

# Etude sur l'emploi du pont de Wheatstone l'enregistrement continu des variations de résistance électrique

Autor(en): **Brassey, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **16 (1943)**

Heft II

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111398>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Etude sur l'emploi du pont de Wheatstone pour l'enregistrement continu des variations de résistance électrique

par E. Brasey.

(17. VIII. 1942.)

---

*Résumé.* Lorsque le pont de Wheatstone est utilisé pour l'enregistrement continu des variations d'une résistance au moyen des élongations du galvanomètre de pont, n'importe quelle sensibilité peut être obtenue au moyen d'une infinité de combinaisons des valeurs des bras du pont. Les diagrammes qui résument cette étude fournissent le moyen de choisir, parmi ces combinaisons, celle qui correspond le mieux aux conditions imposées par le phénomène physique enregistré par la variation de résistance.

## 1. Introduction et signification du problème.

Le pont de Wheatstone est un des montages classiques de la métrologie électrique. Il en existe de nombreuses variantes grâce auxquelles on exécute, dans de bonnes conditions de sensibilité, non seulement la mesure des résistances de grandeur moyenne mais encore celle des très petites résistances, des coefficients de self-induction et des capacités. Une des applications les plus courantes est celle qui consiste à enregistrer, par voie électrique, les variations d'une grandeur quelconque telle que la pression, l'état hygrométrique ou la température.

La recherche des conditions les plus favorables à la mesure d'une résistance se précise facilement lorsqu'on envisage l'emploi du pont en méthode de zéro. Par contre, si le pont, maintenu invariable, doit indiquer les variations d'une résistance au moyen des élongations du galvanomètre de pont, le problème se présente algébriquement sous une forme indéterminée. Il est cependant possible, en assignant un rôle convenable à chacun des paramètres, de délimiter le champ des valeurs acceptables de ces paramètres, d'en déterminer les valeurs optima et, enfin, d'établir des relations permettant de calculer quel est le montage le plus favorable, même dans le cas où l'un ou l'autre des paramètres est imposé par les conditions physiques du phénomène à enregistrer. Ces relations sont quelque peu compliquées, mais leur emploi est grandement facilité par les diagrammes d'orientation reproduits à la fin de cette étude (fig. 5 à fig. 9).

Désignons, dans le pont de Wheatstone (fig. 1), par  $x$  la résistance variable, par  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $g$  et  $p$  les résistances des autres bras du pont et par  $E$  la force électromotrice de la source dont le pôle positif est relié aux bras  $x$  et  $d$ .

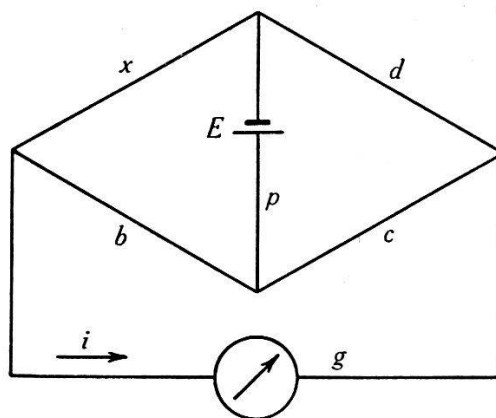


Fig. 1.

(Les bras  $x$  et  $d$  sont reliés au pôle positif de la source.)

Le courant  $i$  dans le galvanomètre est défini par la formule classique. :

$$i = E \cdot \frac{bd - cx}{M^3 + N^2x} \quad (4')$$

avec

$$M^3 = bcd + (c + d)bg + (b + c)dp + (b + c + d)gp$$

et

$$N^2 = bd + bc + cd + (c + d)g + (b + c)p + gp$$

On peut définir, comme sensibilité relative à l'enregistrement,  $\sigma$ , le rapport entre la variation relative du courant dans le galvanomètre,  $-di/E$ , et la variation relative de la résistance,  $dx/x$ , c'est-à-dire :

$$\sigma = -\frac{x}{E} \cdot \frac{di}{dx} = \frac{cM^3 + bdN^2}{(M^3 + N^2x)^2} \cdot x$$

La sensibilité relative passe par un maximum :

$$\sigma_M = \frac{1}{4} \left( \frac{bd}{M^3} + \frac{c}{N^2} \right), \text{ pour } x_0 = \frac{M^3}{N^2}, \quad (1')$$

et peut s'écrire :

$$\sigma = \sigma_M \frac{4}{2 + \frac{x_0}{x} + \frac{x}{x_0}}$$

Cette expression, représentée graphiquement dans la fig. 2, est indépendante des valeurs des bras du pont et reste valable même dans le cas limite pour lequel le circuit de mesure se réduit à une résistance constante en série avec la résistance à mesurer, le galvanomètre et la source.

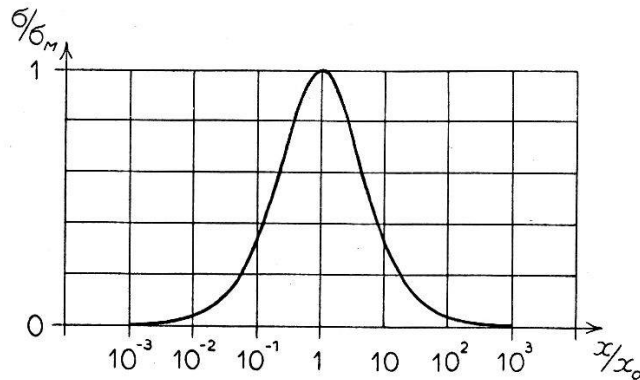


Fig. 2.

Courbe de sensibilité du pont de Wheatstone enregistreur.

La sensibilité relative dépend de cinq paramètres:  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $g$  et  $p$ ; la discussion de cette expression n'est possible qu'à la condition de réduire le nombre des paramètres à quatre, au plus, en faisant coïncider le maximum de sensibilité avec l'équilibre du pont:

$$x_0 = \frac{M^3}{N^2} = \frac{bd}{c} \quad (1'')$$

Cette relation, qui présente l'avantage d'assigner, au maximum de sensibilité, une place précise dans le domaine d'enregistrement, est imposée par les conditions d'emploi rationnel du pont. En effet, la recherche d'une sensibilité élevée du montage implique que l'instrument enregistreur a une sensibilité adéquate et donne, de part et d'autre de sa position de zéro, des élongations, égales en général, qui ne dépassent pas le cadre de son échelle lorsque la résistance variable atteint ses valeurs extrêmes. L'allure de la courbe de sensibilité (fig. 2) montre que le montage le plus favorable à l'enregistrement de la variation d'une résistance, d'un minimum  $x'$  à un maximum  $x''$ , est celui pour lequel on a  $x_0 = \sqrt{x'x''}$ . Or on vérifie justement (voir § 2) au moyen des formules (4') et (1'), que les élongations du galvanomètre sont égales et de sens contraires pour deux valeurs extrêmes  $x'$  et  $x''$  satisfaisant à la relation  $x_0 = \sqrt{x'x''}$ , lorsque les bras du pont vérifient la relation  $bd = cx_0$ . La condition (1'') posée plus haut se trouve ainsi justifiée.

Vérifions encore que cette condition, la seule qui puisse s'exprimer par une relation précise, n'écarte aucun des solutions optima



du problème. On pourrait se demander, en effet, s'il n'existe pas, pour le produit  $bd$  une valeur particulière, telle que  $m^2$ , pour laquelle la sensibilité maximum exprimée par

$$\sigma_M = \frac{1}{4} \left( \frac{m^2}{m^2(g+p+c) + bg(c+p) + dp(c+g) + cgp} + \frac{c}{m^2 + b(c+p) + d(c+g) + cg + cp + gp} \right),$$

serait plus grande que pour  $bd = cx_0$ . La valeur de  $4\sigma_M$  représente la somme de deux fractions qui varient, en fonction de  $m^2$ , en sens inverses l'une de l'autre, la première, de zéro asymptotiquement vers  $\frac{1}{g+p+c}$ , la seconde, de  $\frac{1}{g+p+gp/c}$  asymptotiquement vers zéro. La sensibilité maximum varie très lentement en fonction des valeurs finies données à  $bd$  et le léger excédent que peut présenter la sensibilité optimum sur la sensibilité qui correspond à  $bd = cx_0$  n'est pas comparable à l'avantage qui résulte de l'emploi rationnel de l'instrument enregistreur.

## 2. Equations fondamentales, paramètre d'orientation.

Le problème se trouve maintenant nettement délimité en même temps qu'il est résolu dans ses grandes lignes.

*Le pont de Wheatstone présente la sensibilité relative optimum pour l'enregistrement de la variation d'une résistance, entre un minimum  $x'$  et un maximum  $x''$ , lorsque la moyenne géométrique des valeurs extrêmes de la résistance variable,  $x_0 = \sqrt{x'x''}$ , et les bras fixes du pont,  $b, c, d, g$  et  $p$ , obéissent aux deux relations:*

$$x_0 = \frac{bcd + (c+d)bg + (b+c)dp + (b+c+d)gp}{bd + bc + cd + (c+d)g + (b+c)p + gp} \text{ et } bd = cx_0 \quad (1'')$$

Ces deux relations, combinées l'une avec l'autre, fournissent les équations de résolution du pont:

$$(c+p)(x_0 - g) + (cx_0 + gp)(x_0 - c) + c x_0 (c+g)(x_0 - p) = 0 \quad (1)$$

et

$$d = \frac{c x_0}{b} \quad (2)$$

L'intensité du courant dans le galvanomètre et la sensibilité relative sont alors, l'une et l'autre, inversement proportionnelles à

$$\frac{N^2}{c} = R = x_0 + b + d + g + p + \frac{dg + bp + gp}{c} \quad (3)$$

et s'écrivent:

$$i = \frac{E}{R} \cdot \frac{x_0 - x}{x_0 + x} \quad (4)$$

et

$$\sigma = \frac{1}{2R} \cdot \frac{4}{2 + \frac{x}{x_0} + \frac{x_0}{x}} \quad (5)$$

Les élongations maxima du galvanomètre, de part et d'autre de son zéro, sont exprimées par:

$$i_x = -i_{x''} = \frac{E}{R} \cdot \frac{x_0 - x'}{x_0 - x'} = \frac{E}{R} \cdot \frac{x'' - x_0}{x'' + x_0} \quad (4_1)$$

En cas de court-circuit ou de rupture de la résistance variable, les élongations extrêmes du galvanomètre atteignent les valeurs

$$i_0 = -i_\infty = \frac{E}{R} \quad (4_2)$$

La sensibilité, variable au cours de l'enregistrement, passe par son maximum

$$\sigma_M = \frac{1}{2R} \quad (5_1)$$

pour  $x = x_0 = \sqrt{x'x''}$ , c'est-à-dire au moment où le courant dans le galvanomètre est nul. La sensibilité sur les bords de l'enregistrement s'écarte d'autant plus de son maximum que la variation totale de  $x$  est plus grande (v. fig. 2):

$x''/x'$	2	3	10	30	110	3000	1000	3000
$\sigma/\sigma_M$	0,971	0,928	0,730	0,522	0,330	0,206	0,119	0,070

Les équations (1) et (3) font ressortir la simultanéité des permutations de  $g$  et  $p$ , d'une part, de  $b$  et  $d$ , d'autre part, propriété bien connue du pont de Wheatstone. Cette propriété, qui sera utilisée tout au long de notre étude, assigne aux paramètres  $g$  et  $p$  un rôle de même nature: c'est donc à  $c$  que sera dévolu le rôle particulier de *paramètre d'orientation*. Les résistances  $g$  et  $p$  seront

considérées comme des variables indépendantes et serviront de coordonnées pour l'établissement des diagrammes d'orientation (fig. 5 à fig. 9) dans lesquels les valeurs de  $b/x_0 = (b)$  et les valeurs de  $R/x_0 = (R)$  seront représentées sous forme de faisceaux de courbes paramétriques ou de valeur constante pour différentes valeurs de  $c/x_0 = (c)$ . Remarquons, dès maintenant, que la permutation simultanée de  $g$  avec  $p$  et  $b$  avec  $d$  n'affecte pas la valeur de  $R$ , caractéristique de la sensibilité.

### 3. Délimitation du champ des valeurs acceptables pour $g$ et $p$ .

Seules les racines positives et réelles sont utilisables.

Le signe des racines  $b$  dépend des signes des coefficients de l'équation (1); une seule racine est positive si l'on a

$$\left. \begin{array}{l} g < x_0 < p \text{ ou } p < x_0 < g; \\ \text{si, par contre, les trois conditions} \\ g \leq x_0, p \leq x_0 \text{ et } c \leq x_0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

sont vérifiées simultanément, l'équation a deux racines positives.

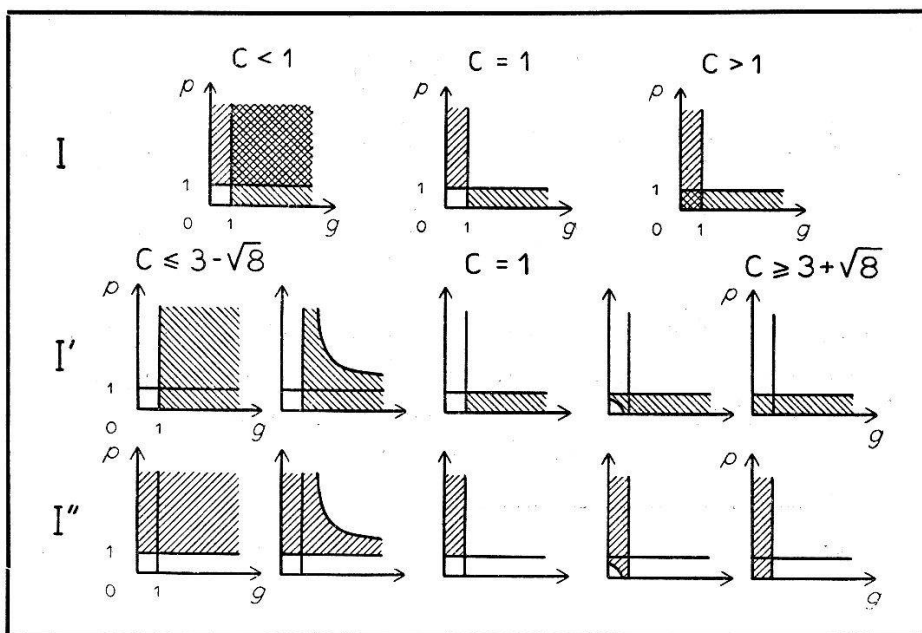


Fig. 3.

Représentation graphique des domaines de valeurs admissibles de  $g$  et de  $p$  pour  $x_0 = 1$ .

Ces conditions sont représentées graphiquement sous I dans la fig. 3; les hachures simples indiquent les domaines positifs de  $g$  et de  $p$  pour lesquels l'équation a une seule racine positive, les hachures croisées, ceux pour lesquels l'équation a deux racines positives.

Parmi les valeurs positives nous devons encore écarter les expressions imaginaires: la condition de réalité des racines est exprimée par l'inégalité:

$$\left. \begin{aligned} (c^2 - 6cx_0 + x_0^2)[(g-h_1)(p-h_1) - A_1^2] [(g-h_2)(p-h_2) - A_2^2] \geq 0 \\ \text{avec } h_1 = \frac{2cx_0}{c-x_0-2\sqrt{cx_0}} \quad A_1 = \frac{(c-x_0)\sqrt{cx_0}}{c-x_0-2\sqrt{cx_0}} \\ h_2 = \frac{2cx_0}{c-x_0+2\sqrt{cx_0}} \quad A_2 = \frac{(c-x_0)\sqrt{cx_0}}{c-x_0+2\sqrt{cx_0}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Le premier facteur de cette condition,  $(c^2 - 6cx_0 + x_0^2)$ , est négatif pour  $3 - \sqrt{8} < c/x_0 < 3 + \sqrt{8}$ ; il est positif en dehors de ces limites. Les deux autres facteurs représentent, si on les égale à zéro, deux hyperboles équilatères:

$$\begin{aligned} H_1(g, p) &= (g - h_1)(p - h_1) - A_1^2 = 0 \\ \text{et } H_2(g, p) &= (g - h_2)(p - h_2) - A_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (7_1)$$

Le produit de ces deux derniers facteurs est négatif si les coordonnées  $g$  et  $p$  représentent un point qui se trouve à la fois dans la région concave de l'une des hyperboles et dans la région convexe de l'autre, autrement dit, dans des régions de noms contraires des deux hyperboles; le produit est positif lorsque le point se trouve dans des régions de même nom. Les deux hyperboles ont leur axe réel sur la même droite  $g = p = \varepsilon$  et les positions de leurs sommets sur cette droite  $y$  délimitent les régions convexes et concaves de chacune d'elles.

En représentant graphiquement, en fonction de  $c$ , les coordonnées égales des sommets:

$$\begin{aligned} s_1' &= h_1 + A_1, & s_1'' &= h_1 - A_1 = -\sqrt{cx_0}, \\ s_2' &= h_2 + A_2 = \sqrt{cx_0}, & s_2'' &= h_2 - A_2, \end{aligned} \quad (7_2)$$

on obtient un diagramme (fig. 4) sur lequel apparaît clairement le signe du premier membre de la condition (7). L'échelle arbitraire adoptée pour ce diagramme a pour but de rendre bien lisible le détail des courbes au voisinage de  $c = 0$  malgré la grande étendue du domaine représenté. On sépare sans difficulté les régions de la droite  $g = p = \varepsilon$  qui correspondent, d'après la condition (7), à des valeurs imaginaires de  $b$  (hachures serrées) et qui doivent être écartées; en faisant intervenir la condition (6), représentée sous I de la fig. 3, on précise, dans le domaine encore très étendu correspondant aux valeurs réelles, celui qui correspond à des valeurs positives de  $b$  (hachures espacées). On constate que, en dehors de l'intervalle central,  $3 - \sqrt{8} < c/x_0 < 3 + \sqrt{8}$ , les limites de ce der-

nier domaine sont fixes et indépendantes de  $c$ . Dans l'intervalle central, une seule des limites est mobile en fonction de  $c$ ; elle est formée par la branche d'hyperbole,  $H_2''$ , de sommet  $g = p = s_2'' = h_2 - A_2$  et de centre  $g = p = h_2$ , qui fait évoluer le domaine variable de l'une des formes fixes à l'autre.

Pour  $3 - \sqrt{8} < c/x_0 < 1$ , la branche d'hyperbole,  $H_2''$ , tourne sa convexité vers l'origine et les coordonnées de son centre,  $\varepsilon = h_2$  sont plus grandes que  $\varepsilon = x_0$ ; il en résulte que les deux droites

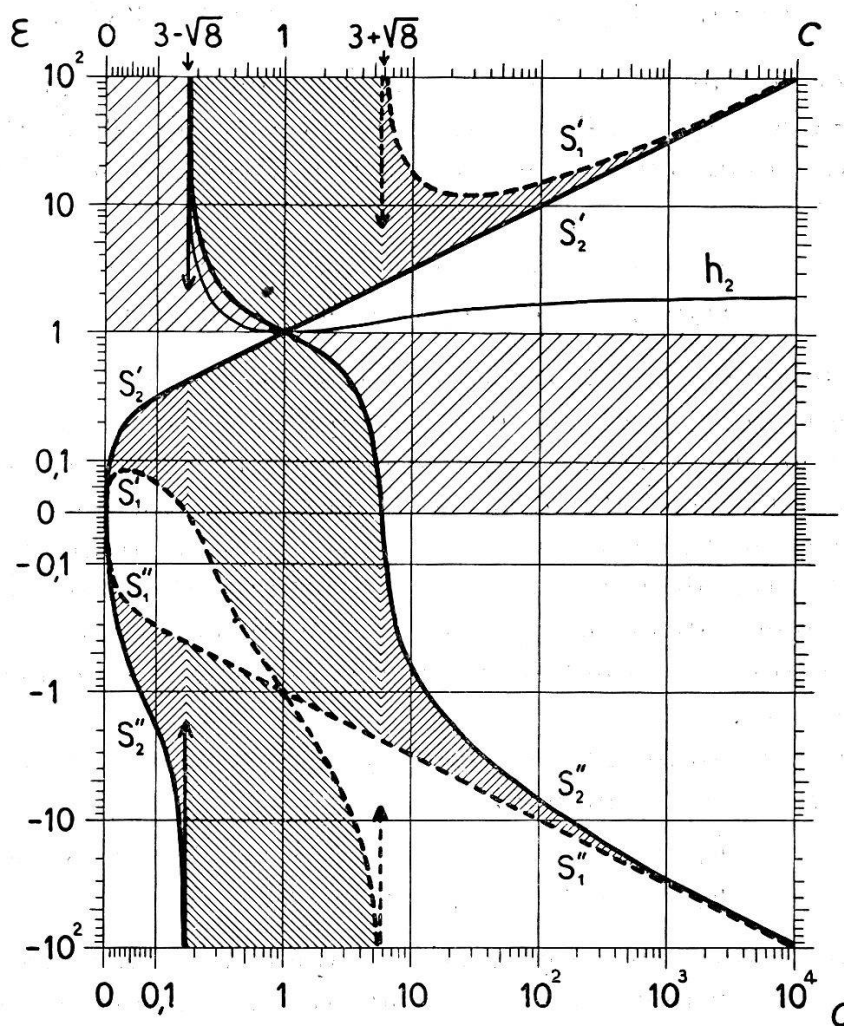


Fig. 4.

Diagramme auxiliaire pour la séparation des valeurs  $g = p = \varepsilon$  qui correspondent, pour  $x_0 = 1$  et en fonction de  $c$ ,

- 1) à  $b$  imaginaire: hachures serrées;
- 2) à  $b$  réel et négatif: régions non hachurées;
- 3) à  $b$  réel et positif: hachures espacées.

$g = x_0$  et  $p = x_0$  sont comprises dans le domaine des valeurs admissibles.

Pour  $c/x_0 = 1$ , le diagramme indique que la branche d'hyperbole  $H_2''$  se réduit à ses deux asymptotes.

Pour  $1 < c/x_0 < 3 + \sqrt{8}$ , la branche d'hyperbole  $H_2''$  dont le sommet est compris entre l'origine et le point  $g = p = x_0$ , tourne sa concavité vers l'origine et coupe les axes de coordonnées aux points équidistants de l'origine :

$$[g_H]_0 = [p_H]_0 = h_2 - \frac{A_2^2}{h^2} = \sqrt{cx_0} - \frac{c - x_0}{2} \quad (7_3)$$

En se reportant à la ligne I de la fig. 3, on vérifie que la limite mobile entre le domaine des valeurs réelles de  $b$  et celui des valeurs imaginaires se trouve bien dans la région où l'équation a ses deux racines positives. Avant de tracer cette limite sur les diagrammes I de la fig. 3, remarquons que chacun de ceux-ci peut être considéré comme la superposition de deux domaines partiels I' et I'' qui se déduisent l'un de l'autre par permutation de  $g$  avec  $p$ . L'interdépendance de ces domaines partiels concerne non seulement leurs limites mais encore toutes les valeurs de  $b$  et de  $R$  de chaque domaine, en raison de la simultanéité des permutations de  $g$  et  $p$  d'une part, de  $b$  et  $d$  d'autre part. En effet, si l'on connaît, dans l'un des domaines partiels, un groupe de valeurs cohérentes telles que :

$(g, p, b, d, R)' = (\gamma, \pi, \beta, \delta, \varrho)$  dans le domaine partiel I', la permutation simultanée de  $g$  avec  $p$  et de  $b$  avec  $d$  fait apparaître le groupe cohérent conjugué :

$(g, p, b, d, R)'' = (\pi, \gamma, \delta, \beta, \varrho)$  dans l'autre domaine partiel I''. Nous savons (§ 2) que la valeur de  $R$  n'est pas modifiée par la permutation.

Lorsque l'équation (1) a ses deux racines réelles et positives, celles-ci correspondent, de toute évidence, l'une au domaine I', l'autre au domaine I'' ; soient

$(g, p, b, d, R)_{1}' = (\gamma, \pi, \beta_1, \delta_1, \varrho_1)$  dans le domaine partiel I' et

$(g, p, b, d, R)_{2}'' = (\gamma, \pi, \beta_2, \delta_2, \varrho_2)$  dans le domaine partiel I'', les

deux groupes cohérents correspondant à chacune des deux racines  $b$  obtenues pour un couple donné de coordonnées,  $(g, p) = (\gamma, \pi)$ . A chacun de ces groupes correspond, dans l'autre domaine partiel, un groupe conjugué que l'on obtient par permutation :

$(g, p, b, d, R)_{1}'' = (\pi, \gamma, \delta_1, \beta_1, \varrho_1)$  dans le domaine partiel I'' et

$(g, p, b, d, R)_{2}' = (\pi, \gamma, \delta_2, \beta_2, \varrho_2)$  dans le domaine partiel I'.

On voit, qu'en définitive, les deux racines sont utilisées dans chacun des deux groupes, l'une sous forme directe, l'autre sous forme permutée. Il suffit, par conséquent, d'étudier un seul des domaines partiels, le second pouvant toujours en être déduit par permutation. Dans la suite, nous ne retiendrons que les valeurs qui se rapportent au domaine I' (v. fig. 3).



#### 4. Courbes paramétriques ou d'égale valeur de $b$ .

On calcule les faisceaux de courbes paramétriques de  $b$  au moyen de l'équation (1) ordonnée par rapport aux variables  $g$  et  $p$ :

$$\left[ g - \frac{x_0(b^2 - c^2)}{b^2 + (c - x_0)b + cx_0} \right] \left[ p - \frac{c(x_0^2 - b^2)}{b^2 + (c - x_0)b + cx_0} \right] = \left[ \frac{2bcx_0}{b^2 + (c - x_0)b + cx_0} \right]^2 \quad (1_1)$$

Ce sont des hyperboles équilatères dont nous préciserons l'évolution par la suite. Notons que la courbe correspondant à  $b = x_0$ , définie par l'équation

$$\left[ g - \frac{x_0^2 - c^2}{2c} \right] p = x_0^2$$

a, pour asymptote, la direction positive de l'axe des  $g$ ; elle traverse toujours le domaine des valeurs admissibles et peut servir de point de repère pour l'établissement des autres courbes paramétriques.

#### 5. Courbes d'égale valeur de $R$ ou d'égale sensibilité.

La sensibilité relative maximum, pour un montage donné du pont, est inversement proportionnelle à

$$R = x_0 + b + d + g + p + \frac{dg + bp + gp}{c}, \quad (3)$$

valeur facile à établir si, s'étant donné un couple  $(g, p)$  de coordonnées et une valeur de  $c$ , on a calculé les valeurs correspondantes de  $b$  et de  $d$  au moyen des formules (1) et (2). Si, par contre, on se propose de déterminer les valeurs des bras du pont qui correspondent à une sensibilité déterminée, il y a avantage à éliminer de cette relation les paramètres  $b$  et  $d$  pour l'amener à la forme  $R = R(g, p)$ ; on obtient:

$$R^2 - R \cdot \left[ \frac{c + g}{x_0 - p} \cdot \frac{cx_0 - p^2}{c} + \frac{c + p}{x_0 - g} \cdot \frac{cx_0 - g^2}{c} \right] + \frac{c + g}{x_0 - p} \cdot \frac{c + p}{x_0 - g} \left[ \frac{cx_0 - gp}{c} \right]^2 = 0 \quad (3_1)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} &g^3 p^3 + c(g^3 p^2 + g^2 p^3) - c(2R + 2x_0 - c)g^2 p^2 \\ &+ c(Rx_0 - Rc - 2cx_0)(g^2 p + gp^2) \\ &+ c^2(R^2 + x_0^2 - 2cx_0)gp \\ &+ 2c^2 x_0 R(g^2 + p^2) \\ &- c^2 x_0 (R + x_0)(R - c)(g + p) + c^2 x_0^2 (R - c)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3_2)$$

Les couples de valeurs  $(g, p)$  tirés de cette équation conduisent, au moyen des équations (1) et (2), aux valeurs de  $b$  et de  $d$  qui correspondent à la sensibilité imposée.

### 6. Etablissement des diagrammes d'orientation.

La résolution de l'équation (3<sub>2</sub>), pour un cas donné, est facilitée par l'emploi des diagrammes d'orientation (fig. 5 à fig. 9); pour l'établissement de ceux-ci, on évite la résolution fastidieuse de l'équation du troisième degré en introduisant les variables auxiliaires,  $S = g + p$  et  $P^2 = gp$ , par lesquelles on ramène l'équation à une forme du second degré en  $S$ :

$$\left. \begin{aligned} 2c^2x_0R \cdot S^2 - c[cx_0R^2 - (x_0 - c)(P^2 - cx_0)R - (P^2 - cx_0)^2] \cdot S \\ + [c^2(P^2 - x_0^2)R^2 - 2c(P^2 + cx_0)^2 \cdot R + (P^2 - cx_0)^2(P^2 + c^2)] = 0 \end{aligned} \right\} (3_3)$$

Cette équation définit  $S$  en fonction de  $P^2$  pour une valeur donnée de  $R$ ; les valeurs correspondantes de  $g$  et de  $p$  sont alors données par les racines de l'équation  $y^2 - Sy + P^2 = 0$ .

En raison de la complexité des coefficients, les équations (3<sub>1</sub>), (3<sub>2</sub>) et (3<sub>3</sub>) se prêtent mal à une discussion générale dont l'intérêt serait d'ailleurs minime, si l'on tient compte de la faible étendue des domaines des valeurs admissibles pour  $g$  et  $p$ . Il est plus utile d'analyser les cas pour lesquelles les équations se simplifient ou fournissent, dans le champ des valeurs acceptables, des points de repère qui faciliteront l'établissement des diagrammes d'orientation. Nous préciserons donc, pour le domaine I', les valeurs prises par  $b$  et par  $R$  lorsque les points qui représentent graphiquement  $g$  et  $p$  sont situés:

- 1° sur l'hyperbole limite  $H_2''$ ,
- 2° sur les axes de coordonnées,  $p = 0$ , et  $g = 0$
- 3° sur les droites parallèles aux axes,  $p = x_0$  et  $g = x_0$ ,
- 4° sur la droite à 45° par l'origine,  $g = p = \varepsilon$ .

Cette analyse ne présente pas de difficultés; nous n'en donnons que les résultats essentiels en les accompagnant de tables numériques sommaires qui permettront de déduire l'allure générale des courbes de valeur constante de  $b$  et de  $R$ .

#### 6a. Courbes de valeur constante de $b$ et de $R$ et hyperbole limite $H_2''$ .

La branche d'hyperbole  $H_2''$  constitue la limite commune aux deux domaines partiels I' et I'' dans les régions à deux racines; elle représente, par définition, aussi bien l'enveloppe des courbes



de valeur constante de  $b$  que celle des courbes de valeur constante de  $R$ ; elle marque, par son point de tangence avec chacune de ces courbes, la séparation entre les deux tronçons qui appartiennent à chacun des domaines partiels. Les coordonnées du point de tangence s'obtiennent en résolvant le système formé, d'une part par l'équation de l'hyperbole  $H_2$ , d'autre part par l'équation (1) ou par l'équation (3<sub>1</sub>) réduites pour le cas de la racine double; ces coordonnées sont, pour les courbes de valeur constante de  $b$ ,

$$g_{\text{Hb}} = x_0 \frac{b - c \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}}{b + x_0 \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}} \quad \text{et} \quad p_{\text{Hb}} = c \frac{x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}} - b}{c \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}} + b} \quad (7_4)$$

Les coordonnées  $g_{\text{HR}}$  et  $p_{\text{HR}}$  du point de tangence des courbes d'égale valeur de  $R$  avec l'hyperbole  $H_2$  sont les racines de l'équation  $y^2 + S \cdot y + P^2 = 0$ , dans laquelle on a :

$$P^2 = c x_0 \left[ 1 - \frac{R}{\sqrt{c} x_0} \cdot \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}} \right] \quad (7_5)$$

et  $S = 2 \sqrt{c} x_0 - \left[ \frac{R}{\sqrt{c} x_0} \cdot \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}} \right] \left[ \frac{c - x_0}{2} + \sqrt{c} x_0 \right]$

Pour

$$R = 8 c x_0 \left[ \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{c - x_0 + 2 \sqrt{c} x_0} \right]^2$$

on a  $g_{\text{HR}} = p_{\text{HR}}$ , c'est-à-dire que le point de tangence de la courbe  $R$  avec l'hyperbole limite  $H_2$  coïncide avec le sommet de celle-ci.

*6b. Cas limite:  $p = 0$  ou  $g = 0$ .*

Les équations (1) et (3<sub>1</sub>) se réduisent, pour ce cas limite, à :

$$(x_0 - g) b^2 - x_0 (c - x_0) b + x_0^2 (c + g) = 0 \quad (1_2)$$

$$(x_0 - g) R^2 - [2 c x_0 - (c - x_0) g - 2 g^2] R + c x_0 (c + g) = 0 \quad (3_4)$$

ou

$$g = x_0 \left[ \frac{b}{b - x_0} - \frac{c}{b + x_0} \right] \quad (1_3)$$

$$g = \frac{R - c}{4 R} [R + x_0 \pm \sqrt{R^2 - 6 x_0 R + x_0^2}] \quad (3_5)$$

Elles font apparaître, en tenant compte des conditions (6) et (7), les trois propriétés suivantes :

1° Seules les valeurs  $b > x_0$  se présentent le long de l'axe  $p = 0$ .

2° Lorsque  $0 \leq c/x_0 \leq 3 + \sqrt{8}$ ,  $R$  passe, le long de l'axe  $p = 0$ , par un minimum minimorum,  $R_{\min} = (3 + \sqrt{8})x_0$ , indépendant de  $c$ , pour une abscisse

$$g_m = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) x_0 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) c.$$

3°. Le long de l'axe  $p = 0$ , il existe, entre  $b$  et  $R$ , une relation remarquable indépendante de  $c$ ,

$$R_g = b \cdot \frac{b + x_0}{b - x_0}. \quad (8)$$

Les valeurs principales de ce cas limite ainsi que la formule (7<sub>3</sub>) sont rassemblées dans les tableaux qui suivent.

$$0 < c \leq x_0$$

Racine directe sur l'axe  $p = 0$

Racine permutée sur l'axe  $g = 0$

$g$	$R$	$b$
$x_0$	$\infty$	$\infty$
$g_m$	$(3 + \sqrt{8})x_0$	$(1 + \sqrt{2})x_0$
$\infty$	$\infty$	$x_0$

néant
-------

$$x_0 \leq c \leq (3 + \sqrt{8})x_0$$

Racine directe sur l'axe  $p = 0$

Racine permutée sur l'axe  $g = 0$

$g$	$R$	$b$
$[g_H]_0$	$\sqrt{c}x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}$	$x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}$
$x_0$	$x_0 \frac{c + x_0}{c - x_0}$	$c \frac{c + x_0}{c - x_0}$
$g_m$	$(3 + \sqrt{8})x_0$	$(1 + \sqrt{2})x_0$
$\infty$	$\infty$	$x_0$

$p$	$R$	$b$
$[p_H]_0$	$\sqrt{c}x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}$	$c \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}$
$x_0$	$\infty$	$0$

$$(3 + \sqrt{8}) x_0 \leq c < \infty$$

Racine directe sur l'axe  $p = 0$

$g$	$R$	$b$
0	$c$	$\frac{c-x_0-\sqrt{c^2-6cx_0+x_0^2}}{2}$
$x_0$	$x_0 \frac{c+x_0}{c-x_0}$	$c \frac{c+x_0}{c-x_0}$
$\infty$	$\infty$	$x_0$

Racine permutée sur l'axe  $g = 0$

$p$	$R$	$b$
0	$c$	$\frac{c-x_0-\sqrt{c^2-6cx_0+x_0^2}}{2}$
$x_0$	$\infty$	0

I. Valeurs limites de  $R/x_0 = (R)$  en fonction de  $c/x_0 = (c)$ , sur l'axe  $p = 0$ , et valeurs correspondantes de  $g/x_0 = (g)$  et de  $b/x_0 = (b)$ .

$(c)$	$(g)$		$(b)$		$(R)$	
	var	à $(g_m)$ à $\infty$	var.	à $(b_m)$ à 1	var.	à $(R_{min})$ à $\infty$
0	1	à 1,7071 à $\infty$	$\infty$	à 2,4142 à 1	$\infty$	à 5,8284 à $\infty$
0,1	1	à 1,6778 à $\infty$	$\infty$	à 2,4142 à 1	$\infty$	à 5,8284 à $\infty$
0,3	1	à 1,6192 à $\infty$	$\infty$	à 2,4142 à 1	$\infty$	à 5,8284 à $\infty$
0,5	1	à 1,5607 à $\infty$	$\infty$	à 2,4142 à 1	$\infty$	à 5,8284 à $\infty$
1	1	à 1,4142 à $\infty$	$\infty$	à 2,4142 à 1	$\infty$	à 5,8284 à $\infty$
2	0,9142	à 1,1213 à $\infty$	5,8284	à 2,4142 à 1	8,2426	à 5,8284 à $\infty$
3	0,7321	à 0,8284 à $\infty$	3,7321	à 2,4142 à 1	6,4641	à 5,8284 à $\infty$
4	0,5	à 0,5355 à $\infty$	3	à 2,4142 à 1	6	à 5,8284 à $\infty$
5	0,2361	à 0,2426 à $\infty$	2,6180	à 2,4142 à 1	5,8541	à 5,8284 à $\infty$
5,8284		0 à $\infty$		2,4142 à 1		5,8284 à $\infty$
6	0	à $\infty$	2	à 1	6	à $\infty$
8	0	à $\infty$	1,4384	à 1	8	à $\infty$
10	0	à $\infty$	1,2984	à 1	10	à $\infty$
20	0	à $\infty$	1,1185	à 1	20	à $\infty$
$\infty$	0	à $\infty$		1		$\infty$

II. Valeurs limites de  $R/x_0 = (R)$  en fonction de  $c/x_0 = (c)$ , sur l'axe  $g = 0$ , et valeurs correspondantes de  $p/x_0 = (p)$  et de  $b/x_0 = (b)$ .

$(c)$	$(p)$	$(b)$	$(R)$
1	1	0	$\infty$ à
2	1 à 0,9142	0 à 0,3431	$\infty$ à 8,2426
3	1 à 0,7321	0 à 0,8038	$\infty$ à 6,4641
4	1 à 0,5	0 à 1,3333	$\infty$ à 6
5	1 à 0,2361	0 à 1,9098	$\infty$ à 5,8641
5,8284	1 à 0	0 à 2,4142	$\infty$ à 5,8284
6	1 à 0	0 à 2	$\infty$ à 6
8	1 à 0	0 à 1,4384	$\infty$ à 8
10	1 à 0	0 à 1,2984	$\infty$ à 10
20	1 à 0	0 à 1,1185	$\infty$ à 20

6c. *Cas particulier:  $p = x_0$  ou  $g = x_0$ .*

Les équations (1) et (3<sub>1</sub>) se réduisent ici à des expressions simples.

Sur la droite  $p = x_0$ , pour l'intervalle  $0 < c \leq x_0$ .

$$b = x_0 \frac{(c - x_0)(c + g)}{(c + x_0)(x_0 - g)} \quad (1_4)$$

et

$$\text{et } R = \frac{x_0}{c} \cdot \frac{(c + x_0)(c - g)^2}{(c - x_0)(x_0 - g)} \quad (3_6)$$

avec, pour  $R$ , un minimum relatif:

$$R_m = \frac{4 x_0 (c + x_0)}{c},$$

correspondant à

$$g_m = 2 x_0 - c \quad \text{et} \quad b_m = \frac{2 x_0^2}{c + x_0}$$

Sur la droite  $p = x_0$ , pour l'intervalle  $x_0 \leq c < \infty$ .

$$b = 0 \quad \text{et} \quad R = \infty$$

Sur la droite  $g = x_0$ , pour l'intervalle  $0 < c \leq x_0$

$$b = \infty \quad \text{et} \quad R = \infty$$

Sur la droite  $g = x_0$ , pour l'intervalle  $x_0 \leq c < \infty$

$$b = c \frac{(c + x_0)(x_0 - p)}{(c - x_0)(c + p)} \quad (1_5)$$

et

$$R = \frac{x_0}{c} \cdot \frac{(c + x_0)(c - p)^2}{(c - x_0)(x_0 - p)} \quad (3_7)$$

avec, pour  $R$  un minimum relatif,

$$R_m = \frac{4 x_0 (c + x_0)}{c}, \text{ correspondant à } g_m = 2 x_0 - c \text{ et } b_m = \frac{c(c + x_0)}{2 x_0}$$

6d. *Cas singulier: le point ( $g = x_0, p = x_0$ ) lorsque  $c = x_0$ .*

Lorsque  $g = p = c = x_0$ , l'équation (1) est satisfaite par n'importe quelle valeur de  $b$  et l'équation (3<sub>1</sub>) se réduit à

$$R = 2 x_0 \left( 2 + \frac{b}{x_0} + \frac{x_0}{b} \right)$$

avec  $R_{\min} = 8 x_0$  pour  $b = x_0$ , et  $R = \infty$  pour  $b = 0$  et pour  $b = \infty$ .

Le point  $(g = x_0, p = x_0)$  est donc le point de convergence de toutes les courbes de valeur constante de  $b$  dont le paramètre est compris entre 0 et  $\infty$ , en même temps que le point de convergence d'un double faisceau de toutes les courbes de valeur constante de  $R$  dont le paramètre est compris entre  $8x_0$  et  $\infty$ .

L'inclinaison  $\text{tg } \beta$  des courbes de valeur constante de  $b$  se déduit de l'équation (1), réduite pour le cas  $c = x_0$ . On a

$$\left[ \frac{dp}{dg} \right]_{c=x_0} = \frac{(x_0 + p)b^2 - (x_0 - p)x_0^2}{(x_0 - g)b^2 - (x_0 + g)x_0^2}$$

et  $\text{tg } \beta = \left[ \frac{dp}{dg} \right]_{c=g=p=x_0}$  d'où  $\text{tg } \beta = - \left[ \frac{b}{x_0} \right]^2$

Les courbes correspondant à un couple de valeurs cohérentes de  $b$  et de  $R$  ont évidemment la même inclinaison; on aura donc, en désignant par  $\text{tg } \varrho$  l'inclinaison d'une courbe de paramètre  $R$ ,

$$R = 2x_0 \left( 2 + \sqrt{-\text{tg } \varrho} + \sqrt{-\frac{1}{\text{tg } \varrho}} \right)$$

d'où

$$\text{tg}^2 \varrho + \frac{R^2 - 8Rx_0 + 8x_0^2}{4x_0^2} \text{tg } \varrho + 1 = 0$$

Cette équation confirme que le minimum de  $R$  est bien  $8x_0$  pour ce cas singulier; elle montre qu'à chaque valeur du paramètre correspondent, pour  $R$ , deux branches de courbe qui divergent à partir du point  $(x_0, x_0)$  en encadrant les branches de courbe dont le paramètre est moins élevé. L'écart angulaire, nul pour  $R = 8x_0$  ( $\varrho' = \varrho'' = -45^\circ$ ), atteint  $90^\circ$  pour  $R = \infty$ , ( $\varrho' = 0$ ,  $\varrho'' = -90^\circ$ ).

III. Valeurs limites de  $R/x_0 = (R)$  en fonction de  $c/x_0 = (c)$ , sur la droite  $p = x_0$ , et valeurs correspondantes de  $g/x_0 = (g)$  et de  $b/x_0 = (b)$ .

(c)	(g)		(b)		(R)	
	1 à $(g_m) = 2 - c$ à $\infty$		$\infty$ à $(b_m) = \frac{2}{c+1}$ à $\frac{1-c}{1+c}$		$\infty$ à $(R_m) = \frac{4(c+1)}{c}$ à $\infty$	
0	1 à	2 à $\infty$	$\infty$ à	2 à 1	$\infty$ à	$\infty$
0,1	1 à	1,9 à $\infty$	$\infty$ à	1,8182 à 0,8182	$\infty$ à	44 à $\infty$
0,3	1 à	1,7 à $\infty$	$\infty$ à	1,5385 à 0,5385	$\infty$ à	17,3333 à $\infty$
0,5	1 à	1,5 à $\infty$	$\infty$ à	1,3333 à 0,3333	$\infty$ à	12 à $\infty$
0,9	1 à	1,1 à $\infty$	$\infty$ à	1,0526 à 0,0526	$\infty$ à	8,4444 à $\infty$
1	1		$\infty$ à	1 à 0	$\infty$ à	8 à $\infty$
$1 \leq c < \infty$		1 à $\infty$		0		$\infty$

IV. Valeurs limites de  $R/x_0 = (R)$  en fonction de  $c/x_0 = (c)$ , sur la droite  $g = x_0$ , et valeurs correspondantes de  $p/x_0 = (p)$  et de  $b/x_0 = (b)$ .

(c)	(p)		(b)			(R)		
	0 à $(p_m) = 2 - c$ à 1		$\frac{c+1}{c-1}$	à $(b_m) = \frac{c(c+1)}{2}$ à 0		$\frac{c(c+1)}{c-1}$	à $(R_m) = \frac{4(c+1)}{c}$ à $\infty$	
$0 < c < 1$	0	à 1	$\infty$			$\infty$		
1		1	$\infty$	à 1	à 0	$\infty$	à 8	à $\infty$
1,1	0 à 0,9	à 1	21	à 1,155	à 0	23,1	à 7,6363	à $\infty$
1,4	0 à 0,6	à 1	6	à 1,68	à 0	8,4	à 6,8571	à $\infty$
1,8	0 à 0,2	à 1	3,5	à 2,52	à 0	6,3	à 6,2222	à $\infty$
2	0	à 1		3	à 0		6	à $\infty$
$1 + \sqrt{2}$	0	à 1	2,4142		à 0	5,8284		à $\infty$
3	0	à 1	2		à 0	6		à $\infty$
4	0	à 1	1,6667		à 0	6,6667		à $\infty$
5	0	à 1	1,5		à 0	7,5		à $\infty$
6	0	à 1	1,4		à 0	8,4		à $\infty$
8	0	à 1	1,2857		à 0	10,2857		à $\infty$
10	0	à 1	1,2222		à 0	12,2222		à $\infty$
20	0	à 1	1,1053		à 0	22,1053		à $\infty$
50	0	à 1	1,0408		à 0	52,0408		à $\infty$
$\infty$	0	à 1	1		à 0	$\infty$		

6e. Cas particulier: la droite à  $45^\circ$ ,  $g = p$ .

En posant  $g = p = \varepsilon$ , les équations (1) et (3) se réduisent à

$$b^2 + \frac{(\varepsilon^2 + c x_0)(c - x_0)}{(\varepsilon + c)(\varepsilon - x_0)} + c x_0 = 0 \text{ et} \quad (1_6)$$

$$R = \frac{(\varepsilon^2 - c x_0)(\varepsilon + c)}{c(\varepsilon - x_0)} \quad (3_8)$$

dont le domaine de validité apparaît sans ambiguïté sur la fig. 3, ligne I'.

A la limite des racines positives réelles, représentée, ici, par le sommet de l'hyperbole limite  $H_2''$ , c'est-à-dire pour

$$\varepsilon = s_2'' = \sqrt{c x_0} \frac{2 \sqrt{c x_0} + x_0 - c}{2 \sqrt{c x_0} - x_0 + c}, \quad (7_2)$$

la première de ces équations a ses racines égales exprimées par  $b_s = \sqrt{c x_0}$ , (1<sub>7</sub>) en même temps que (§ 6a),

$$R_s = 8 c x_0 \left[ \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{c - x_0 + 2 \sqrt{c x_0}} \right]^2 \quad (3_9)$$

**7. Allure générale des courbes d'égal valeur de  $R$  dans le domaine  $I'$ .**

Bien qu'ils procèdent d'une évolution continue, les segments de courbe compris dans le domaine des valeurs admissibles présentent des types différents selon que les limites du domaine sont représentées par les axes de coordonnées, par les droites  $p = x_0$  ou  $g = x_0$  ou par la branche d'hyperbole  $H_2''$  (§ 3 et fig. 3).

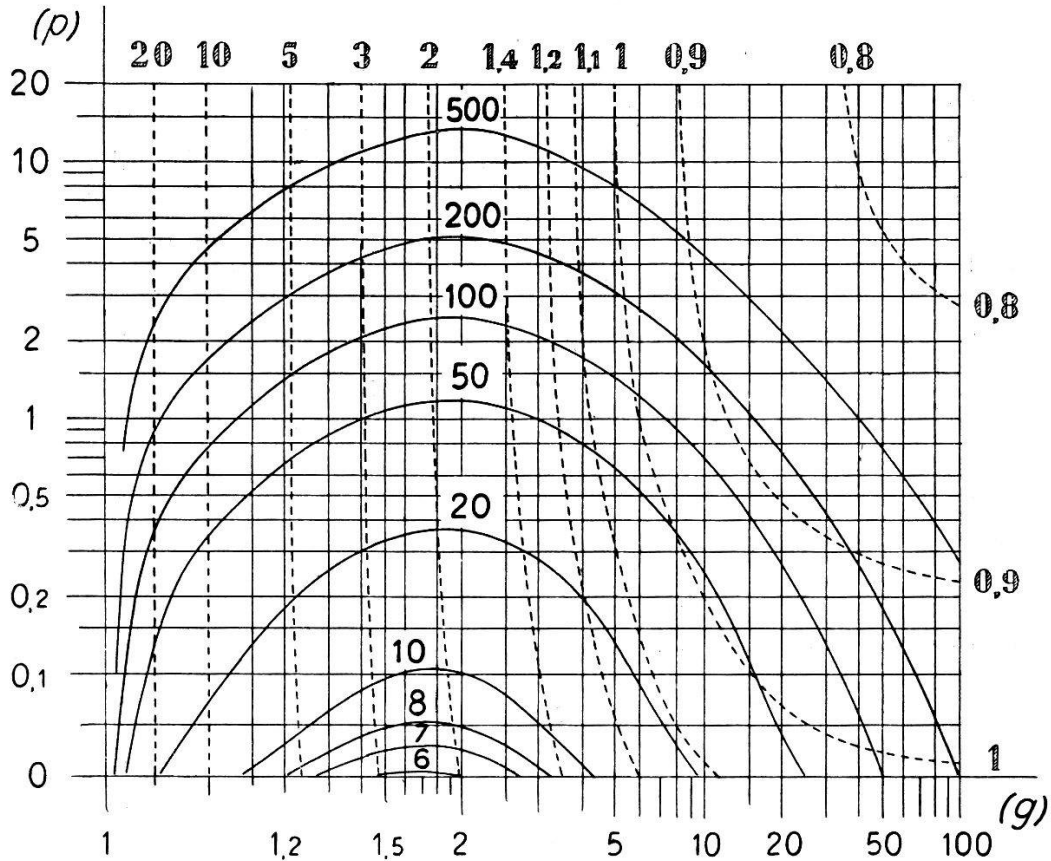


Fig. 5.

Diagramme pour  $\frac{c}{x_0} = (c) = 0,1$ .

Trait plein:  $\frac{R}{x_0} = (R)$ ; pointillé:  $\frac{b}{x_0} = (b)$ .

L'existence d'un minimum minimorum de  $R$  sur l'axe  $p = 0$  (§ 6b) et d'un minimum relatif sur la droite  $p = x_0$  (§ 6c) ainsi que les propriétés du groupe  $g = p = c = x_0$  (cas sing., § 6d), impliquent, pour chaque valeur du paramètre  $R$ , l'existence de deux branches de courbe qui s'infléchissent l'une vers l'autre.

$$0 < \frac{c}{x_0} \leq 3 - \sqrt{8} \quad (\text{fig. 5})$$

En l'absence d'hyperbole limite (§ 3), les deux branches de courbe correspondant à un même paramètre  $R$  se raccordent pour



ne former qu'une seule courbe qui tourne sa concavité vers l'axe  $p = 0$  et dont l'ordonnée maximum croit en même temps que  $R$ :

$$\underline{3 - \sqrt{8} < \frac{c}{x_0} < 3 + \sqrt{8}}$$

Pour  $R$  croissant, les deux branches cessent de se raccorder dès qu'elles ont chacune un point de tangence distinct avec l'hyperbole limite, c'est-à-dire (§ 6a) lorsque

$$R > 8 c x_0 \left( \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{c - x_0 + 2\sqrt{c x_0}} \right)^2.$$

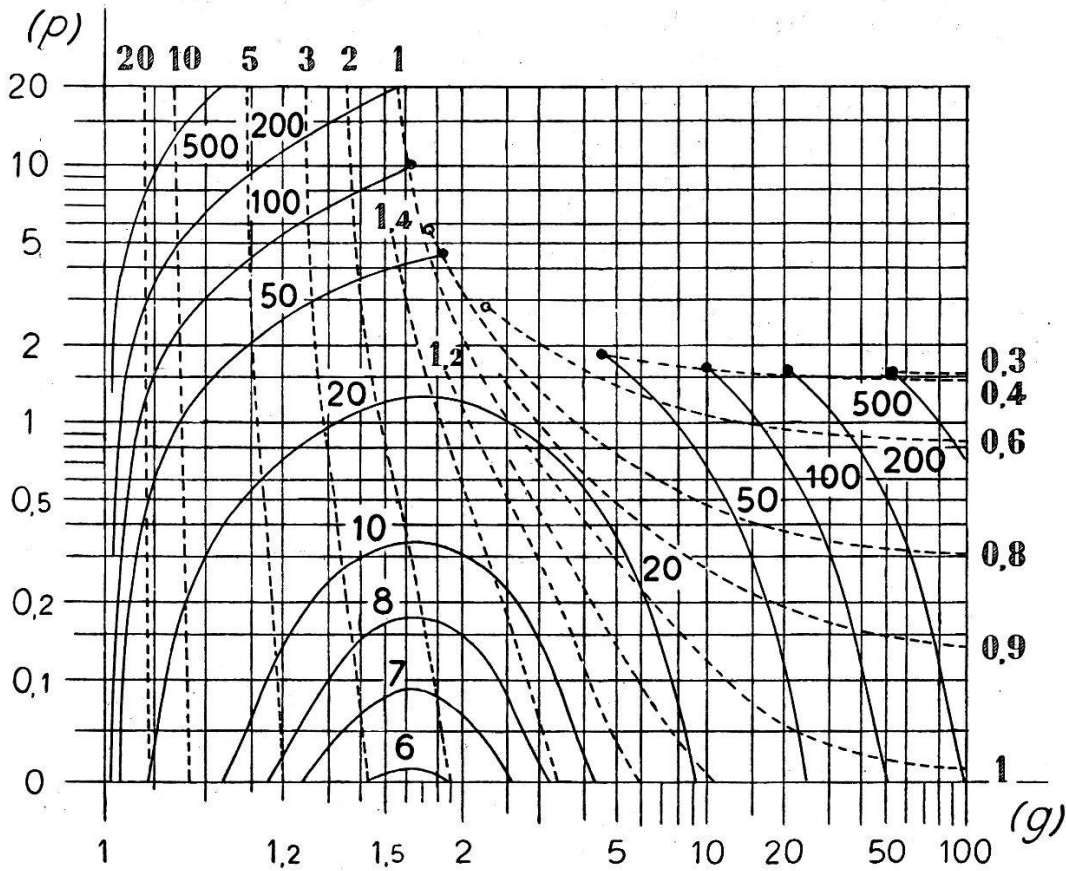


Fig. 6.

Diagramme pour  $\frac{c}{x_0} = (c) = 0,3$ .

Trait plein:  $\frac{R}{x_0} = (R)$ ; pointillé:  $\frac{b}{x_0} = (b)$ .

Pour  $3 - \sqrt{8} < \frac{c}{x_0} < 1$  (fig. 6) les diagrammes, dont l'hyperbole  $H_2''$  est l'enveloppe, donnent plutôt l'impression de couper cette enveloppe parce que le raccordement de chaque branche, avec son prolongement algébrique du domaine I'' (c'est-à-dire avec la conjuguée de l'autre branche du domaine I') (§ 3), se fait par un

\*



arc dont le rayon de courbure, très court, tourne d'à peu près  $180^\circ$  dans le voisinage du point de tangence avec la courbe enveloppe.

Pour  $\frac{c}{x_0} = 1$  (fig. 7), l'hyperbole limite  $H_2''$  se réduit à ses asymptotes  $g = x_0$  et  $p = x_0$ ; toutes les branches dont le paramètre est supérieur à  $R = 8 x_0$  convergent vers le centre de l'hyperbole  $g = p = x_0$  (cas sing. § 6d).

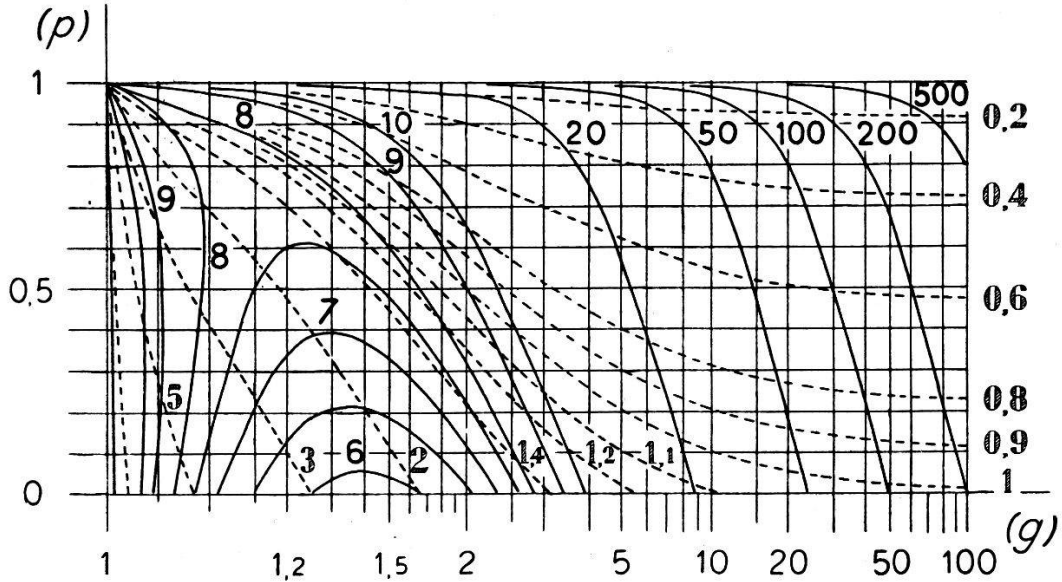


Fig. 7.

Diagramme pour  $c/x_0 = (c) = 1$ .

Trait plein:  $\frac{R}{x_0} = (R)$ ; pointillé:  $\frac{b}{x_2} = (b)$ .

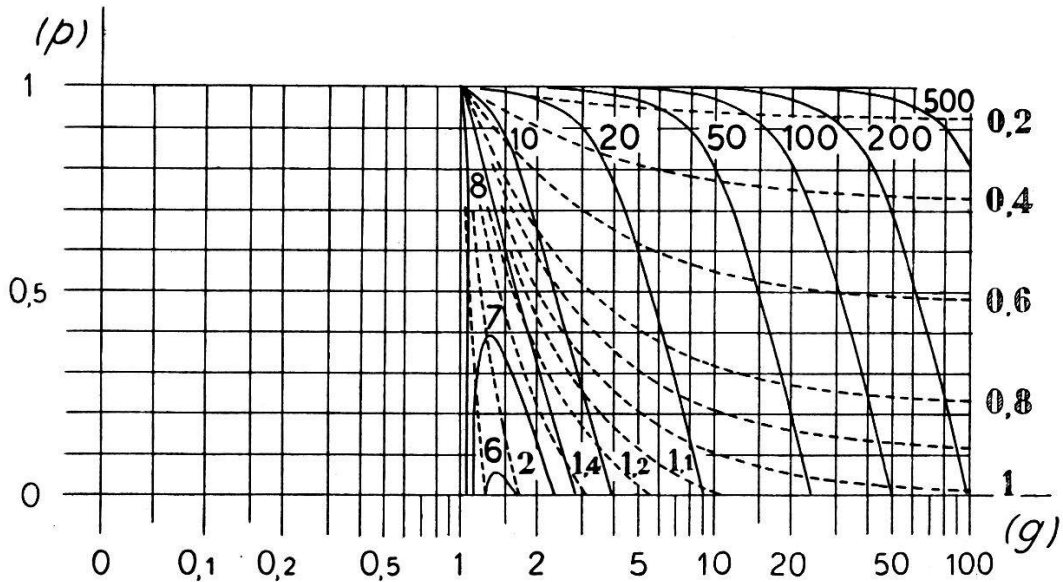


Fig. 7 bis.

Diagramme pour  $c/x_0 = (c) = 1$ .

Trait plein:  $\frac{R}{x_0} = (R)$ ; pointillé:  $\frac{b}{x_0} = (b)$ .

Pour  $1 < \frac{c}{x_0} < 3 + \sqrt{8}$  (fig. 8) et  $R = R_s$ , les deux branches  $R_s$  qui ont leur point de tangence avec l'hyperbole limite  $H_2''$  sur le sommet de celle-ci, se raccordent en un point de rebroussement

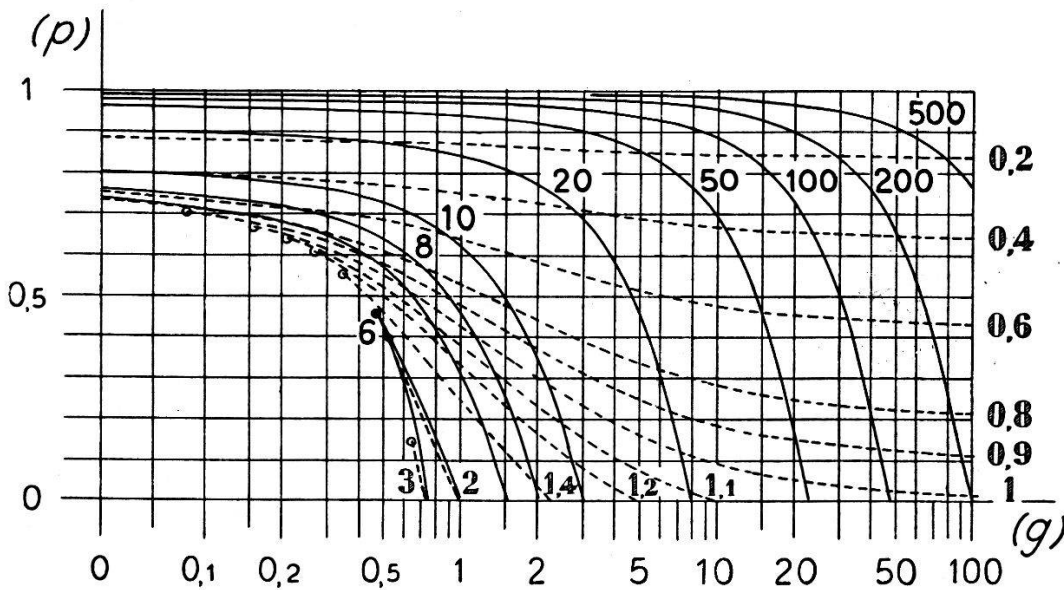


Fig. 8.

Diagramme pour  $c/x_0 = (c) = 3$ . Trait plein:  $R/x_0 = (R)$ ; pointillé:  $b/x_0 = (b)$ .

parce qu'elles se dirigent vers le point de tangence dans le même sens; pour  $R < R_s$ , les deux branches se raccordent en une courbe continue; pour les valeurs de  $R$  immédiatement supérieures à  $R_s$ , les deux branches sont séparées et s'arrêtent sur deux points conjugués de l'hyperbole limite; pour

$$R > [R_H]_0 = \sqrt{cx_0} \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}},$$

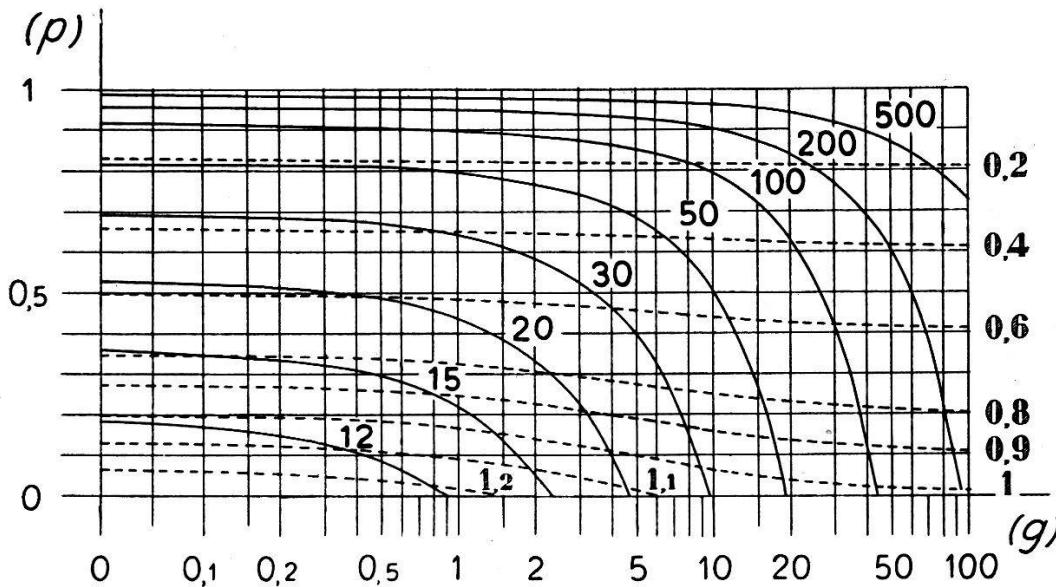


Fig. 9.

Diagramme pour  $c/x_0 = (c) = 10$ . Trait plein:  $R/x_0 = (R)$ ; pointillé:  $b/x_0 = (b)$ .

(§ 6b) une seule branche subsiste, celle qui tourne sa concavité vers l'origine des coordonnées.

$$\underline{3 + \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < \infty \text{ (fig. 9).}}$$

Seuls entrent en ligne de compte les diagrammes de  $R$  dont le paramètre est supérieur ou égal à  $c$  (§ 6b); ils comportent une seule branche, celle qui coupe les deux axes de coordonnées et qui tourne sa concavité vers l'origine.

V. Nature des diagrammes de  $R$  en fonction de  $(c)$  et de  $(R)$ .

<i>Nature</i>	un point	courbe continue à 2 branches	2 branches qui se coupent
$(c)$	$(R)$	$(R)$	$(R)$
0 à $3 - \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8} < (R) < \infty$	
$3 - \sqrt{8}$ à 1	$3 + \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8} < (R) \leq (R_s)$	.....
1	$3 + \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8} < (R) < 8$	$8 \leq (R) < \infty$
1 à $3 + \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8} < (R) < (R_s)$	$(R) = (R_s)$
$3 + \sqrt{8}$ à $\infty$	$(c)$	.....	.....
<i>Nature</i>	2 branches séparées		1 branche concave vers l'origine
$(c)$	$(R)$		$(R)$
0 à $3 - \sqrt{8}$			
$3 - \sqrt{8}$ à 1	$(R_s) < (R) < \infty$		
1			
1 à $3 + \sqrt{8}$	$(R_s) < (R) < [R_H]_0$		$[R_H]_0 < (R) < \infty$
$3 + \sqrt{8}$ à $\infty$	.....		$(c) < (R) < \infty$

8. Allure générale des courbes d'égale valeur de  $b$  dans le domaine I'.

Les courbes d'égale valeur de  $b$  sont des hyperboles équilatères (équ. 1<sub>1</sub>) qui évoluent

de  $(g + c)(p - x_0) = 0$  pour  $b = 0$   
 vers  $\left(g - \frac{x_0^2 - c^2}{2c}\right)(p - 0) = 0$  pour  $b = x_0$   
 puis vers  $(g - x_0)(p + c) = 0$  pour  $b = \infty$

La plus typique d'entre elles est celle qui correspond à  $b = x_0$ ; elle a pour asymptote horizontale l'axe  $p = 0$ ; son asymptote verticale se déplace de  $g = \infty$  à  $g = -\infty$  dans l'intervalle  $0 < c < \infty$  et l'ordonnée de la courbe est positive pour les abscisses supérieures à l'abscisse de l'asymptote verticale; il en résulte que le diagramme  $b = x_0$  traverse toujours le domaine I' et tourne sa convexité vers l'origine des coordonnées.

Les diagrammes  $b = 0$  et  $b = \infty$  forment la limite du domaine des racines positives, le premier, représenté par la droite  $p = x_0$  valable pour  $1 \leq \frac{c}{x_0} < \infty$ , le second, représenté par la droite  $g = x_0$  valable pour  $0 \leq \frac{c}{x_0} \leq 1$ .

Les diagrammes qui correspondent aux valeurs finies de  $b$  ont un comportement analogue à celui qui correspond à  $b = x_0$ . Ils sont d'autant plus rapprochés de l'origine des coordonnées que le paramètre  $b$  est plus grand. Lorsque le paramètre d'orientation  $c$  augmente, tout le faisceau se déplace vers l'origine de sorte que les diagrammes correspondant aux valeurs les plus faibles de  $b$  pénètrent peu à peu dans le domaine partiel I' pendant que  $\frac{c}{x_0}$  varie de 0 à 1, tandis que les diagrammes correspondant aux valeurs les plus élevées de  $b$  sortent l'une après l'autre de ce domaine lorsque  $\frac{c}{x_0}$  varie de 1 à l'infini.

$$0 < \frac{c}{x_0} \leq 3 - \sqrt{8} \quad (\text{fig. 5}).$$

La plus petite valeur admissible pour  $b$  est celle dont le diagramme est à l'infini, c'est-à-dire, d'après l'équation (1<sub>1</sub>):

$$b = \frac{x_0 - c + \sqrt{x_0^2 - 6cx_0 + c^2}}{2}$$

avec  $g = \infty$  et  $p = \infty$ .

$$3 - \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < 1 \quad (\text{fig. 6}).$$

La plus petite valeur admissible pour  $b$  est celle dont le point de tangence avec l'hyperbole limite a une abscisse infinie, c'est-à-dire d'après la formule (7<sub>4</sub>):

$$b = x_0 \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{c}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{c}} \quad \text{avec} \quad g_{Hb} = \infty \quad \text{et} \quad [p_{Hb}]_{\infty} = \frac{2cx_0}{c - x_0 + 2\sqrt{cx_0}}$$

Pour les valeurs de  $b$  immédiatement supérieures à cette limite, les diagrammes, qui se déplacent de l'infini vers la droite  $g = x_0$ ,

en se redressant peu à peu, aboutissent sur l'hyperbole limite  $H_2''$  jusqu'au moment où le point de tangence, après avoir passé par le sommet  $s_2''$ , pour  $b_s = \sqrt{cx_0}$  (§ 6e), atteint une ordonnée infinie, c'est-à-dire :

$$b = c \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{c}}{\sqrt{x_0} - \sqrt{c}} \quad \text{avec} \quad [g_{Hb}]_\infty = \frac{2cx_0}{c - x_0 + 2\sqrt{cx_0}} \quad \text{et} \quad p_{Hb} = \infty.$$

Les diagrammes suivants sont constitués par des branches d'hyperbole, de plus en plus verticales, qui tendent vers la droite  $g = x_0$ .

$$\frac{c}{x_0} = 1 \quad (\text{fig. 7}).$$

Tous les diagrammes compris entre la droite  $p = x_0$  pour  $b = 0$ , la droite  $g = x_0$  pour  $b = \infty$ , et l'axe  $p = 0$ , convergent vers le point  $g = p = x_0$ . Pour  $b < x_0$ , les diagrammes s'étendent du point commun dans la direction de  $g = \infty$ ; pour  $b > x_0$ , ils sont limités par le point commun et par une abscisse finie sur l'axe  $p = 0$ .

$$1 < \frac{c}{x_0} \leq 3 + \sqrt{8} \quad (\text{fig. 8}).$$

La plus grande valeur admissible pour  $b$  est celle qui correspond au point d'intersection de l'hyperbole limite  $H_2''$  avec l'axe  $p = 0$ , c'est-à-dire d'après les formules (7<sub>3</sub>) et (1<sub>2</sub>),

$$b = x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}} \quad \text{avec} \quad [g_H]_0 = \sqrt{cx_0} - \frac{c - x_0}{2} \quad \text{et} \quad p = 0$$

Pour les valeurs de  $b$  immédiatement inférieures, les digrammes, qui se déplacent de l'axe  $g = 0$  vers la droite  $p = x_0$ , aboutissent sur l'hyperbole limite jusqu'au moment où le point de tangence, après avoir passé par le sommet  $s_2''$ , pour  $b_s = \sqrt{cx_0}$ , tombe sur l'axe  $p = 0$ , c'est-à-dire :

$$b = c \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}} \quad \text{avec} \quad g = 0 \quad \text{et} \quad [p_H]_0 = \sqrt{cx_0} - \frac{c - x_0}{2}$$

$$3 + \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < \infty \quad (\text{fig. 9})$$

La plus grande valeur admissible pour  $b$  est celle qui correspond à  $g = p = 0$ , c'est-à-dire :

$$b = \frac{c - x_0 - \sqrt{c^2 - 6cx_0 + x_0^2}}{2} \quad \text{avec} \quad g = p = 0$$

VI. Tableau d'ensemble des diagrammes de b.

c	b	coordonnées des extrémités des diagrammes			Nature des diagrammes
		g'	p'	(g'', p'') (v. note)	
$0 < \frac{c}{x_0} \leq 3 - \sqrt{8}$	$b_{\min} = \frac{x_0 - c + \sqrt{x_0^2 - 6cx_0 + c^2}}{2}$	$\infty$	$\infty$	A	point
	.....	g	$\infty$	A ou B	courbe
	$b_{\max} = \infty$	$x_0$	$\infty$	A	droite $g = x_0$
$3 - \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < 0$	$b_{\min} = x_0 \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{c}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{c}}$	$\infty$	$[p_{Hb}]_{\infty}$	A	point
	.....	$g_{Hb}$	$p_{Hb}$	A	courbe
	$b_s = \sqrt{cx_0}$	$s_2''$	$s_2''$	A	courbe
	.....	$g_{Hb}$	$p_{Hb}$	A ou B	courbe
	$[b_H]_{\sup} = c \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{c}}{\sqrt{x_0} - \sqrt{c}}$	$[g_{Hb}]_{\infty}$	$\infty$	A ou B	courbe
	.....	$g_b$	$\infty$	A ou B	courbe
$b_{\max} = \infty$	$x_0$	$\infty$	B	droite $g = x_0$	
$\frac{c}{x_0} = 1$	$b_{\min} = 0$	$x_0$	$x_0$	A	droite $p = x_0$
	.....	$x_0$	$x_0$	A ou B	courbe
	$b_{\max} = \infty$	$x_0$	$\infty$	B	droite $g = x_0$
$1 < \frac{c}{x_0} \leq 3 + \sqrt{8}$	$b_{\min} = 0$	0	$x_0$	A	droite $p = x_0$
	.....	0	$[p_b]_0$	A ou B	courbe
	$[b_H]_{\inf} = c \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}$	0	$[p_{Hb}]_0$	A ou B	courbe
	.....	$g_{Hb}$	$p_{Hb}$	A ou B	courbe
	$b_s = \sqrt{cx_0}$	$s_2''$	$s_2''$	B	courbe
	.....	$g_{Hb}$	$p_{Hb}$	B	courbe
$b_{\max} = x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}$	$[g_{Hb}]_0$	0	B	point	
$3 + \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < \infty$	$b_{\min} = 0$	0	$x_0$	A	droite $p = x_0$
	.....	0	$[p_b]_0$	A ou B	courbe
	$b_{\max} = \frac{c - x_0 - \sqrt{c^2 - 6cx_0 + x_0^2}}{2}$	0	0	B	point

Note pour les coordonnées g'' et p''.

Pour  $b < x_0$ , type A:  $g'' = \infty$ ,  $p'' = [p_b]_{g=\infty}$

Pour  $b + x_0$ , type B:  $g'' = [g_b]_{p=0}$ ,  $p'' = 0$



### 9. Conclusions générales et résultats.

Cette étude établit la façon dont il faut choisir les bras du pont de Wheatstone pour obtenir, lors de l'enregistrement continu de la variation d'une résistance électrique  $x$ , le maximum de sensibilité pour une valeur donnée  $x_0$  de cette résistance. Les conditions imposées par l'emploi rationnel du montage, c'est-à-dire la coïncidence du maximum de sensibilité avec l'équilibre du pont, font que les résultats obtenus sont applicables à la mesure des résistances par la méthode de zéro.

Le bras du pont  $c$  opposé à la résistance à mesurer (fig. 1) a été choisi comme paramètre d'orientation. Les résultats, condensés sous forme de diagrammes à double faisceau de courbes (fig. 5 à fig. 9), évoluent en fonction de ce paramètre et prennent cinq formes typiques différentes; les valeurs numériques de  $\frac{c}{x_0}$  correspondant aux diagrammes reproduits plus haut ont été choisies de telle sorte que, tout en représentant chacune des formes typiques et tout en illustrant leur évolution, ils puissent servir à résoudre rapidement les cas les plus usuels avec une assez bonne approximation.

Chaque point des diagrammes indique:

1° la composition à donner au pont pour que le maximum de sensibilité coïncide avec l'équilibre du pont,

2° la grandeur de la sensibilité maximum, par une valeur  $R$  qui lui est inversement proportionnelle et qui a la dimension d'une résistance.

Toutes les grandeurs fournies par la lecture des diagrammes sont rapportées à la valeur moyenne  $x_0$  de la résistance à mesurer, prise comme unité; un point quelconque, relevé sur un diagramme, définit un groupe de valeurs cohérentes comportant:

1° l'indice du diagramme  $(c) = \frac{c}{x_0}$ ,

2° son abscisse  $(g) = \frac{g}{x_0}$ ,

3° son ordonnée  $(p) = \frac{p}{x_0}$ ,

4° le paramètre de la courbe pointillée correspondante  $(b) = \frac{b}{x_0}$ ,

5° le paramètre de la courbe pleine correspondante  $(R) = \frac{R}{x_0}$ .

On en tire,  $x_0$  étant donné, les résistances à donner aux bras du pont,  $c$ ,  $b$ ,  $d = \frac{cx_0}{b}$ ,  $g$ , et  $p$  ainsi que la résistance  $R$  qui carac-

térise la sensibilité maximum. Le courant dans le galvanomètre est donné :

$$\text{pour l'enregistrement, par } i = \frac{E}{R} \cdot \frac{x_0 - x}{x_0 + x} \quad (4)$$

$$\text{avec } i_0 = -i_\infty = \frac{E}{R} ; \quad (4_2)$$

$$\text{pour la méthode de zéro, par } di = -\frac{E}{2R} \cdot \frac{dx}{x} \quad (4_3)$$

Rappelons (§ 3) que le pont satisfait encore aux conditions imposées et garde la même sensibilité, si l'on permute simultanément  $g$  avec  $p$  et  $b$  avec  $d$ .

Deux cas peuvent se présenter pour le calcul d'un enregistrement, suivant que l'instrument de mesure est trop sensible pour la variation de résistance envisagée et pour la tension de la source ou, qu'au contraire, il est nécessaire de pousser au maximum la sensibilité du montage afin d'obtenir à l'instrument de mesure une déviation aussi grande que possible.

Dans le premier cas, on détermine  $R$  au moyen des formules fondamentales (4<sub>1</sub>) ou (4<sub>2</sub>) ; on cherche ensuite, sur les diagrammes, parmi les groupes de valeurs cohérentes  $(g) = \frac{g}{x_0}$ ,  $(p) = \frac{p}{x_0}$ ,  $(b) = \frac{b}{x_0}$  qui correspondent à  $(R)$  ou parmi les groupes permutés  $(g) = \frac{p}{x_0}$ ,  $(p) = \frac{g}{x_0}$ ,  $(b) = \frac{d}{x_0}$ , celui qui répond le mieux aux moyens dont on dispose et aux intensités de courant admissibles. Les lois de Kirchhoff donnent, pour les intensités dans les bras :

$$\begin{aligned} i_g &= \frac{E}{R} \cdot \frac{x_0 - x}{x_0 + x} & i_x &= \frac{E}{R} \cdot \frac{d + g + \frac{gd}{c} + x_0}{x_0 + x} \\ i_c &= \frac{E}{R} \cdot \frac{\frac{bg}{c} + x_0 + \frac{b+g}{c} x}{x_0 + x} & & (4_4) \\ i_p &= i_x + i_c - i_g & i_b &= i_x - i_g & i_d &= i_c - i_g \end{aligned}$$

Dans le second cas qui est en même temps celui de la méthode de zéro, la recherche de la sensibilité optimum est très simple si la résistance du bras d'alimentation est négligeable, c'est-à-dire si  $p \rightarrow 0$  (§ 6b) ; quelle soit la valeur de  $(c)$  comprise dans l'intervalle  $0 < (c) < 3 + \sqrt{8}$ , on a le maximum de sensibilité, correspondant à  $(R) = 3 + \sqrt{8}$ , pour  $(b) = (1 + \sqrt{2})$  et  $(g) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (c)$  ;



pour  $(c) > 3 + \sqrt{8}$ , la sensibilité ne peut plus atteindre le maximum maximorum et elle s'en éloigne d'autant plus que  $(c)$  et  $(g)$  sont plus grands.

Lorsque la résistance du bras d'alimentation n'est pas négligeable, on détermine les résistances à donner aux bras du pont en cherchant, dans l'ensemble des diagrammes, celui qui, pour le point de coordonnées  $(g) = \frac{g}{x_0}$ ,  $(p) = \frac{p}{x_0}$  ou pour le point permuté  $(g) = \frac{p}{x_0}$ ,  $(p) = \frac{g}{x_0}$ , correspond à la plus petite valeur de  $(R)$ ; le paramètre de la courbe pointillée fournit alors  $b = (b) \cdot x_0$  et  $d = \frac{cx_0}{b}$ , si les coordonnées sont directes, ou  $d = (b) \cdot x_0$  et  $b = \frac{cx_0}{d}$  si les coordonnées sont permutées.

Les valeurs fournies par les diagrammes sont approximatives en raison de la difficulté que présente l'interpolation sur un réseau large dont les paramètres ne sont pas en progression arithmétique et dont les échelles de coordonnées ne sont pas régulières. Malgré cela les diagrammes constituent un échelon nécessaire pour le calcul précis de chaque cas particulier: en indiquant l'ordre de grandeur des coordonnées  $g$  et  $p$  et du paramètre arbitraire  $c$ , ils permettent d'établir très rapidement, autour du point considéré, un réseau d'interpolation plus serré en se servant d'équations simples telles que les équations fondamentales (1), (2) et (3) qui définissent successivement  $b$ ,  $d$  et  $R$  en fonction de  $g$ ,  $p$  et  $c$ .

La formule fondamentale (4) sert à passer de l'échelle en unités d'intensité du galvanomètre à l'échelle en ohms. Si la construction du galvanomètre permet de déplacer la position d'équilibre du cadre mobile, on a la faculté d'obtenir le maximum de sensibilité sur une région choisie du domaine de variation, ce qui présente un avantage dans certains cas spéciaux.

L'établissement d'un réseau d'orientation pour une valeur donnée de  $(c)$  se fait au moyen des équations (1<sub>1</sub>) et (3<sub>3</sub>) en s'aidant des remarques faites au cours de cette étude et des tableaux d'orientation numériques qui y sont intercalés.

Fribourg, Institut de physique de l'Université.