

# Modellbetrachtungen über die Abweichung der photometrischen Eigenschaften eines Empfängers von der linear-eindeutigen Struktur

Autor(en): **König, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **15 (1942)**

Heft I

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111294>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Modellbetrachtungen über die Abweichung der photometrischen Eigenschaften eines Empfängers von der linear-eindeutigen Struktur

von H. König (Bern).

(Mitteilung aus dem Eidg. Amt für Mass und Gewicht)

(30. XI. 1941.)

*Zusammenfassung:* Aus didaktischen, grundsätzlichen und praktischen Gründen wird die Frage der Abweichungen der Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges von der linear-eindeutigen Struktur axiomatisch und modellmässig besprochen. Die vollständige Beschreibung dessen, was der Photometriker tut und empfindet, geht über den Rahmen der gewöhnlichen kommutativen Algebra hinaus.

Ein gewisser Zusammenhang zwischen den sog. Abweichungen von der Eindeutigkeit und denjenigen von der Linearität, der sich für das wirkliche Auge zwar nicht beweisen, aber doch plausibel machen lässt, gestattet, die Kontrolle der Beobachter auf ihre Eignung zum Photometrieren praktisch zu vereinfachen, indem z. B. die Eindeutigkeitsprüfungen weggelassen werden können.

## § 1. Problemstellung.

Was die Hellempfindlichkeit als Begriff und Gegenstand der Forschung unseres Erachtens so interessant macht, ist die Tatsache, dass er nahe an der Grenze dessen liegt, was man noch mit einigem Erfolg in den harten Panzer der Kategorie „Grösse“ im physikalischen Sinne des Wortes hineinpressen kann.

Zu den nachstehenden Modellbetrachtungen sind wir aus drei äusserlich verschiedenen, aber doch derselben Wurzel, der Komplexität der Struktur des Helligkeitsbegriffes entspringenden Gründen gelangt.

1. *Didaktisches.* Der Studierende pflegt anzunehmen, die gewöhnliche Algebra sei, abgesehen von der Mathematik, nur in gewissen Zweigen der theoretischen Physik als Ausdrucksmittel zu arm, um die Mannigfaltigkeiten und Beziehungen zu beschreiben; sonst gelte sie „selbstverständlich“. Er weiss, dass die Quantenmechanik eine *nicht-kommutative* Multiplikation braucht. Er weiss, dass die Frage der Existenz eines Elektrons bestimmter Ladung kaum anders als mit *nicht-linearen* Feldgleichungen angepackt werden kann und dass Gleichrichtereffekte in Elektronenröhren nur aus der *Nicht-Linearität* der Charakteristik dieser Röhren verstanden werden kann. Er weiss auch, dass das magne-

tische Potential im stationären Leiterfeld eine *vieldeutige* Funktion des Ortes ist. Aber er ist nicht gewohnt, aus

$$a = b, \quad b = c : a \neq c \quad (1)$$

zu folgern, und noch befremdender muss ihm die Behauptung: aus

$$a = b \text{ folgt } b \neq a \quad (2)$$

erscheinen.

Das Gebiet der heterochromen Photometrie ist nun erfreulicherweise das reinste Übungsfeld für solche Erörterungen, indem Fälle wie (1) und (2) dort die normalen sind, sofern man nicht ihren Charakter durch eine Reihe vorgängiger Abstraktionen oder Massnahmen entstellt. Die Kritik des Vorgehens des Photometers bei seiner Arbeit und die Axiomatik des aus den Experimenten aufgebauten Begriffs der Hellempfindung sind, wie wir sehen werden, miteinander geradezu gleichwertig.

Es kann nichts schaden, zu versuchen, die Experimente, die der Photometriker ausführt, *so mathematisch zu beschreiben und zu analysieren, wie er sie wirklich ausführt.*

Dabei werden wir uns nicht durch Fragen aufhalten lassen, wie z. B. ob das „Umlegen“ des Photometerkopfes („Kommutieren“) zwecks Ausschalten der Unsymmetrie des Photometers als eine äusserliche, methodische, rein geometrische, nicht spezifisch heterochrome Angelegenheit aufzufassen sei und ob man darin nur einen Mangel der Apparatur zu erblicken habe. Ist die Tatsache, dass man in gewissen Fällen zwei Messungen hintereinander in verschiedenem Ermüdungszustand des Auges ausführen muss, ein „Nachteil“ oder eine „Eigenschaft“ des Verfahrens? Oder des Auges? Ist die nach dem Flimmerverfahren bestimmte Hellempfindlichkeit  $V(\lambda)$  eine Eigenschaft des Flimmerverfahrens oder des Auges? Welches ist die Grenze zwischen den wesentlichen und den unwesentlichen Besonderheiten der photometrischen Methode?

Solche Fragen, die voller unbewusster Annahmen stecken, und eben deshalb nicht so leicht zu beantworten sind, lassen wir hier in den Hintergrund treten.

Wir werden beschreiben, was wir messen; dies wird uns zu den Rechenregeln führen. Um auch dort, wo uns das Experiment auf Ungleichungen wie (1) führt, wirklich rechnen zu können, werden wir mit Modellen arbeiten, die mit der Wirklichkeit nur so viel gemeinsam haben, als dass sie einen ihrer charakteristischen Züge wiedergeben.

2. *Grundsätzliche Erwägungen.* Die praktische Lichttechnik verlangt, den Bedürfnissen der Industrie entsprechend, eine ein-

fache Berechnung der Leuchtdichte. Daher hat die Internationale Beleuchtungskommission eine Bewertung jeglicher photometrischer Grösse auf Grund des Ausdrucks

$$\text{Eichkonstante} \cdot \int S(\lambda) V(\lambda, \text{int}) d\lambda \quad (3)$$

beschlossen. Dieser Beschluss enthält in der Hauptsache 2 *strukturelle Axiome*: 1. Die Forderung, dass aus jeder Strahlung  $S(\lambda)$  sich *eindeutig* ein „Licht“wert ausrechnen lasse; 2. die Forderung, dass die einzelnen physikalischen Komponenten des Lichtes *unabhängig* voneinander zum Lichteindruck beitragen, also *linear* in die Formel eingehen, und ferner *eine Definition*, nämlich die zahlenmässige Festlegung der internationalen Hellempfindlichkeitsfunktion  $V(\lambda, \text{int})$ .

Es ist hinlänglich bekannt, dass das wirkliche Auge dieser einfachen Struktur auch für diejenigen Verfahren, bei denen der Farbunterschied zwischen den zu vergleichenden Lichtern auf irgendeine Art beseitigt wird, im besonderen beim Flimmerverfahren, selbst innerhalb ein und demselben Verfahren nur in erster Näherung erfüllt ist und dass die Forderung der  $V(\lambda, \text{int})$ -getreuen Messung, m. a. W. die Schaffung eines Standardauges gemäss (3) nie mehr als ein vernünftiger Kompromiss zwischen den Eigenschaften des wirklichen Auges und den Erfordernissen der Industrie sein kann.

Ohne im einzelnen die Stellen zu bezeichnen, sei hier bemerkt, dass in der Literatur bei Erörterungen über den oben erwähnten Kompromiss bald die Forderung der Kohärenz [= Darstellbarkeit durch eine Form wie (3), aber evtl. mit anderem  $V(\lambda)$ ], bald die Forderung der Linearität, bald diejenige der Eindeutigkeit allein genannt oder wenigstens in den Vordergrund gerückt oder, wie wir sehen werden, teilweise zu Unrecht als *die* strukturbestimmte Forderung hingestellt wird.

Es ist bekannt, dass man Beispiele von „nichtkohärenten“, aber logisch widerspruchsfreien Strukturen angeben kann<sup>1)2)</sup> — und wir werden den bekannten weitere hinzufügen —, aber es ist nicht klargestellt worden, ob und in welcher theoretischen Beziehung die Eindeutigkeits- und die Linearitätsforderung zueinander stehen.

Da es eine Theorie der Abweichungen von (3) nicht gibt, bleibt wohl kaum ein anderer Weg, als möglichst viele, strukturell möglichst verschiedene, alle theoretischen Möglichkeiten umfassende Modelle anzugeben und durchzurechnen.

3. *Praktische Bedeutung*. Mit der Feststellung, dass Eindeutigkeit und Linearität zwei unabhängige Axiome darstellen, kann

man sich nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch nicht zufrieden geben. Die Kontrollversuche zur Bestimmung des Grades der Nicht-Kohärenz sind nicht immer einfach, und da trotz der teilweisen logischen Unabhängigkeit eine gewisse Gleichwertigkeit verschiedener Versuchsgruppen theoretisch (diese Arbeit) und experimentell (Dissertation LÜTHY<sup>3</sup>) plausibel gemacht werden kann, so lässt sich die experimentelle Aufgabe der „Kohärenz-Prüfung“ eines Beobachters stark vereinfachen.

*Über den Modellbegriff.* Bevor wir mit der Aufzählung der Axiome und der Angabe von Modellen beginnen, möchten wir zum richtigen Verständnis des Folgenden eindringlich darauf hinweisen, dass ein Modell nur Realisierung eines Axiomensystems, also mehr Beispiel als Theorie ist. Mit dem Begriff „Theorie“ verbindet man gewöhnlich den Eindruck einer gewissen Verbindlichkeit, einer Verpflichtung zum „Richtig-Sein“. Das Modell *kann* selber eine Theorie sein, will aber nur einen oder mehrere charakteristische Züge, losgelöst von andern, als existenzmöglich nachweisen. Unsere Modelle werden mit den Eigenschaften des menschlichen Auges ebensowenig und ebensoviel zu tun haben, wie die nichteuklidische Geometrie auf der Kugel mit unserem physikalischen Raum, d. h. einerseits nichts, und doch wieder sehr viel. Über die tiefere Bedeutung des Modellbegriffs für die Erkenntnistheorie orientiert das Werk von GONSETH<sup>6</sup>).

## § 2. Beschreibung einiger Experimente.

Zunächst einige Definitionen.  $S$ , abgekürzt für  $S(\lambda)$ , bedeutet die z. B. auf die Fläche eines Gipsprismas auffallende Energie,  $\{ S \}$  bedeutet die von  $S$  erzeugte, von uns als Leuchtdichte wahrgenommene, zahlenmässig vorläufig nicht erfassbare Empfindung. An Stelle des Auges kann eine Photozelle mit Instrument, letzteres zunächst ohne Skala, treten.

Der Übergang von  $S$  zu  $\{ S \}$  umfasst alle Besonderheiten des Empfängers (Photometer einschliesslich Auge, Photozelle einschliesslich Verstärker und Instrument usw.). Während im Falle der Photozelle eine Ausschlagsmethode in Frage kommen könnte, kann das Auge wegen des Fehlens einer Skala (Metrik) nur als Nullinstrument wirken. Im ersteren Fall *kann*, im letzteren Fall *muss* sich unsere Tätigkeit in der Form von Gleichungen ausdrücken. Die vom Arbeiten an der Photometerbank herrührende Gewohnheit, das eine Licht als das linke, das andere als das rechte zu bezeichnen, wollen wir auch im Falle des objektiven Empfängers beibehalten.

Die *Operation* oder, wie wir sie nennen wollen, die *Gleichung*

$$\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}$$

besagt z. B. im Falle der Flimmerphotometrie, dass Flimmerfreiheit bestehe, wenn links  $S_1(\lambda)$ , rechts  $S_2(\lambda)$  auf das Gipsprisma auffalle. Für den Direktvergleich entspricht die Gleichung der grössten Ähnlichkeit der Eindrücke  $\{ S_1 \}$  und  $\{ S_2 \}$ .

Der Übergang von einer Gleichung  $\dots \rightarrow \{ S \}$  zu einer Gleichung  $\{ S \} \rightarrow \dots$  ist der Ausdruck dafür, dass man dieselbe Strahlung erst rechts, dann links habe wirken lassen.

Wir definieren:

Symmetrisches Photometer:  $\{ S \} \rightarrow \{ S \}$  für alle  $S$ ;

Unsymmetrisches Photometer:  $\{ S \} \not\rightarrow \{ S \}$ , d. h. gleiche Strahlungen erzeugen nicht gleiche Eindrücke. Man kann diesen Fall auch so beschreiben:

$$\begin{cases} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ k S_1 \}, \quad k \neq 1. \end{cases}$$

Um der Unsymmetrie von Anfang an experimentell aus dem Wege zu gehen, kann man den Begriff „gleich“ durch die einseitige Ersetzbarkeit definieren:

$$\begin{array}{c} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \hline \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \end{array} \quad (4)$$

In Worten:  $S_2$  ist gleichwertig  $S_1$ , wenn zuerst  $S_1$ , dann  $S_2$  der Strahlung  $S_3$  experimentell gleich gemacht werden. Das Zeichen  $\rightarrow$  entspricht also keiner direkten experimentellen Operation.

Entsprechend der oben besprochenen räumlichen Unsymmetrie sollte der Vollständigkeit halber eine zeitliche Unsymmetrie betrachtet werden, in dem Sinn, dass die Vertauschung der Reihenfolge zweier Messungen einen Einfluss auf das Resultat hat, dass also für *dieselben*  $S_1, S_2, S_3$  wie oben wegen Nachwirkungserscheinungen gilt:

$$\begin{array}{c} \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ k S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \hline \{ S_2 \} \rightarrow \{ k S_1 \}, \quad k \neq 1. \end{array} \quad (5)$$

Um in der algebraischen Berücksichtigung der experimentellen Möglichkeiten nicht weiter zu gehen, als unbedingt nötig ist, um das Wesentliche erkennen zu lassen, lassen wir den Einfluss der Reihenfolge der Messungen, also der Vorgeschichte, beiseite. In praxi macht man dies so: Man vergleicht abwechselungsweise

$S_1$ , dann  $S_2$ , dann  $S_1$ , dann  $S_2$  usw. mit  $S_3$ , bis die Werte stabil werden (zeitliches „Kommutieren“). Hingegen ist ein entsprechendes räumliches Kommutieren durch Vertauschen von links und rechts nicht bei jedem Photometer möglich, weshalb wir die räumliche Unsymmetrie formelmässig ausdrückten.

Es gibt noch eine weitere Unsymmetrie, die wir in der Folge nicht berücksichtigen, aber der Vollständigkeit halber nennen wollen:  $\{ S_1 + S_2 \} \rightarrow \dots$  braucht nicht dasselbe zu bedeuten wie  $\{ S_2 + S_1 \} \rightarrow \dots$ , indem wir der Vertauschung der Reihenfolge der Summanden die Vertauschung der Lichtquellen auf derselben Seite zuordnen. Ungleichwertigkeit tritt ein, wenn z. B. beide Strahlungen  $S_1$  und  $S_2$  unter verschiedenen Winkeln auf den Photometerschirm fallen.

Auch der Fall des falschen Lichtes, welches eine von 0 verschiedene Strahlung  $S_1$  zum Ausgleich benötigt und zu einer Gleichung von der Form  $\{ S_1 \} \rightarrow 0$ , ( $S_1 \neq 0$ ) führt, soll später nicht vorkommen.

Diese Überlegungen können, beiläufig bemerkt, dem Nichtmathematiker modellmässig einigermaßen verständlich machen, dass man zur Fundierung der gewöhnlichen Algebra der reellen Zahlen 18 Axiome aussprechen muss, bevor man rechnen kann!

Es muss noch bemerkt werden, dass Ausdrücke wie  $n\{ S \}$  oder  $\{ S_1 \} + \{ S_2 \}$  experimentell *nichts* bedeuten, da sie keiner wirklich durchführbaren Massnahme entsprechen. Rechnerisch werden sie erst später einen Sinn erhalten.  $\{ S \}$  hat vorläufig nicht den Charakter einer gewöhnlichen Rechengrösse.

Die beiden Strahlungen  $S_1$  und  $S_2$  in  $\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}$  können im Farbdreieck als zwei verschiedene Punkte dargestellt werden, im Gegensatz zum Fall der Kolorimetrie, wo zwei „gleiche“ Strahlungen durch gleiche Intensität und gleichen Farbort charakterisiert werden.

### *Zusammenstellung der wichtigsten Versuche.*

1. *Grundversuche bzw. Definitionen.* Die „Gleichheit“ kann auf zwei verschiedene Arten definiert werden:

1.1: Grundversuch bestehend aus 1 Abgleichung:

$$\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}$$

In Worten: Eindruck von  $S_1$  links gleich Eindruck von  $S_2$  rechts.

1.2: Grundversuch bestehend aus 2 Abgleichungen:

$$\frac{\begin{matrix} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \end{matrix}}{\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}}$$

In Worten: Eindruck von  $S_1$  ist ersetzbar durch Eindruck von  $S_2$ .

2. *Kontrollversuche bzw. Feststellungen.* Das Ergebnis dieser Versuche kann durch eine Zahl  $k$  (im allgemeinen  $\neq 1$ ) ausgedrückt werden; der Buchstabe  $k$  bedeutet in jedem Versuch etwas anderes.

2.1: Kontrollversuch bestehend aus 1 Abgleichung:

$$2.1.1: \quad \{ S_1 \} \rightarrow \{ k S_1 \}, \quad k \neq 1$$

2.2: Kontrollversuche bestehend aus 2 Abgleichungen:

$$2.2.1: \quad \frac{\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}}{\{ S_2 \} \rightarrow \{ k S_1 \}}, \quad k \neq 1$$

$$2.2.2: \quad \frac{\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}}{\{ S_1 \} \rightarrow \{ k S_2 \}}, \quad k \neq 1$$

Diese Möglichkeit der Veränderung der Abgleichung bei Wiederholung wollen wir, wie bereits oben bemerkt wurde, weglassen, also in diesem Fall stets  $k = 1$  annehmen.

$$2.2.3: \quad \frac{\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}}{\{ n S_1 \} \rightarrow \{ k n S_2 \}}, \quad k \neq 1, \quad n \text{ eine positive Zahl.}$$

$$2.2.4 \text{ (siehe Fig. 1):} \quad \frac{\begin{matrix} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_3 \} \rightarrow \{ k S_3 \} \end{matrix}}{\{ S_1 + S_3 \} \rightarrow \{ k' (S_2 + k S_3) \}}, \quad k' \neq 1$$

2.3: Kontrollversuche bestehend aus 3 Abgleichungen:

$$2.3.1 \text{ (siehe Fig. 1):} \quad \frac{\begin{matrix} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \end{matrix}}{\{ S_3 \} \rightarrow \{ k S_1 \}}, \quad k \neq 1$$

$$2.3.2 \text{ (siehe Fig. 1):} \quad \frac{\begin{matrix} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \end{matrix}}{\{ S_1 \} \rightarrow \{ k S_2 \}}, \quad k \neq 1$$



Dieser Fall, bei welchem  $S_2$  *experimentell* auf beiden Seiten auftritt, ist vom Grundversuch 1.2 wohl zu unterscheiden.

$$\begin{aligned}
 2.3.3 \text{ (siehe Fig. 1): } & \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\
 & \{ S_3 \} \rightarrow \{ S_4 \} \\
 & \hline
 & \{ S_1 + S_3 \} \rightarrow \{ k(S_2 + S_4) \}, \quad k \neq 1
 \end{aligned}$$

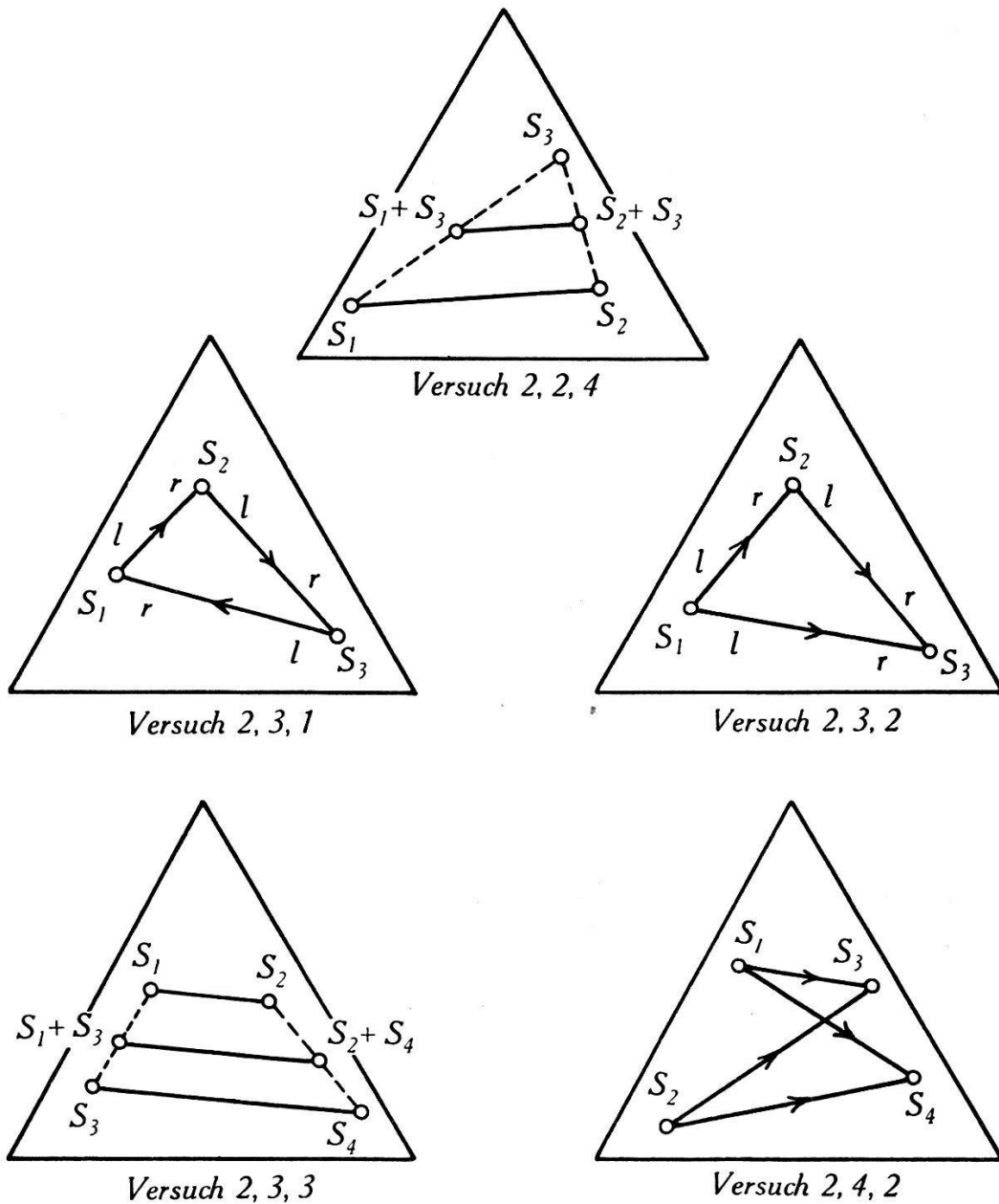


Fig. 1.

Schematische Darstellung einiger photometrischer Kontrollversuche in der Farbenmannigfaltigkeit. Die ausgezogenen Verbindungslinien entsprechen den „Gleichungen“. Die Nummern der Versuche decken sich mit denjenigen in der Zusammenstellung in § 2.

2.4: Kontrollversuche bestehend aus 4 Abgleichungen:

$$2.4.1: \quad \frac{\begin{cases} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_3 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_4 \} \end{cases}}{\{ S_4 \} \rightarrow \{ k S_2 \}}, \quad k \neq 1$$

$$2.4.2 \text{ (siehe Fig. 1): } \quad \frac{\begin{cases} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_4 \} \end{cases}}{\{ S_2 \} \rightarrow \{ k S_4 \}}, \quad k \neq 1$$

Wenn restlose Symmetrie, Eindeutigkeit, Linearität, und was wir evtl. noch an guten Eigenschaften verlangen können, gewährleistet wären, so wären alle oben eingeführten  $k = 1$ . Uns werden die Zusammenhänge zwischen den  $k$ , wenn sie nicht gleich 1 sind, interessieren, also die Frage, inwiefern die aufgezählten Versuche dieselben oder verwandte Aussagen über den Empfänger abgeben.

### § 3. Übersicht über die Axiome.

Vorstehend beschrieben wir, was man experimentell *definieren* und *machen* kann; hier folgt die Zusammenstellung dessen, was man *fordern* kann.

Axiom  $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$ :  $\{ S \} \rightarrow \{ S \}$  für alle Strahlungen  $S$ .

Dieses „schwächere“ Symmetriexiom fordert, dass zwei energiegleiche, also gleich zusammengesetzte Strahlungen ohne Änderung in der Abgleichung zwischen links und rechts vertauschbar seien.

$$\text{Axiom } \mathfrak{S}: \quad \frac{\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}}{\{ S_2 \} \rightarrow \{ S_1 \}}$$

Dieses „starke“ Symmetriexiom, welches die Gültigkeit der zweitgenannten Gleichung fordert, wenn die erstgenannte erfüllt ist, bezieht sich auf die Vertauschbarkeit *nicht* gleich zusammengesetzter Paare von Strahlungen.

$$\text{Axiom } \mathfrak{C}_4: \quad \frac{\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \}}{\{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \}}$$

gelte für alle  $S_3$ , für welche *eine* der beiden Gleichungen gilt.

$$\text{Wenn z. B.} \quad \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_4 \}$$

ist, so verlangt Axiom  $\mathfrak{C}_4$ , dass auch

$$\{ S_2 \} \rightarrow \{ S_4 \}$$

sei.  $\mathfrak{E}_4$  ist eine „schwache“ Eindeutigkeitsforderung, die nur verlangt, dass zwei im Sinne des Grundversuches 1.2 äquivalente Strahlungen dies unabhängig von der Wahl des Vergleichslichtes seien.

$$\text{Axiom } \mathfrak{E}_3: \quad \frac{\begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \end{array}}{\text{bedingt } \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}}$$

$\mathfrak{E}_3$  ist eine „starke“ Eindeutigkeitsforderung. Man beachte, dass  $S_2$  einmal links und einmal rechts vorkommt.

$$\text{Axiom } \mathfrak{L}: \quad \frac{\begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_3 \} \rightarrow \{ S_4 \} \end{array}}{\text{bedingt } \{ S_1 + S_3 \} \rightarrow \{ S_2 + S_4 \}}.$$

Das Axiom über die Existenz der Subtraktion, insbesondere die Forderung, dass gewöhnlich algebraisch ausgedrückt zu  $a + x = b$  stets nur *eine* Lösung  $x$  existiere, betrachten wir als in unserem Linearitätsaxiom  $\mathfrak{L}$  inbegriffen.

Die Modellbetrachtungen des § 6 werden sich aus didaktischen Gründen nur auf Fälle beziehen, bei denen eines oder mehrere der Axiome  $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{E}_4$ ,  $\mathfrak{E}_3$ ,  $\mathfrak{L}$  *nicht* erfüllt zu sein brauchen.

Die Eindeutigkeitsaxiome  $\mathfrak{E}_3$  und  $\mathfrak{E}_4$  sind nicht die einzigen Möglichkeiten zur axiomatischen Einführung des Gedankens der Unabhängigkeit vom Weg in der Farbmännigfaltigkeit. Man kann auch definieren:

$$\text{Axiom } \mathfrak{E}_3': \quad \frac{\begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \end{array}}{\text{bedingt } \{ S_3 \} \rightarrow \{ S_1 \}}, \quad \text{und}$$

$$\text{Axiom } \mathfrak{E}_4': \quad \frac{\begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_3 \} \rightarrow \{ S_2 \} \end{array}}$$

gültig für alle  $S_3$ , für welche eine der beiden Gleichungen gilt.

Im § 5 wird bewiesen, dass Axiom  $\mathfrak{E}_3$  zusammen mit Axiom  $\mathfrak{R}$  (s. unten) die Axiome  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$  bedingt. Für  $\mathfrak{E}_3'$  führt, wie wir ohne Beweis angeben wollen, die entsprechende Beweisführung nicht zum Ziel. Hingegen kann man unter der Annahme, dass  $\{ kS \}$  eine monotone Funktion von  $k$  sei, dass also mit zunehmender Strahlung der Eindruck stets zunehme, ebenfalls zeigen, dass  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$  praktisch als direkte Folge von  $\mathfrak{E}_3'$  anzusehen seien.  $\mathfrak{E}_4'$  ist, wie man aus den Definitionen direkt ablesen kann, in  $\mathfrak{E}_3'$  enthalten. Setzt man  $\mathfrak{S}$  voraus, so werden  $\mathfrak{E}_3$  und  $\mathfrak{E}_3'$  gleichwertig.

Die Möglichkeit, die Eindeutigkeit auf zwei verwandte, aber doch leicht verschiedene Arten definieren zu können, ist von grundsätzlichem Interesse. Um jedoch die Zahl der in der Folge zu besprechenden Möglichkeiten und Modelle zu reduzieren, und weil bei der Berücksichtigung von  $\mathfrak{E}_3'$  und  $\mathfrak{E}_4'$  nichts grundsätzlich Neues herauskommen würde, lassen wir die Möglichkeiten  $\mathfrak{E}_3'$  und  $\mathfrak{E}_4'$  in der Folge beiseite.

Wie in § 2 bereits angedeutet wurde, betrachten wir als stets erfüllt:

$$\begin{aligned} \text{Axiom } \mathfrak{B}: \quad & \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \text{schliesst} \quad & \{ S_1 \} \rightarrow \{ k S_2 \}, \quad k \neq 1 \end{aligned}$$

aus; den Wechsel des Kriteriums und das Wirken verschiedener  $V(\lambda)$  zu verschiedenen Zeiten betrachten wir also nicht, was aber nicht heissen soll, dass wir das Axiom  $\mathfrak{B}$ , das wir auch als Axiom der Widerspruchsfreiheit betrachten können, eine Selbstverständlichkeit sei.

$$\begin{aligned} \text{Axiom } \mathfrak{R}: \quad & \{ S_1 + S_2 \} \rightarrow \dots \\ \text{ist gleichwertig} \quad & \{ S_2 + S_1 \} \rightarrow \dots; \end{aligned}$$

die auf derselben Seite wirkenden Leuchtdichten sind experimentell kommutierbar.

$$\begin{aligned} \text{Axiom } \mathfrak{R}: \quad & \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}, \text{ hierauf } \{ S_3 \} \rightarrow \{ S_4 \} \\ \text{bedingt stets} \quad & \{ S_3 \} \rightarrow \{ S_4 \}, \text{ hierauf } \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}; \end{aligned}$$

die Reihenfolge der Messungen ist ohne Einfluss.

#### § 4. Zusammenhänge zwischen Axiomen und Experimenten.

Man erkennt leicht, dass die Form, in der die Axiome aufgestellt wurden, mehr oder weniger durch die Art der ausführbaren Experimente „induziert“ wurde. So stehen

Axiom $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$	mit Versuch	2.1.1
„ $\mathfrak{S}$	„	2.2.1
„ $\mathfrak{E}_4$	„	2.4.2
„ $\mathfrak{E}_3$	„	2.3.2
„ $\mathfrak{E}_4'$	„	2.4.1
„ $\mathfrak{E}_3'$	„	2.3.1
„ $\mathfrak{L}$	„	2.2.3, 2.2.4 und 2.3.3

im engsten Zusammenhang. Man versteht jetzt auch die Indices an den  $\mathfrak{C}$ , welche auf die Zahl der im Versuch vorkommenden Abgleichungen hinweisen sollen.

Es ist grundsätzlich wichtig, festzustellen, dass Versuch 2.2.4, der dem Übergießen beider Komponenten der Helligkeitgleichung mit demselben Licht (meist Weiss) entspricht, die Vornahme eines Umweges in der Farbenmannigfaltigkeit bedeutet, dass dieser Versuch also ebensosehr den Charakter einer Eindeutigkeitsprüfung wie denjenigen einer Linearitätsprüfung aufweist. Es gibt demnach Versuche, die in den unmittelbaren Gültigkeitsbereich verschiedener Axiome hineinreichen.

Da das Übergießen mit Weiss praktische Vorteile bietet (JAGGI<sup>4</sup>), LÜTHY<sup>3</sup>), könnte man daran denken, den Versuch 2.2.4 unter Festsetzung der Farbe von  $S_3$  und eines quantitativen Verhältnisses zwischen  $S_3$  einerseits und  $S_1$  und  $S_2$  andererseits zur Definition der Gleichheit an Stelle von Versuch 1.1 zu erheben:

$$\text{Aus} \quad \{ S_1 + S_3 \} \rightarrow \{ S_2 + k S_3 \} \quad (6)$$

folge nach Definition

$$\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}.$$

Dann würde Versuch 1.1 zum Kontrollversuch:

$$\begin{array}{l} \{ S_1 + S_3 \} \rightarrow \{ S_2 + k S_3 \} \\ \{ S_3 \} \rightarrow \{ k S_3 \} \\ \text{bedingt } \{ S_1 \} \rightarrow \{ k' S_3 \}, \end{array} \quad (7)$$

wobei  $k' \neq 1$  nun eine *Eigenschaft* beschreiben würde.

Begrifflich noch interessanter als diese Vertauschung der Rollen zwischen Definition und Eigenschaft ist der teilweise Bedeutungswandel z. B. bei Versuch 2.2.3, bei welchem ein *ohne Theorie nicht näher bestimmbarer Anteil* von  $k - 1$ , also von der Abweichung von  $\mathfrak{L}$ , in der Definition (6) untergehen würde. Versuch 2.2.3 entspricht der Untersuchung der Leuchtdichteabhängigkeit (sog. inverser Purkinje-Effekt). Hinter den vorliegenden Erläuterungen steckt also die praktische Frage der teilweisen Beseitigung der Leuchtdichteabhängigkeit durch passende Definition der „Gleichheit“ (siehe LÜTHY<sup>3</sup>).

Einer entsprechenden Bedeutungs-Transformation als Folge einer Änderung der Definition der Gleichheit unterliegen auch die übrigen Versuche. Als eines der wesentlichen Ergebnisse unserer grundsätzlichen Betrachtungen ist eben diese Feststellung zu betrachten, dass allen Erörterungen über Eindeutigkeit und Lineari-

tät eine axiomatische Festlegung dieser Begriffe vorauszugehen hat und dass die Aussagen hierüber nur relativen Wert besitzen, indem die *Trennung in Eindeutigkeit und Linearität mit einer gewissen Willkür behaftet* ist.

**§ 5. Zusammenhänge zwischen den Axiomen.**

Wenn von den fünf Axiomen von § 3 jedes unabhängig vom andern gelten oder nicht gelten könnte, so wären  $2^5 = 32$  Kombinationen möglich. Aber die Axiome, wiewohl einzeln unabhängig, sind miteinander verkettet, wie Tabelle 1 zeigt.

**Tabelle 1.**  
Zusammenhänge zwischen den Axiomen.  
*A* = Axiom. *F* = Folgerung.

Beziehungs- gruppe	Axiom					Modelle
	$\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{E}_4$	$\mathfrak{E}_3$	$\mathfrak{Q}$	
I	<i>F</i>	<i>A</i>				<i>a b d</i>
II	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>A</i>		<i>a b</i>
III			<i>F</i>		<i>A</i>	<i>a c</i>
IV	<i>A</i>	<i>F</i>	<i>A</i>	<i>F</i>		<i>a b</i>

Zur Erläuterung dieser Tabelle greifen wir einmal das Axiom  $\mathfrak{S}$  heraus: Aus  $\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}$  folgt  $\{S_2\} \rightarrow \{S_1\}$ . Hierin darf für  $S_2$  auch  $S_1$  gewählt werden, ohne dass ein Widerspruch entsteht, also  $\{S_1\} \rightarrow \{S_1\}$ . Dies ist aber Axiom  $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$ . Letzteres ist demnach als Folgerung aus  $\mathfrak{S}$  ableitbar. Diese Feststellung hat keinen Einfluss darauf, ob  $\mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{Q}$  gelten oder nicht gelten. Die Kolonne „Modelle“ wird später erläutert.

Den soeben beschriebenen Beziehungskomplex bezeichnen wir in Tabelle 1 als Beziehungsgruppe I; die leeren Stellen unter  $\mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{Q}$  weisen darauf hin, dass die betreffenden Axiome erfüllt sein können oder nicht.

Beweis zu Beziehungsgruppe II:

Ausgangspunkt ist  $\mathfrak{E}_3$ :

$$\frac{\begin{matrix} \{S_1\} \rightarrow \{S_3\} \\ \{S_2\} \rightarrow \{S_3\} \end{matrix}}{\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}}.$$

Wegen  $\mathfrak{R}$  kann man  $\mathfrak{E}_3$  auch schreiben:

$$\frac{\begin{matrix} \{S_2\} \rightarrow \{S_3\} \\ \{S_1\} \rightarrow \{S_3\} \end{matrix}}{\{S_2\} \rightarrow \{S_1\}}.$$

Demnach ist  $\mathfrak{S}$  Folgerung von  $\mathfrak{E}_3$  und  $\mathfrak{R}$ . Wegen I gilt dies auch für  $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$ .  $\mathfrak{E}_4$  ist direkt in  $\mathfrak{E}_3$  enthalten.

Beweis zu Beziehungsgruppe III:

Wir schreiben Axiom  $\mathfrak{E}_4$  hin, wie wenn es nicht gelten würde:

$$\begin{cases} \{S_1\} \rightarrow \{S_3\}, & \{S_1\} \rightarrow \{S_4\} \\ \{S_2\} \rightarrow \{S_3\}, & \{kS_2\} \rightarrow \{S_4\}, \quad k = ? \end{cases}$$

Unter der Annahme  $\mathfrak{L}$  folgt hieraus

$$\{S_1 - S_2\} \rightarrow 0, \quad \{S_1 - kS_2\} \rightarrow 0$$

und weiter

$$\{S_2(1 - k)\} \rightarrow 0.$$

Nimmt man  $S_2 \neq 0$  an, so muss unter den in § 2 gemachten Einschränkungen  $k = 1$  sein.

$\mathfrak{E}_4$  ist also in  $\mathfrak{L}$  enthalten. Dies ist für uns die theoretisch wichtigste Folgerung. Als einen der Gründe für die im vorangehenden Paragraphen aufgewiesene Möglichkeit, Abweichungen von der Linearität und Abweichungen von der Eindeutigkeit teilweise ineinander zu transformieren, erkennen wir also den Umstand, dass die allgemeine, nicht näher umschriebene Forderung der Linearität stärker ist als die allgemeine Forderung der Eindeutigkeit.  $\mathfrak{E}_4$  ist in  $\mathfrak{L}$  enthalten,  $\mathfrak{E}_3$  aber nicht.

Tabelle 2.

Möglichkeiten der Kombinationen von Axiomen.

+ = Axiom gilt. - = Axiom gilt nicht.

Modell	$\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{E}_4$	$\mathfrak{E}_3$	$\mathfrak{L}$
<i>a</i>	+	+	+	+	+
<i>b</i>	+	+	+	+	-
<i>c</i>	-	-	+	-	+
<i>d</i>	+	+	-	-	-
<i>e</i>	-	-	+	-	-
<i>f</i>	+	-	-	-	-
<i>g</i>	-	-	-	-	-

Der Beweis zu Beziehungsgruppe IV gibt zu keinen besondern Bemerkungen Anlass; wir lassen ihn daher weg.

Betrachten wir nun als Beispiel die folgende Kombination von Axiomen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{S}_{\text{energiegl.}} & \mathfrak{S} & \mathfrak{E}_4 & \mathfrak{E}_3 & \mathfrak{L} \\ + & + & - & + & + \end{array}$$

Mit den Vorzeichen + und — wollen wir andeuten, dass alle Axiome ausgenommen  $\mathfrak{C}_4$  gelten. Diese Kombination ist nicht möglich wegen II ( $\mathfrak{C}_4$  Folge von  $\mathfrak{C}_3$ ) und überdies wegen III ( $\mathfrak{C}_4$  Folge von  $\mathfrak{L}$ ).

Durch Ausprobieren findet man derart, dass von den 32 Möglichkeiten nur die 7 möglich sind, die in Tabelle 2 zusammengestellt sind und denen wir im folgenden Paragraphen die in der ersten Kolonne der Tabelle 2 mit  $a \dots g$  bezeichneten Modelle zuordnen wollen.

### § 6. Beschreibung einiger Modelle und ihrer Eigenschaften.

Wir wollen nun zu den 7 möglichen Kombinationen von Tabelle 2 mindestens je 1 Modell angeben und versuchen, zugleich aus den Modellen rechnerisch einen tieferen Einblick in die relative „Stärke“ der verschiedenen Axiome, im besonderen die Überlegenheit des  $\mathfrak{L}$ -Axioms über die  $\mathfrak{C}$ -Axiome, zu gewinnen.

Vorgängig sei bemerkt, dass wir uns  $V(\lambda)$  aus den Grundreizfunktionen aufgebaut denken können<sup>5)</sup>:

$$V(\lambda) = \varrho r(\lambda) + \gamma g(\lambda) + \beta b(\lambda) \quad (8)$$

$r, g, b$  die Rot-, Grün-, Blaufunktion;  $\varrho, \gamma, \beta$  Koeffizienten, die im Idealfall (Modelle  $a$ ) konstant sind; durch Annahmen über deren Verhalten wollen wir die meisten unserer Modelle definieren.

$\{S\}$  wird bei dieser speziellen Darstellung berechenbar als  $\int S(\lambda) V(\lambda) d\lambda$ .

Wir werden stets folgende Abkürzungen brauchen:

$$\{S\} = (SV) \text{ für } \int S(\lambda) V(\lambda) d\lambda$$

$$R \text{ für } (Sr) = \int S(\lambda) r(\lambda) d\lambda, \quad G = \dots, \quad B = \dots \quad (9)$$

$$R_{12} \text{ für } (S_1 + S_2, r) = \int (S_1(\lambda) + S_2(\lambda)) r(\lambda) d\lambda, \quad G_{12} = \dots, \quad B_{12} = \dots$$

$\{S_1\}_2$  bedeute, dass es sich um die Berechnung von  $\{S_1\}$  in Gegenwart von  $S_2$  als Vergleichslicht handelt.

#### Modelle vom Typus $a$ .

Modell  $a_1$ : Das internationale Standardauge, definiert durch (3), wobei (8) zu (10) wird:

$$V_0 = \varrho_0 r + \gamma_0 g + \beta_0 b = V(\lambda, \text{int}) \quad (10)$$

$\varrho_0, \gamma_0, \beta_0$  konstante Zahlen.



*Modell a<sub>2</sub>*: Jede Vakuumphotozelle bei geringer Belastung:

$$\text{Photostrom} = \text{Konst.} \int S(\lambda) Z(\lambda) d\lambda,$$

wobei die Empfindlichkeitsfunktion  $Z(\lambda)$  der Zelle unabhängig von  $S(\lambda)$  ist.

*Modelle a<sub>3</sub>*: Alle Modelle definiert durch

$$V = V_0 f(\dots),$$

worin  $V_0$  durch (10) gegeben ist und  $f$  eine beliebige Funktion von allem Möglichen, z. B. von  $(V_0 S_1)$ ,  $(V_0 S_2)$ ,  $(V S_1)$  . . . ., aber nicht von  $\lambda$ , sein kann. Die Skala  $(S_i V)$  in Funktion von  $S_i$  wird dadurch nichtlinear; aber man merkt hiervon nichts, da man mit *Gleichungen* arbeitet, deren beide Seiten in gleicher Weise von der Nichtlinearität betroffen werden. Die Gleichung  $\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}$  wird daher stets durch  $(S_1 V_0) = (S_2 V_0)$  gelöst.

*Beispiel*: Objektives Photometer bestehend aus zwei gemäss Modell  $a_2$  ( $Z(\lambda) = V_0(\lambda)$ ) arbeitenden Photozellen und zugehörigen Verstärkern, deren Charakteristik beide gleich krumm sind; die beiden Teil-Photometer über ein Nullinstrument zusammengehängt.

### *Modelle vom Typus b.*

*Modell b<sub>1</sub>*: Modellauge mit Umstimmung des Auges durch Ermüdung der Grundreizfunktionen derart, dass dieselben symmetrisch und proportional den jeweils vorhandenen entsprechenden Farbkomponenten  $R_{12}$ ,  $G_{12}$ ,  $B_{12}$  verändert werden. Beim Vergleich der Strahlungen  $S_1$  und  $S_2$  sei in

$$V = \varrho r + \gamma g + \beta b \quad (8)$$

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \varepsilon_r R_{12})$$

$$\gamma = \gamma_0 (1 + \varepsilon_g G_{12}) \quad (11)$$

$$\beta = \beta_0 (1 + \varepsilon_b B_{12})$$

$\varepsilon_r, \varepsilon_g, \varepsilon_b$  drei unabhängige „Ermüdungskoeffizienten“.

Um zu zeigen, wie die Berechnungen durchgeführt werden, geben wir nachstehend ein Beispiel vollständig. Später werden die Zwischenrechnungen alle weggelassen.

Wir untersuchen  $\mathfrak{E}_3$  und berechnen zu diesem Zweck:

$$\begin{aligned} \{S_1\}_2 - \{S_2\}_1 &= (S_1V)_2 - (S_2V)_1 \\ &= e_0(S_1r) + \gamma_0(S_1g) + \beta_0(S_1b) \\ &\quad + e_0\varepsilon_r(S_1 + S_2, r)(S_1r) + \gamma_0\varepsilon_g(S_1 + S_2, g)(S_1g) \\ &\quad + \beta_0\varepsilon_b(S_1 + S_2, b)(S_1b) \\ &\quad - e_0(S_2r) - \gamma_0(S_2g) - \beta_0(S_2b) \\ &\quad - e_0\varepsilon_r(S_1 + S_2, r)(S_2r) - \gamma_0\varepsilon_g(S_1 + S_2, g)(S_2g) \\ &\quad - \beta_0\varepsilon_b(S_1 + S_2, b)(S_2b) \end{aligned}$$

$$\{S_2\}_3 - \{S_3\}_2 = \dots\dots$$

$$\{S_3\}_1 - \{S_1\}_3 = \dots\dots$$

Die Summe aller drei Gleichungen gibt auf der rechten Seite = 0:

$$\{S_1\}_2 - \{S_2\}_1 + \{S_2\}_3 - \{S_3\}_2 + \{S_3\}_1 - \{S_1\}_3 = 0$$

und im besonderen

$$\{S_3\}_1 = \{S_1\}_3, \text{ wenn } \{S_1\}_2 = \{S_2\}_1 \text{ und } \{S_2\}_3 = \{S_3\}_2 \text{ ist.}$$

$\mathfrak{E}_3$  gilt also. Dass  $\mathfrak{S}$  gilt, folgt unmittelbar aus der symmetrischen Bauart der Glieder  $R_{12} = R_{21}, \dots\dots$ . Würde es sich um das Flimmervorgehen handeln, so würden wir sagen, die Zeiten, während welchen  $S_1$  und  $S_2$  wirken, seien einander gleich, so dass die Ermüdung durch die Farbmitte  $\frac{S_1+S_2}{2}$  verursacht werde. Modell  $b_1$  fällt übrigens, wie in Tabelle 1 rechts vermerkt ist, unter Gruppe II, wodurch die Gültigkeit von  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$  und  $\mathfrak{E}_4$  ohnehin sichergestellt ist.

$\mathfrak{L}$  hingegen gilt nicht:

$$\begin{aligned} \{S_1 + S_3\}_{2+4} - \{S_2 + S_4\}_{1+3} - \{S_1\}_2 - \{S_3\}_4 + \{S_2\}_1 + \{S_4\}_3 \\ = 2 e_0 \varepsilon_r((S_1r)(S_3r) - (S_2r)(S_4r)) + 2 \gamma_0 \varepsilon_g((S_1g)(S_3g) - (S_2g)(S_4g)) \\ + 2 \beta_0 \varepsilon_b((S_1b)(S_3b) - (S_2b)(S_4b)). \end{aligned} \quad (12)$$

Der Empfänger mit „gleichnamig reizproportionaler Umstimmung“ arbeitet also tatsächlich eindeutig und nichtlinear.

*Modell  $b_2$ :* Bei diesem sonderbaren Modell hängen die Hellkoeffizienten  $e \dots$  kreuzweise linear von ungleichnamigen Komponenten des Gesamtreizes in folgender Weise ab:

$$\begin{aligned} e &= e_0 + \varepsilon G_{12} \\ \gamma &= \gamma_0 + \varepsilon R_{12} \\ \beta &= \beta_0 \end{aligned} \quad (13)$$

Wir führen dieses Modell als Kuriosum an, weil es trotz der zu  $b_1$  geradezu entgegengesetzten  $V(\lambda)$ -Eigenschaften dieselbe axiomatische Struktur wie  $b_1$  besitzt.

Die Abweichung von der Linearität folgt zu:

$$\{S_1 + S_3\}_{2+4} - \{S_2 + S_4\}_{1+3} - \{S_1\}_2 - \{S_3\}_4 + \{S_2\}_1 + \{S_4\}_3 = 2 \varepsilon [(S_1g)(S_3r) + (S_3g)(S_1r) - (S_2g)(S_4r) - (S_4g)(S_2r)]. \quad (14)$$

### Modelle vom Typus c.

*Modell  $c_1$* : Ein einfaches, fast triviales Beispiel eines unsymmetrisch, nichteindeutig, aber doch linear arbeitenden Photometers ist ein ideales Photometer (Modelle  $a_1, a_2$ ) mit einem Grauglas im rechten Strahlengang.  $d$  sei die Durchlässigkeit dieses Glases. Dann muss das Licht rechts immer im Verhältnis  $k = 1/d$ -mal stärker als das linke sein, um einen Abgleich zu ermöglichen.  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$  gelten nicht:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_3 \text{ gilt nicht:} \quad & S_1 \rightarrow k S_1 \\ & S_2 \rightarrow k S_1 \\ & \frac{S_2 \rightarrow k S_1}{S_1 \rightarrow k S_2} \end{aligned} \quad k = 1/d (> 1)$$

Hingegen sind  $\mathfrak{E}_4$  und  $\mathfrak{L}$  gültig.

*Modell  $c_2$* : Ein objektives Photometer, bestehend aus 2 linear arbeitenden Photozellen ungleicher Empfindlichkeitsfunktion und einem Nullinstrument.

### Modelle vom Typus d.

*Modell  $d_1$* : Eine der Grundreizfunktionen, z. B. die Rotfunktion, ist einem Ermüdungseffekt unterworfen, der aber nicht vom Rotgehalt, sondern z. B. vom Grüngehalt des im Photometer erscheinenden Gesamtlichtes, also von  $G_{12}$  herrührt:

$$\begin{aligned} e &= e_0(1 + \varepsilon G_{12}) \\ \gamma &= \gamma_0 \\ \beta &= \beta_0 \end{aligned} \quad (15)$$

Die Symmetrie ist gewährleistet, Eindeutigkeit und Linearität jedoch nicht.

Abweichung von der  $\mathfrak{L}$ -Forderung:

$$\begin{aligned} \{S_1 + S_3\}_{2+4} - \{S_2 + S_4\}_{1+3} - \{S_1\}_2 - \{S_3\}_4 + \{S_2\}_1 + \{S_4\}_3 = \\ \varepsilon \varrho_0 [(S_3 + S_4, g)(S_1 - S_2, r) + (S_1 + S_2, g)(S_3 - S_4, r)] = \\ \varepsilon \varrho_0 [A + B] \end{aligned} \quad (16)$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= (S_3 g)(S_1 - S_2, r) + (S_2 g)(S_3 - S_4, r) \\ B &= (S_4 g)(S_1 - S_2, r) + (S_1 g)(S_3 - S_4, r). \end{aligned} \quad (17)$$

Abweichung von der  $\mathfrak{C}_4$ -Forderung:

$$\begin{aligned} \{S_1\}_3 - \{S_3\}_1 - \{S_2\}_3 + \{S_3\}_2 - \{S_1\}_4 + \{S_4\}_1 + \{S_2\}_4 - \\ \{S_4\}_2 = \varepsilon \varrho_0 [(S_3 - S_4, g)(S_1 - S_2, r) - (S_1 - S_2, g)(S_3 - S_4, r)] = \\ \varepsilon \varrho_0 [A - B] \end{aligned} \quad (18)$$

mit derselben Bedeutung von  $A$  und  $B$  wie in (16) und (17).

Da  $S_1 \dots S_4$  beliebige Strahlungen sind, ist es stets möglich, sie so zu wählen, dass  $A + B$  in (16) oder  $A - B$  in (18) zu Null wird, dass also für spezielle Lichterkombinationen Linearität ohne Eindeutigkeit oder Eindeutigkeit ohne Linearität besteht. Im allgemeinen kann man nur sagen, dass wegen des Aufbaues der rechten Seiten von (16) und (18) als Summe und Differenz zweier Grössen, die bei statistisch beliebiger Wahl von  $S_i$  eher gleiches als ungleiche Vorzeichen haben, der Grad der Nichteindeutigkeit (18) im Durchschnitt um eine Grössenordnung kleiner ist als der Grad der Nichtlinearität (16). Dies ist ein neuer Ausdruck für die uns bereits bekannte Unterordnung der  $\mathfrak{C}_4$ -Forderung unter die  $\mathfrak{L}$ -Forderung.

*Modell  $d_2$* : Modell dadurch charakterisiert, dass nicht die Intensität, sondern nur die Qualität des im Mittel wirksamen Lichtes eine Umstimmung bewirkt:

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0(1 + \varepsilon r_{12}), \quad r_{12} = R_{12}/(R_{12} + G_{12} + B_{12}) \\ \gamma &= \gamma_0(1 + \varepsilon g_{12}), \quad g_{12} = G_{12}/(R_{12} + G_{12} + B_{12}) \\ \beta &= \beta_0(1 + \varepsilon b_{12}), \quad b_{12} = B_{12}/(R_{12} + G_{12} + B_{12}) \end{aligned} \quad (19)$$

Dieses Modell hat die besondere Eigenschaft, dass alle Abgleichungen, die bei gleicher mittlerer Farbe, also bei gleichem  $r_{ik}$ ,  $g_{ik}$ ,  $b_{ik}$  ausgeführt werden, zur Gültigkeit von  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{C}_3$  und  $\mathfrak{C}_4$  führen. Wenn z. B. nur Versuche vom Typus 2.2.3, wie sie bei der praktischen Prüfung auf Leuchtdichteabhängigkeit vorkommen, aus-

geführt werden, so ändern sich  $r_{ik} \dots$  beim Übergang von  $S_i$  zu  $nS_i$  nicht, und das Vorhandensein eines Modells vom Typus  $a$  wird vorgetäuscht. Ebenso kann man durch Übergießen gemäss Versuch 2.2.4 mit der Komplementärfarbe zu  $r_{ik}, g_{ik}, b_{ik}$  das Gesichtsfeld im Mittel stets weiss machen, wodurch

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0(1 + \varepsilon/3) \\ \gamma &= \gamma_0(1 + \varepsilon/3) \\ \beta &= \beta_0(1 + \varepsilon/3) \\ \hline V &= V_0(1 + \varepsilon/3), \end{aligned}$$

also wiederum ein Modell mit den Eigenschaften von Typus  $a$  entsteht.

Abgesehen von diesen Sonderfällen findet man für die Abweichungen von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{L}$  komplizierte, von Null verschiedene Ausdrücke, die in keiner einfachen Beziehung zueinander stehen.

*Modell vom Typus e:* Ein objektives Photometer, bestehend aus 2 nichtlinear arbeitenden Photozellen ungleicher Empfindlichkeitsfunktion und einem Nullinstrument.

*Modell vom Typus f:* Nur  $\mathfrak{E}_{\text{energiegl.}}$  soll gelten. Ein Modell definiert durch

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0(1 + \varepsilon R_{\text{links}}), \quad R_{\text{links}} = (S_{\text{links}}, r) \\ \gamma &= \gamma_0 \\ \beta &= \beta_0 \end{aligned} \quad (20)$$

erfüllt diese Bedingung. Für die Abweichung von  $\mathfrak{L}$  folgt

$$2 \varrho \varepsilon [(S_1 r)(S_3 r) - (S_2 r)(S_4 r)] \quad (21)$$

und für die Abweichung von  $\mathfrak{E}_4$

$$\varrho \varepsilon (S_1 - S_2, r)(S_4 - S_3, r). \quad (22)$$

Wie bei Modell  $d_1$  lässt sich abschätzen, dass der Ausdruck (21) durchschnittlich grösser ist als (22).

### Modelle vom Typus g.

*Modell  $g_1$ :* Der Fall, dass keines der 5 Axiome erfüllt ist, liegt bei jedem Spektralphotometer mit unsymmetrischem (nicht vertauschbaren) Strahlengang und dem wirklichen Auge als Empfänger vor.

*Modell  $g_2$ :* Denselben Grad von Allgemeinheit besitzt z. B. die Kombination aus Modell  $f$  und Modell  $c_1$ .

### § 7. Schlussbetrachtungen.

Von  $V(\lambda)$  wissen wir, dass es als einheitliche Funktion von  $\lambda$  nicht existiert. Beschränkt man sich in der Fragestellung, indem man von den unzähligen  $V(\lambda)$  beeinflussenden Parametern nur einen variiert, so lassen sich namentlich für das Flimmerverfahren recht genau einige Abhängigkeiten ermitteln.  $V(\lambda)$  ist also ein Funktional, über dessen Struktur wir einige Anhaltspunkte besitzen. Sind wir nun für die weitere Erforschung der Hellempfindlichkeit auf das Häufen von empirischem Material angewiesen oder besteht einige Hoffnung, über die Struktur von  $V(\lambda)$  auch theoretisch etwas erfahren zu können?

Einen Raum oder eine Mannigfaltigkeit kann man zunächst durch ihre Dimension und ihre Ausdehnung oder auch durch eine Anzahl unabhängiger Eigenschaften zu kennzeichnen versuchen. An diesem letzteren Punkt haben wir angeknüpft. Die Eigenschaften sind nicht Eigenschaften „an sich“, sondern sie sind mitbestimmt durch die Art, wie wir messen. Daher versuchten wir, den unabhängigen Eigenschaften des Auges durch Axiomatisierung (§ 2 ... 5) der photometrischen Operationen (§ 3) beizukommen.

Von der ursprünglichen Absicht, das ganze Verhalten des Photometrikers zu beschreiben, sind wir der Vereinfachung zuliebe rasch abgekommen und haben als messtechnische Eigentümlichkeit nur die Unsymmetrie des Empfängers vollständig behandelt. Dies war das Minimum an Verallgemeinerung, die wir vornehmen mussten. Hätten wir nämlich von vornherein Symmetrie vorausgesetzt, so wäre die bescheidene selbständige Rolle, die die Eindeutigkeitsforderung spielen kann, überhaupt kaum zu erkennen gewesen (§ 5 und 6). Die Zahl von 5 Axiomen, auf die wir uns schliesslich beschränkten, stellt also einen Kompromiss zwischen den Tendenzen zur Vereinfachung und zur Vollständigkeit dar.

Diese 5 Axiome erwiesen sich als verschieden stark (§ 5). Wesentliche Feststellungen — im übrigen ganz elementarer Natur — waren die Möglichkeit, die „Gleichheit“ und die „Eindeutigkeit“ verschieden definieren zu können, die Möglichkeit, Definitionen (Axiome) und Eigenschaften teilweise ineinander transformieren zu können und hauptsächlich die Tatsache, dass das schwache Eindeutigkeitsaxiom  $\mathfrak{E}_4$  durch das Linearitätsaxiom  $\mathfrak{L}$  bedingt wird, das starke Axiom  $\mathfrak{E}_3$  jedoch nicht, sofern Unsymmetrie herrscht.

Die Aufstellung der Beziehungsgruppen I ... IV in § 5 erhebt nicht Anspruch auf Vollständigkeit. Für die in Tabelle 1

rechterhand nicht angeführten, von I ... IV nicht verbotenen Typen  $e, f, g$  ist es also nötig, dass man beweist, dass sie möglich sind. Dieser Beweis erfolgte in § 6 durch Angabe von Beispielen.

Die Angabe der Musterkarte von Modellen erfolgte aber noch aus zwei weiteren Gründen. Zunächst skizziert die Gesamtheit der Modelle als Ganzes den uns ja unbekanntem, zu erforschenden Rahmen, in dem sich das wirkliche  $V(\lambda)$  bewegen kann, besser als die abstrakte Tabelle 2. Alle die in den Modellen enthaltenen Eigenschaften kann  $V(\lambda)$  strukturell grundsätzlich auch aufweisen.

Ferner liess sich an zwei Modellen zeigen, dass wenn  $\mathfrak{E}_4$  und  $\mathfrak{L}$  zusammen nicht gelten, dann die Abweichungen vom  $\mathfrak{E}_4$ -Axiom hinter denjenigen vom  $\mathfrak{L}$ -Axiom im allgemeinen zurückbleiben. Damit ist die Unterordnung von  $\mathfrak{E}_4$  unter  $\mathfrak{L}$  in Form von Gleichungen und Ungleichungen zum Ausdruck gebracht. Sprachlich ist zu empfehlen, zur Kennzeichnung des Idealfalles Typus  $a$  die Linearität in den Vordergrund zu stellen oder wenigstens vorsichtigerweise von einer *linear-eindeutigen* Struktur zu sprechen.

Welche Folgerungen ergeben sich nun für das wirkliche Auge? Wir erwähnten bereits, dass der in der Modellsammlung von § 6 vereinigte Reichtum an Beziehungen  $V(\lambda)$  umschreibt. Darüber hinaus wollen wir uns erlauben, die Unterordnung der Eindeutigkeit unter die Linearität für das wirkliche Auge als plausibel gemacht anzunehmen. Dies ist das praktische Hauptergebnis unserer Betrachtungen.

Bevor wir an die praktische Verwertung dieser Plausibilitäts-Betrachtung gehen können, ist noch eine Übereinkunft nötig. Da *relative* Abweichungen allgemein am deutlichsten hervortreten, wenn die beteiligten Grössen von gleicher Grössenordnung sind, ist es natürlich, Abweichungen von der Eindeutigkeit, wo naturgemäss alle 3 oder 4 Lichter etwa gleich sind, mit Linearitätsversuchen zu vergleichen, bei welchen zwei gleich grosse Mengen überlagert werden, im besondern mit dem Fall, wo im Versuch 2.2.3  $n$  ungefähr = 2 ist. Für solche vergleichbare Versuche erwarten wir also, dass die *Abweichungen von der Eindeutigkeit kleiner als die Abweichungen von der Linearität* seien.

LÜTHY<sup>3)</sup> konnte tatsächlich zeigen:

1. Die schwierigen Eindeutigkeitsversuche (Abhängigkeit des  $V(\lambda, \lambda_2)$  vom monochromatischen Vergleichslicht  $\lambda_2$ ) geben bei Farbnormalen keine grösseren Abweichungen als die einfacheren Linearitäts-Kontrollen 2.2.3 (Grössenordnungen: 3% im mittleren Teil und 5% an den Enden des Spektrums);

2. Das  $V(\lambda, \lambda_2)$  eines Deuteranomalien mit besonders linear arbeitendem Auge erwies sich als besonders unempfindlich gegen Änderungen des Vergleichslichtes  $\lambda_2$ .

Sollte diese theoretisch und praktisch nahegelegte Vermutung allgemein zu Recht bestehen, was wir glauben möchten, so kann man sich bei der orientierenden Prüfung von Beobachtern unter Weglassung der schwierigeren und in den Ergebnissen untergeordneten Eindeutigkeitsversuche auf reine Superpositionsversuche beschränken.

#### Literatur.

- 1) KÖNIG, Das Licht **7**, 261 (1937).
  - 2) BERTLING, Licht und Lampe **23**, 82, 130 (1934).
  - 3) LÜTHY, erscheint demnächst.
  - 4) JAGGI, Helv. Phys. Acta **12**, 77 (1939).
  - 5) KÖNIG, Helv. Phys. Acta, **14**, 559 (1941).
  - 6) GONSETH, Les mathématiques et la réalité. F. Alcan, Paris, 1936.
-