beobachteten Temperaturverhältnisse treffend wiedergegeben, quantitativ aber besteht ein unüberbrückbarer Gegensatz zwischen Rechnung und Beobachtung, indem letztere die geschilderten Vorgänge in ungleich tiefere Schichten verlegt wie die Rechnung. Die direkte Messung liefert noch Temperaturschwankungen in Tiefen, die durch einfache Absorption eindringender Strahlung völlig unerklärbar ist. Es muss noch eine völlig unbekannte Temperatur- (nicht Wärme-)quelle wirksam sein, deren Entdeckung für das Temperaturproblem der Seen von fundamentaler Bedeutung sein dürfte.