

Anschauliche Ableitung einiger Näherungsformeln aus der Theorie der Stromverdrängung

Autor(en): **König, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **15 (1942)**

Heft V

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111312>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Anschauliche Ableitung einiger Näherungsformeln aus der Theorie der Stromverdrängung

von H. König.

(Mitteilung aus dem Eidg. Amt für Mass und Gewicht.)

(12. V. 1942.)

Zusammenfassung. Elementare Ableitung der Näherungsformeln für Widerstand und Selbstinduktion bei schwachem Skin-Effekt im Falle a) des geraden kreiszylindrischen Drahtes, b) der einlagigen und c) der mehrlagigen eng gewickelten langen Spule.

Zu den klassischen Problemen der Elektrodynamik, deren Behandlung sachlich und methodisch abgeschlossen erscheint, gehört dasjenige des Skin-Effektes, d. h. der Stromverdrängung von Wechselstrom in einfach geformten massiven Leitern. Im Falle eines geraden, unendlich langen, kreiszylindrischen Drahtes z. B. können wir seit MAXWELL¹⁾ mit Hilfe von Bessel'schen Funktionen genau angeben, wie der bei niedriger Frequenz ($\omega = 2\pi\nu$) gleichmässig über den Leiterquerschnitt verteilte Strom mit zunehmen der Frequenz mehr und mehr der Oberfläche entlang fliesst, wo das magnetische Feld am stärksten ist. Der wirksame Querschnitt nimmt ab, der „wirksame“ Widerstand nimmt zu, und die „wirksame“ Selbstinduktion nimmt ab.

In der Messtechnik steht man oft vor der Frage, ob in einem gegebenen Fall Skin-Effekt schon zu befürchten sei oder nicht. Man entscheidet dies z. B. im Fall des freien Drahtes an Hand der Näherungsformel für den wirksamen Widerstand bei schwachem Skin-Effekt:

$$R_{\omega} = R_0 \left(1 + \frac{1}{1.2} (\gamma \omega \mu \pi)^2 a^4 \dots \right)$$

γ = Leitfähigkeit.

μ = Permeabilität des Drahtmaterials.

a = Radius des Drahtquerschnittes.

Wir machen im folgenden auf die Möglichkeit einer elementaren Ableitung dieser und verwandter, zum Teil ebenfalls bereits bekannter Formeln aufmerksam, die so einfach ist, dass man die gewünschten Formeln fast gedankenlos konstruieren kann und die ausserdem die Phänomene, so wie sie sich zeitlich aufgelöst gedacht abspielen, unmittelbar widerspiegelt. Nicht nur dem Praktiker,

der die Formel, die er braucht, gerne *durchschauen* möchte, sondern auch dem Unterrichtenden ist vielleicht damit gedient. Wir hätten diese Frage hier nicht angeschnitten, wenn wir nicht in der Literatur eine Darstellung *in dieser Form* vermisst hätten. Auf die Behandlung dieser Aufgabe durch andere Autoren wird am Schluss kurz eingegangen.

Es sollen besprochen werden:

a) *Der gerade, unendlich lange Draht*, dessen Querschnitt ein Kreis vom Radius a ist; Fig. 1 a.

b) *Die unendlich ausgedehnte Platte* von der Dicke a ; Fig. 1 b. Denkt man sich die Platte durch dünne Isolierschichten in der y -Richtung in den Abständen b unterteilt und die Platte um die y -Richtung als Achse zu einem Zylinder von relativ grossem Durchmesser zusammengebogen, so erhalten wir eine einlagige, aus Vierkantdraht lückenlos gewickelte Spule. Das Spuleninnere denken wir uns in Fig. 1 b rechts von der Wicklung; das magnetische Feld H wählen wir demgemäss für $x < 0$ gleich Null. Feldlinien und Stromlinien drängen sich gegen die Innenseite der Spule.

c) *Die geschichtete Platte*, Fig. 1 c. Entsprechend b) ist der Übergang zur mehrlagigen enggewickelten Spule möglich. Hier befinden sich die innern (rechts gelegenen) Windungen auch im Feld der äusseren Windungslagen, weshalb die Widerstandserhöhung und Selbstinduktions-Erniedrigung mit der Zahl der Lagen stark zunehmen.

In allen Beispielen liegen Strom und elektrisches Feld in der z -Richtung, vom Beschauer weggerichtet; das magnetische Feld liegt stets normal zur x - und zur z -Richtung. Der Index x weist auf die Abhängigkeit von x hin.

Gedankengang der Rechnung: Im homogenen Leiter der Fig. 1 a, b oder c herrsche in nullter Näherung die vom Ort (x) unabhängige Feldstärke

$$E_x^{(0)} = E^{(0)}.$$

Sie treibt im Material mit der Leitfähigkeit γ die Stromdichte nullter Näherung

$$i_x^{(0)} = i^{(0)} = \gamma E^{(0)}.$$

Die drei Beispiele sind geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass sich das magnetische Feld nullter Näherung $H^{(0)}$ aus dem Satz: Linienintegral des Feldes = $4\pi \cdot$ umschlossener Strom

$$\int H_x^{(0)} ds = 4\pi I_x^{(0)}$$

leicht berechnen lässt. Für den Teilstrom nullter Näherung

$$I_x^{(0)} = \int i^{(0)} df$$

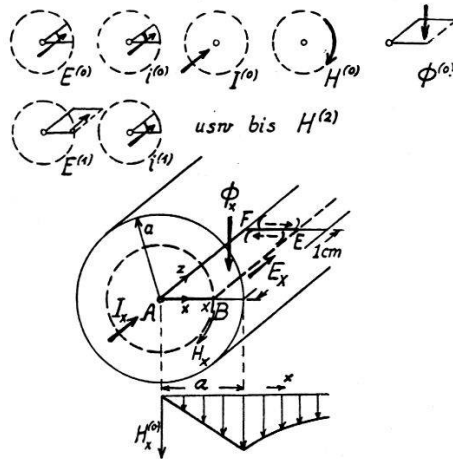
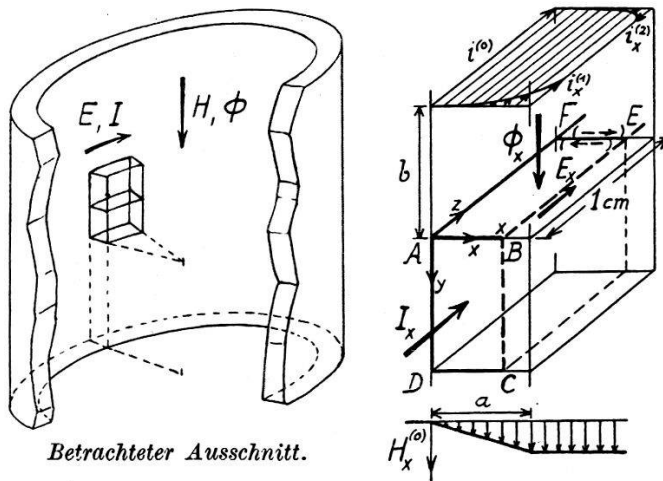


Fig. 1a.

Kreiszyklindrischer Draht vom Radius a . Darüber ist die Reihenfolge der zu berechnenden Näherungsgrößen bildlich dargestellt.



Betrachteter Ausschnitt.

Fig. 1b.

Stromverdrängung in einer Platte (einlagige Spule).

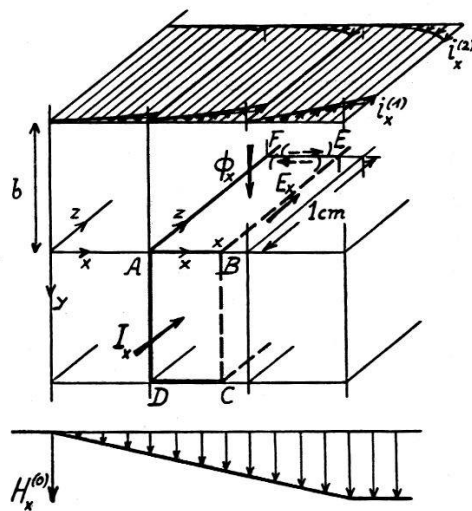


Fig. 1c.

Ausschnitt aus der Wicklung einer 3-lagigen Spule.

ist im Fall der Fig. 1a die Kreisfläche mit dem Radius x , im Fall der Fig. 1b und 1c die Rechteckfläche $ABCD$ Integralfläche. Nun weisen alle Amplitudengrößen G , weil wir ein Wechselstromproblem betrachten, eine zeitliche Abhängigkeit von der Form

$$G = G_{\max} \cdot e^{j\omega t}$$

auf; somit

$$\frac{\partial G}{\partial t} = j\omega G.$$

Für eine passend gewählte Fläche, in allen Figuren die Fläche $ABEF$ mit den Seitenlängen l cm und x lässt sich im Innern des Leiters (Permeabilität μ) der Kraftfluss nullter Näherung

$$\Phi_x^{(0)} = \mu \int H_x^{(0)} df = \mu \int_0^x H_x^{(0)} dx$$

und die zugehörige induzierte erste Wirbelspannung

$$\int_{ABEF} E_x^{(1)} ds = \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial t} = j\omega \Phi^{(0)}$$

berechnen. Vom Linienintegral fallen die Stücke normal zur z -Achse und damit die Ströme quer zum Draht weg, da sich die Felder benachbarter Integrationskurven, wie die gestrichelten Pfeile andeuten, aufheben. Somit

$$\int E_x^{(1)} dx = E_x^{(1)} - E_0^{(1)}.$$

$E_0^{(1)}$, d. h. die induzierte Spannung in der Drahtachse (Fig. 1a) bzw. an der Aussenseite der Windungslage (Fig. 1b und c) dürfen wir als Integrationskonstante $= 0$ setzen. Wir wollen ja nur *einen* möglichen Zustand der Felder im Drahtinnern beschreiben, nämlich denjenigen, für den $E_0^{(0)}$ und $i_0^{(0)}$ die Randwerte des Gesamtfeldes

$$E_x = E_x^{(0)} + E_x^{(1)} + E_x^{(2)} + \dots$$

bzw. der Gesamtstromdichte

$$i_x = i_x^{(0)} + i_x^{(1)} + i_x^{(2)} + \dots$$

für $x = 0$ sind; es verschwinden also definitionsgemäss alle höheren Näherungen für $x = 0$: $i_0^{(1)} = 0$, $i_0^{(2)} = 0$, ..., $E_0^{(1)} = 0$, $E_0^{(2)} = 0$, ..., $H_0^{(1)} = 0$, ... Auf diesen methodisch sehr wichtigen Punkt kommen wir am Schluss bei der Besprechung der Literatur nochmals zurück.

Das elektrische Wirbelfeld erster Näherung an der Stelle x ist also einfach gleich der Änderung des „links davon“ verlaufenden Flusses pro 1 cm Drahtlänge:

$$E_x^{(1)} = j \omega \Phi_x^{(0)}.$$

Dieses Feld eilt dem Primärfeld $E_x^{(0)}$ um $\pi/2$ in der Phase voraus, trägt also nur *quadratisch* zum Betrag des Gesamtfeldes bei. Aus diesem Grunde müssen wir noch das Wirbelfeld zweiter Näherung $E_x^{(2)}$ berücksichtigen, welches eine Folge von $E_x^{(1)}$ ist, wie dieses eine Folge von $E^{(0)}$ ist. Dieses Feld wird, weil um π gegen $E^{(0)}$ verdreht, mit vollem Gewicht, also auch in 2. Ordnung zum Betrag des Gesamtfeldes beisteuern. Wir berechnen also der Reihe nach:

$$\begin{aligned} i_x^{(1)} &= \gamma E_x^{(1)} \\ I_x^{(1)} &= \int i_x^{(1)} df \\ \int H_x^{(1)} ds &= 4 \pi I_x^{(1)} \\ \Phi^{(1)} &= \mu \int H_x^{(1)} dx \\ E_x^{(2)} &= j \omega \Phi_x^{(1)} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und so fort bis zum Feld $H_x^{(2)}$.

Die bekannteste und uns auch hier am vorteilhaftesten erscheinende Art der Einführung des wirksamen Widerstandes R_ω und der wirksamen Selbstinduktion L_ω ist die energetische Definition:

R_ω mal Quadrat des Gesamtstromes soll die Wärmeentwicklung (unter Vernachlässigung der Strahlungsverluste) ergeben:

$$\int \frac{|i_x|^2}{\gamma} dv = R_\omega |I_{x=a}|^2,$$

(Leiterinhalt)

und: L_ω mal $\frac{1}{2}$ · Quadrat des Gesamtstromes soll die gespeicherte magnetische Energie ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8 \pi} \int_{(\infty)} \mu |H_x|^2 dv &= \frac{\mu}{8 \pi} \int_{(\text{Leiter})} |H_x|^2 dv \\ + \frac{1}{8 \pi} \int_{(\text{Aussenraum})} |H_x|^2 dv &= \frac{1}{2} L_\omega |I_a|^2 = \frac{1}{2} (L_\omega^i + L_\omega^a) |I_a|^2. \end{aligned}$$

Die Trennung in innere und äussere Selbstinduktion ist hier besonders gerechtfertigt, da es sich um Stromverteilungen handelt, bei denen das Feld H_x im Aussenraum von der Verteilung des Stromes (als Funktion von ω) nicht abhängt, sondern nur vom Gesamt-

strom $|I_a|$. Von Interesse ist daher hier nur die innere Selbstinduktion

$$L_{\omega}^i = \frac{\mu}{4\pi |I_a|^2} \int_{(\text{Leiter})} |H_x|^2 dv.$$

Man erkennt, dass wir die Quadrate der Beträge der Gesamtgrößen

$$\begin{aligned} i_x &= i_x^{(0)} + i_x^{(1)} + i_x^{(2)} \\ I_x &= I_x^{(0)} + I_x^{(1)} + I_x^{(2)} \\ H_x &= H_x^{(0)} + H_x^{(1)} + H_x^{(2)} \end{aligned} \quad \text{für } x = a$$

zu bilden haben werden.

Die Ableitungen sind im folgenden zunächst so ausführlich wiedergegeben, dass sich jede weitere Erläuterung erübrigt. Sie erscheinen nur deshalb etwas lang, weil sie vollständig sind.

a) *Gerader Draht; Fig. 1a:*

$$i_x^{(0)} = i^{(0)} = \gamma E^{(0)}$$

$$I_x^{(0)} = \int i^{(0)} df = i^{(0)} \pi x^2$$

$$\int H_x^{(0)} ds = H^{(0)} \cdot 2\pi x = 4\pi I_x^{(0)}$$

$$H_x^{(0)} = \frac{2 I_x^{(0)}}{x} = i^{(0)} \pi \cdot 2x$$

$$\Phi_x^{(0)} = \mu \int H_x^{(0)} df = i^{(0)} \mu \pi \cdot 2 \int_0^x x dx = i^{(0)} \mu \pi \cdot x^2$$

$$E_x^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial t} = j i^{(0)} \omega \mu \pi \cdot x^2$$

$$i_x^{(1)} = \gamma E_x^{(1)} = j i^{(0)} \gamma \omega \mu \pi \cdot x^2 = j i^{(0)} \beta \cdot x^2.$$

Abkürzung: $\beta = \gamma \omega \mu \pi$

$$I_x^{(1)} = \int i_x^{(1)} df = \int_0^x i_x^{(1)} \cdot 2\pi x dx = j i^{(0)} \pi \beta \cdot \frac{x^4}{2}$$

$$H_x^{(1)} = \frac{2 I_x^{(1)}}{x} = j i^{(0)} \pi \beta \cdot x^3$$

$$\Phi_x^{(1)} = \mu \int H_x^{(1)} df = j i^{(0)} \mu \pi \beta \frac{x^4}{4}$$

$$E_x^{(2)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} = -i^{(0)} \omega \mu \pi \beta \cdot \frac{x^4}{4}$$

$$i_x^{(2)} = \gamma E_x^{(2)} = -i^{(0)} \gamma \omega \mu \pi \beta \cdot \frac{x^4}{4} = -i^{(0)} \beta^2 \cdot \frac{x^4}{4}$$

$$I_x^{(2)} = \int i_x^{(2)} df = -i^{(0)} \beta^2 \frac{1}{4} \int_0^x x^4 \cdot 2 \pi x dx = -i^{(0)} \pi \beta^2 \frac{x^6}{12}$$

$$H_x^{(2)} = \frac{2 I_x^{(2)}}{x} = -i^{(0)} \pi \beta^2 \frac{x^5}{6}$$

Zusammengefasst bis zur 2. Näherung ist:

$$i_x = i^{(0)} \left(1 + j \beta x^2 - \beta^2 \frac{x^4}{4} \right)$$

$$I_a = i^{(0)} \cdot \pi a^2 \left(1 + j \beta \frac{a^2}{2} - \beta^2 \frac{a^4}{12} \right)$$

$$H_x = i^{(0)} \cdot 2 \pi x \left(1 + j \beta \frac{x^2}{2} - \beta^2 \frac{x^4}{12} \right).$$

Nach der Rechenregel

$$| (1 + \xi) + j \eta |^2 \approx 1 + 2 \xi + \eta^2$$

ist

$$| i_x |^2 = | i^{(0)} |^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 x^4 \right)$$

$$| I_a |^2 = | i^{(0)} |^2 \cdot \pi^2 a^4 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 a^4 \right)$$

$$| H_x |^2 = | i^{(0)} |^2 \cdot 4 \pi^2 x^4 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 x^4 \right).$$

Für die Integrale in R_ω und L_ω finden wir unter Einführung der Länge l des Drahtes und mit $dv = l \cdot 2 \pi x dx$:

$$\int | i_x |^2 dv = | i^{(0)} |^2 l \cdot \pi a^2 \left(1 + \frac{1}{6} \beta^2 a^4 \right)$$

$$\int | H_x |^2 dv = | i^{(0)} |^2 l \cdot 2 \pi^3 a^4 \left(1 + \frac{1}{24} \beta^2 a^4 \right).$$

Führen wir in

$$R_\omega = \frac{1}{\gamma | I_a |^2} \int | i_x |^2 dv = \frac{l}{\gamma \pi a^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{6} \beta^2 a^4}{1 + \frac{1}{2} \beta^2 a^4}$$

den Gleichstromwiderstand

$$R_0 = \frac{l}{\gamma \pi a^2}$$

ein, so finden wir als erste der gesuchten Formeln:

$$\underline{R_\omega = R_0 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 a^4 + \dots \right)} \quad (1a)$$

$$\beta = \gamma \omega \mu \pi$$

In

$$L_\omega^i = \frac{\mu}{4 \pi | I_a |^2} \int | H_x |^2 dv = \frac{\mu l}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{24} \beta^2 a^4}{1 + \frac{1}{2} \beta^2 a^4}$$

deuten wir

$$L_0^i = \frac{\mu l}{2}$$

als innere Selbstinduktion des Drahtes bei niedriger Frequenz; somit wird

$$\underline{L_{\omega}^i = L_0^i (1 - \frac{1}{24} \beta^2 a^4 + \dots)}. \quad (2a)$$

Damit wäre der Aufbau der 1. Näherung des Skineffektes im Draht durch „Reihenentwicklung der Phänomene bis zur 2. Ordnung“ durchsichtig gemacht. Beachtenswert ist das Entstehen des Faktors

$$\beta = \gamma \omega \mu \pi$$

als Folge von vier Operationen, die den vier Teilerscheinungen:

Erzeugung des Magnetfeldes (Multiplikation mit π)

Erzeugung des induzierenden Flusses (Multiplikation mit μ)

Zeitliche Änderung dieses Flusses (Multiplikation mit $j\omega$)

Erzeugung des Sekundärstromes (Multiplikation mit γ)

entsprechen.

b) *Einlagige Platte*; Fig. 1 b. Wir kürzen hier etwas ab. Die Reihe der Näherungsgrößen lautet:

$$i_x^{(0)} = i^{(0)} = \gamma E^{(0)}$$

$$I_x^{(0)} = i^{(0)} b x \quad (b \text{ Breite des Drahtes})$$

$$\int H_x^{(0)} ds = H_x^{(0)} b = 4 \pi I_x^{(0)}$$

denn die Beiträge zum Integral längs AB und CD sind = 0, und $H_x^{(0)} = 0$ für $x \leq 0$ nach Voraussetzung.

$$H_x^{(0)} = i^{(0)} \pi \cdot 4 x = i^{(0)} \pi \cdot \frac{2^2}{1!} x$$

$$\Phi_x^{(0)} = i^{(0)} \mu \pi \cdot \frac{2^2}{2!} x^2$$

$$E_x^{(1)} = j i^{(0)} \omega \mu \pi \cdot \frac{2^2}{2!} x^2$$

$$i_x^{(1)} = j i^{(0)} \gamma \omega \mu \pi \cdot \frac{2^2}{2!} x^2 = j i^{(0)} \beta \cdot \frac{2^2}{2!} x^2$$

$$I_x^{(1)} = j i^{(0)} \beta b \cdot \frac{2^2}{3!} x^3$$

$$H_x^{(1)} = j i^{(0)} \pi \beta \cdot \frac{2^4}{3!} x^3$$

$$\Phi_x^{(1)} = j i^{(0)} \mu \pi \beta \cdot \frac{2^4}{4!} x^4$$

$$E_x^{(2)} = - i^{(0)} \omega \mu \pi \beta \cdot \frac{2^4}{4!} x^4$$

$$i_x^{(2)} = - i^{(0)} \gamma \omega \mu \pi \beta \cdot \frac{2^4}{4!} x^4 = - i^{(0)} \beta^2 \frac{2^4}{4!} x^4$$

$$I_x^{(2)} = - i^{(0)} \beta^2 \frac{2^4}{5!} x^5$$

$$H_x^{(2)} = - i^{(0)} \pi \beta^2 \cdot \frac{2^6}{5!} x^5.$$

Ferner

$$\begin{aligned}
 i_x &= i^{(0)} \left(1 + j \frac{2^2}{2!} \beta x^2 - \frac{2^4}{4!} \beta^2 x^4 \right) \\
 I_a &= i^{(0)} \cdot b a \left(1 + j \frac{2^2}{3!} \beta a^2 - \frac{2^4}{5!} \beta^2 a^4 \right) \\
 H_x &= i^{(0)} \cdot 4 \pi x \left(1 + j \frac{2^2}{3!} \beta x^2 - \frac{2^4}{5!} \beta^2 x^4 \right).
 \end{aligned}$$

Man erkennt hier, besser noch als im Beispiel a), das Bildungsgesetz der Zahlenfaktoren. Die Fakultäten in den Nennern lassen vermuten, dass die exakte Theorie auf Hyperbelfunktionen führen würde. Weiter ist

$$\begin{aligned}
 |i_x|^2 &= |i^{(0)}|^2 \left(1 + \frac{3}{8} \beta^2 x^4 \right) \\
 |I_a|^2 &= |i^{(0)}|^2 a^2 b^2 \left(1 + \frac{8}{45} \beta^2 a^4 \right) \\
 |H_x|^2 &= |i^{(0)}|^2 (4 \pi x)^2 \left(1 + \frac{8}{45} \beta^2 x^4 \right) \\
 R_\omega &= \frac{1}{\gamma |I_a|^2} \int |i_x|^2 dv = \frac{l}{ab\gamma} \cdot \frac{1 + \frac{8}{15} \beta^2 a^4}{1 + \frac{8}{45} \beta^2 a^4}
 \end{aligned}$$

oder

$$\underline{R_\omega = R_0 \left(1 + \frac{16}{45} \beta^2 a^4 + \dots \right)} \tag{1b}$$

a = Dicke des Drahtes bzw. der Platte.
 $\beta = \gamma \omega \mu \pi$.

Ferner

$$L_\omega^i = \frac{\mu}{4 \pi |I_a|^2} \int |H_x|^2 dv = \frac{4 \pi}{3} \frac{\mu l a}{b} \cdot \frac{1 + \frac{8}{105} \beta^2 a^4}{1 + \frac{8}{45} \beta^2 a^4}$$

oder

$$\underline{L_\omega = L_0 \left(1 - \frac{32}{315} \beta^2 a^4 + \dots \right)} \tag{2b}$$

worin

$$L_0^i = \frac{4 \pi}{3} \frac{\mu l a}{b}$$

die innere Selbstinduktion des l cm langen, zu einer mässig gebogenen Platte, d. h. zu einer Spule lückenlos einlagig zusammengelegten Drahtes der Dicke a und, in der Anlagerungsrichtung gemessen, der Breite b .

c) *Mehrlagige Platte*, Fig. 1 c. Hier würde es mehr zu schreiben geben, weil von $H_x^{(0)}$ an alle Ausdrücke zweigliedrig werden wegen des Zusatzfeldes der äusseren Lagen. Wir betrachten, von aussen links an gezählt, die n te Lage:

$$\begin{aligned}
 E_x^{(0)} &= i^{(0)} = \gamma E^{(0)} \\
 I_x^{(0)} &= i^{(0)} \cdot b x \\
 H_x^{(0)} &= i^{(0)} \cdot 4 \pi x + i^{(0)} \cdot 4 \pi (n - 1) a. \\
 \dots
 \end{aligned}$$

Wir geben unter Weglassung der weiteren Grössen der Reihe gleich die Summen:

$$\begin{aligned} i_{x,n} &= i^{(0)} [1 + j\beta (2x^2 + 4(n-1)ax) - \beta^2 (\frac{2}{3}x^4 + \frac{8}{3}(n-1)ax^3)] \\ I_{a,n} &= i^{(0)} \cdot ba [1 + j\beta a^2 (\frac{2}{3} + 2(n-1)) - \beta^2 a^4 (\frac{2}{15} + \frac{2}{3}(n-1))] \\ H_{x,n} &= i^{(0)} \cdot 4\pi [x + (n-1)a + j\beta (\frac{2}{3}x^3 + 2(n-1)ax^2) \\ &\quad - \beta^2 (\frac{2}{15}x^5 + \frac{2}{3}(n-1)ax^4)], \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} |i_{x,n}|^2 &= |i^{(0)}|^2 [1 + \beta^2 (\frac{8}{3}x^4 + \frac{32}{3}(n-1)ax^3 + 16(n-1)^2 a^2 x^2)] \\ |I_{a,n}|^2 &= |i^{(0)}|^2 \cdot b^2 a^2 [1 + \beta^2 a^4 (\frac{8}{45} + \frac{4}{3}(n-1) + 4(n-1)^2)] \\ |H_{x,n}|^2 &= |i^{(0)}|^2 \cdot 16\pi^2 [(x + (n-1)a)^2 + \beta^2 (\frac{8}{45}x^6 + \frac{16}{15}(n-1)ax^5 \\ &\quad + \frac{8}{3}(n-1)^2 a^2 x^4)]. \end{aligned}$$

Für den Widerstand der n ten Lage mit der Drahtlänge l/m ($m =$ = Zahl der Lagen) wird:

$$\begin{aligned} r_{\omega,n} &= \frac{1}{\gamma |I_{a,n}|^2} \int_{(\text{Lagen})} |i_{x,n}|^2 dv = \frac{l/m}{ab\gamma} (1 + \beta^2 a^4 (\frac{16}{45} + \frac{4}{3}(n-1) + \frac{4}{3}(n-1)^2)) \\ &= r_0 (1 + \frac{1}{45} \beta^2 a^4 (1 + 60(n - \frac{1}{2})^2)) \end{aligned}$$

Der gesamte wirksame Widerstand ist

$$R_{\omega} = \sum_{n=1}^m r_{\omega,n} = R_0 \left(1 + \frac{1}{45} \beta^2 a^4 \left(1 + 60 \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (n - \frac{1}{2})^2 \right) \right)$$

worin

$$R_0 = m r_0 = \frac{l}{ab\gamma}.$$

Für $m = 1$ geht diese Formel in (1b) über. Für grosses m ist die

Σ durch $\int_0^m n^2 dn = \frac{m^3}{3}$ ersetzbar. Somit

$$\underline{R_{\omega} = R_0 (1 + \frac{1}{45} \beta^2 a^4 (1 + 20 m^2)) \text{ für } m \gg 1.} \quad (1c)$$

Für die innere Selbstinduktion der n ten Lage folgt nach längerer elementarer Umformung

$$\begin{aligned} l_{\omega,n}^i &= \frac{\mu}{4\pi |I_{a,n}|^2} \int_{(\text{Lagen})} |H_{x,n}|^2 dv = \\ &= \frac{l/m \cdot 4\pi \mu a n^3}{3b} \left[1 + \beta^2 a^4 \left(\frac{8}{5n^3} (\frac{5}{25^2} + (n - \frac{5}{6})^2) - 4(\frac{1}{60} + (n - \frac{5}{6})^2) \right) \right]. \end{aligned}$$

Die gesamte wirksame innere Induktivität

$$L_{\omega}^i = \sum_{n=1}^m l_{\omega, n}^i$$

führt zu einem recht unübersichtlichen Ausdruck, so dass wir uns auf den Grenzfall einer Spule mit sehr vielen Windungslagen beschränken wollen:

$$L_{\omega}^i = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{l}{m} \cdot \frac{\mu a}{b} \left(\int_0^m n^3 dn - 4\beta^2 a^4 \int_0^m n^5 dn \right)$$

woraus

$$\underline{L_{\omega}^i = L_0^i (1 - \frac{8}{3} \beta^2 a^4 m^2 + \dots)} \text{ für } m \gg 1 \quad (2c)$$

mit

$$L_0^i = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\mu l a}{b} \cdot m^3$$

$$\beta = \gamma \omega \mu \pi.$$

a = Dicke einer Lage.

m = Zahl der Lagen.

b = Breite des Drahtes.

l = ganze Länge des Drahtes.

Während der Vergleich von (2a) mit (1a) und von 2b) mit (1b) die Vermutung auftauchen lässt, dass die innere Selbstinduktion *allgemein* weniger stark abnehme als der Widerstand zunehme, zeigt (2c) im Vergleich mit (1c), das für die viellagige Spule der relative Einfluss des (schwachen) Skineffektes auf die Selbstinduktion stärker ist als derjenige auf den Widerstand: $\frac{8}{3} > \frac{20}{45}$. Anschaulich lässt sich das so verstehen: Die durch das Volumintegral über den Wicklungsinhalt definierte „innere“ Selbstinduktion ist gar nicht immer so eine „innere“ Angelegenheit des Drahtes, die von der äusseren Form der Drahtfigur unabhängig ist und wie man sie sich bei der Einführung des Begriffes vorgestellt hat. Denn alle gegen die Spulenachse zu liegenden Windungen liegen im Feld der äusseren Lagen, weshalb $l_{\omega, n}^i$ mit n^3 ansteigt und zu L_{ω}^i fast nur die innersten Lagen, wo der Effekt am stärksten ist, allein beitragen. In R_{ω} dagegen tragen alle Windungslagen mit gleichem Gewicht zum gesamten Skineffekt bei.

Auf die bekannten Schlussfolgerungen für die Praxis, nämlich die Vermeidung viellagiger Spulen und die Verwendung von Litzendraht, braucht hier nicht eingegangen zu werden.

Bemerkungen zur Literatur. In der hier nur unvollständig zitierten Originalliteratur⁹⁾¹⁰⁾¹²⁾ wie in den Lehrbüchern^{1... 8)} wird meist nach einer *vollständigen* Lösung der Maxwell'schen

Gleichungen getrachtet, was im Falle des geraden kreiszylindrischen Drahtes auf Bessel'sche Funktionen, im Falle der Platte auf Hyperbel-Funktionen führt. Dieses Vorgehen ist das natürliche, wenn man nicht gerade, wie er *hier* der Fall ist, *Näherungsformeln* in ihrer *Entstehung* verständlich machen will.

Den Gedanken der näherungsweise Behandlung hat WIEN¹¹⁾ in seiner Theorie der ein- und mehrlagigen Spule durchzuführen versucht; allerdings arbeitet er nur mit dem Wirbelstrom 1. Näherung, was im allgemeinen nicht zulässig erscheint. Das Problem wurde von SOMMERFELD exakt für lückenlose Wicklung^{12) 3)} nochmals aufgegriffen; dort finden sich auch unsere Formeln (1b), (2b) und (1c). Formel (2c) für die innere Selbstinduktion der mehrlagigen Spule haben wir in der uns zugänglichen Literatur nicht gefunden.

Unserer Darstellung am nächsten kommt MÖLLER mit seiner Theorie der Stromverdrängung in der einlagigen Spule⁷⁾. Aber MÖLLER wählt die Randbedingungen anders als wir. Für ihn tritt z. B. der Wirbelstrom $i_x^{(1)}$ ausserhalb des untersuchten Drahtes nicht in Erscheinung; also muss ein Rückstrom $i_0^{(1)}$ in der feldärmeren Zone des Drahtes so gewählt werden, dass $\int i_x^{(1)} df$ über den Leiterquerschnitt genommen = 0 ist. Forderungen solcher Art stellen wir nicht, sondern wir lassen $E_x^{(1)}, i_x^{(1)}, I_x^{(1)}, H_x^{(1)}, E_x^{(2)} \dots$ für $x = 0$ zu null werden. Dadurch schliesst sich die obige Darstellung den Reihenentwicklungen der vollständigen Theorie so eng an, dass jedes Korrekturglied $E_x^{(1)}, H_x^{(1)} \dots$ *unmittelbar* ein Glied dieser Reihenentwicklung und damit eine anschauliche Deutung desselben ist.

Literatur.

- 1) BREISIG, Theoretische Telegraphie, 1924, S. 510.
- 2) COHN, Das elektromagnetische Feld, 1900, S. 354 und 457.
- 3) FRANK und MISES, Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik II, 1927, Artikel Sommerfeld S. 499.
- 4) Handbuch der Physik, hrsg. von GEIGER und SCHEEL, Bd. XV, S. 339.
- 5) HORT, Differentialgleichungen des Ingenieurs, 1914, S. 513.
- 6) MESNY, Radio-Electricité Générale I, 1935, S. 274.
- 7) KORSHENEWSKY und RUNGE, Lehrbuch der drahtlosen Nachrichtentechnik I, 1940, Artikel Möller S. 34.
- 8) ORLICH, Kapazität und Induktivität, 1909, S. 134.
- 9) MAXWELL, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, 1883 (engl. Orig. 1873), § 689.
- 10) RAYLEIGH, Phil. Mag. **21**, 381, 1886.
- 11) WIEN, Ann. d. Physik **14**, 1, 1904.
- 12) SOMMERFELD, Ann. d. Physik **15**, 673, 1904.