Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 16 (1943)
Heft: II

Artikel: Un principe qui relie la théorie de relativité et la théorie des quanta
Autor: Stueckelberg, E.C.G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111399

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Un principe qui relie la théorie de relativité et la théorie des quanta

par **E. C. G. Stueckelberg.**

(15. I. 1943.)

Résumé[1]). D'un *principe* (plus général que celui de la *covariance de* LORENTZ) contenant la *covariance spinorielle* et la *covariance de jauge*, la *théorie de relativité* (constante c) et la *théorie des quanta* (constantes e et h) sont déduites. L'existence d'un *champ de* YUKAWA *(mésotrons)* montre que dès que des *dimensions de l'ordre du rayon de l'électron* interviennent, les lois de la théorie des quanta ne sont plus celles que nous connaissons.

Introduction.

Nous nous proposons de démontrer dans cet article que la *théorie de relativité* et la *théorie des quanta* peuvent être considérées comme étant la conséquence d'*un seul principe de relativité.*

Pour énoncer les lois gouvernant les *observations*, nous devons introduire certaines *notions* comme «*système de référence* $\vec{x}$, t», «*axes spinoriels* u_A», «*potentiels électromagnétiques* $\vec{A}$, Φ». Nous poserons comme *principe* que ces *notions ne peuvent pas être observées:*

1⁰ Le *principe de relativité d'Einstein,* donne aux lois une forme telle *(covariante)* qu'*aucune observation* ne peut distinguer entre *deux systèmes de référence* $\vec{x}$, t, *(système de coordonnées vectoriel* x^{μ}*)).

Nous proposons de compléter ce principe par les *deux nouveaux principes* suivants:

2⁰ *Aucune observation* n'est possible pour distinguer entre deux *systèmes* u_A *des axes spinoriels.*

3⁰ *Aucune observation* n'est possible qui puisse distinguer entre *deux systèmes de potentiels électromagnétiques* Φ, $\vec{A}$ *(systèmes de jauge).*

La conclusion à laquelle le 1er principe nous amène est connue (conclusion n⁰ 1).

L'analyse des principes 2⁰ et 3⁰ complète les résultats obtenus du 1er principe et nous amène aux conclusions n⁰ 2 à 6.

---

*) $\mu = 1,2,3,4$; $x^4 = ct$.

L'*ensemble de ces conclusions* peut être exprimé de la manière suivante:

1⁰ Toute observation de la vitesse v avec laquelle un signal peut être transmis donne une valeur $v \leqslant c$. Il y a des *champs* particuliers (par ex. le champ de Maxwell) pour lesquels tout paquet d'ondes se propage avec cette vitesse limite c. c est ainsi une *première constante universelle.*

2⁰ Toute observation de l'*énergie totale* H_U contenue dans une *onde spinorielle* u_A (de 1er ordre et de *tout ordre impair*) de fréquence $\omega_{\vec{k}}$ donne pour résultat un multiple entier $H_{\vec{k}} = N_{\vec{k}}\, h\, \omega_{\vec{k}}$ avec $N_{\vec{k}} = 0,1$.

3⁰ Toute observation de l'énergie H_Ψ etc. dans une *onde scalaire ou tensorielle* φ_a (=spinorielle de *tout ordre pair)*, influencée par l'onde spinorielle u_A, fournit le résultat $H_{\vec{k}} = N_{\vec{k}}\, h\, \omega_{\vec{k}}$ avec $N_k = 0, 1, 2, \ldots \infty$ avec *la même valeur de h.* h est ainsi une *seconde constante universelle.*

4⁰ Dans le cas particulier, où tout paquet d'ondes de $\varphi_a^{(\max)}$ se propage avec la vitesse maximale c, une grandeur bilinéaire en $u_{\bar{A}}$, la *charge électrique* e_U, existe, qui est conservée. La charge par onde vaut $e_{\vec{k}} = \pm N_{\vec{k}}\, e$, avec $(N_{\vec{k}} = 0,1)$.

5⁰ Entre un *champ chargé* $u_{\bar{A}}$, un *champ ordinaire* u_A et un *champ tensoriel* $\varphi_{\bar{a}}$ une interaction peut exister, telle que ce nouveau champ $\varphi_{\bar{a}}$ agit lui aussi sur le champ de MAXWELL $\varphi_a^{(\max)}$ et porte lui aussi de la charge électrique e_Ψ.

La charge par onde périodique portée par ce champ tensoriel (ou scalaire) $\varphi_{\bar{a}}$ vaut alors $e_{\vec{k}} = \pm N_{\vec{k}}\, e$ avec $N_{\vec{k}} = 0\ 1, 2, \ldots \infty$ avec *la même valeur de e.* e est ainsi une *troisième constante universelle*[2]).

6⁰ L'existence d'un champ tensoriel $\varphi_{\bar{a}}$ apte à porter des charges interdit toute connaissance exacte des valeurs des composantes de tout champ $u(x)_{\bar{A}}$ ou $\varphi(x)_{\bar{a}}$ sauf celle des *valeurs moyennes*, prises sur des régions spatiotemporelles plus grandes qu'une *longueur fondamentale* μ^{-1} caractéristique de ce champ tensoriel. Le même est vrai pour les densités de charge électrique. Les contributions de la « self énergie » à des quanta u_A les plus faibles (électrons), sont alors qualitativement $e^2 \mu \lesssim H_0 = h \varkappa c = m_{\mathrm{el}} c^2$.

La « masse de repos » m_{el} de ces quanta légers (= des *électrons* au repos) doit être reliée à μ^{-1} par

$$m_{\mathrm{el}} \cong \frac{e^2}{c^2}\, \mu = \frac{e^2}{hc} \cdot m_{\mathrm{mes}}$$

$h\mu = m_{\mathrm{mes}}\, c$ est la « masse de repos » des quanta de ce champ $\varphi_{\bar{a}}$ *(masse du mésotron)*. On obtient ainsi la même relation que celle trouvée dans une *théorie classique de l'électron* (proposée par l'auteur[7])). μ^{-1} est ainsi une *quatrième constante fondamentale (longueur fondamentale*[8])*)*.

Pour arriver à ces conclusions, nous considérons les *expériences* suivantes, qu'on peut faire sur *les composantes des champs:*

Les trois composantes E_i $(i = 1,2,3)$ qui forment le vecteur $\vec{E}$ du champ électrique sont des *grandeurs observables.* Si un dispositif pour les mesurer *(appareil)* nous mesure *au même endroit* une fois les trois composantes E_i et une autre fois les trois composantes différentes $E_{i'}$, et si nous savons, pour d'autres raisons, que l'*état électrique* $\vec{E}$ était le même aux moments des deux observations, une différence entre les E_i et les $E_{i'}$ nous permet de constater que l'*appareil a tourné autour d'un axe.* Dans le cas particulier où cet axe est l'axe x_3, les composantes E_i sont reliées aux $E_{i'}$ par la substitution:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{1'} \cos \vartheta + E_{2'} \sin \vartheta \\ E_2 &= - E_{1'} \sin \vartheta + E_{2'} \cos \vartheta \\ E_3 &= E_{3'} \end{aligned} \tag{0,1}$$

Cette observation combinée de E_i et $E_{i'}$ correspond à une réalité physique: la rotation de l'appareil autour d'une direction spatiale (axe x_3) d'un angle ϑ.

Une rotation de $\vartheta = 2\pi$ ramène l'appareil à sa position initiale. Elle ne peut donc pas étre constatée $(E_i = E_{i'})$. La *théorie du champ maxwellien* s'occupe de telles *grandeurs vectorielles* $\vec{E}\,(\vec{x},t)_i$ et $\vec{B}(\vec{x},t)_i$, qui se transforment suivant (0,1).

Par contre, dans *les théories ondulatoires de la matière,* on rencontre des *grandeurs spinorielles,* parmi lesquelles se trouve le spineur de 1er ordre avec 4 composantes u_A $(A = 1,3,5,7)$. Les u_A se transforment en $u_{A'}$ suivant une loi semblable à (0,1).

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{1'} \cos \chi + u_{3'} \sin \chi \\ u_3 &= - u_{1'} \sin \chi + u_{3'} \cos \chi \end{aligned} \tag{0,2}$$

dans le plan spinoriel 1,3 (la même loi règne dans le plan 5,7), si l'*appareil* a été *tourné dans l'espace physique* autour de l'axe x_3 par un angle $\vartheta = 2\chi$. (0,2) représente une *rotation dans le plan spinoriel* 1,3 par l'angle $\chi = \vartheta/2$. L'existence d'un dispositif pour mesurer u_A (appareil) permet donc de constater une *rotation de cet appareil dans l'espace physique.* Même une rotation par l'angle $\vartheta = 2\pi$ peut ainsi être constatée. Mais, au résultat d'une observation pareille, ne correspond certainement *aucune réalité physique,* parce que la position de tout objet tourné de 2π est identique à sa position initiale.

A côté du spineur de 1er ordre, les théories ondulatoires de la matière (théorie de SCHRÖDINGER) font intervenir des *champs complexes* ($u = u_1 + i\, u_2$) à deux composantes pour décrire la charge électrique. On montre qu'à la *substitution de jauge* ($\chi = \chi\,(\vec{x}, t) =$ fonction arbitraire)

$$\vec{A} = \vec{A}' + \frac{h}{e} \operatorname{grad} \chi; \quad \Phi = \Phi' - \frac{h}{e}\, \partial_t\, \chi \tag{0,3}$$

correspond une *transformation de jauge*

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1' \cos \chi + u_2' \sin \chi \\ u_2 &= -\, u_1' \sin \chi + u_2' \cos \chi \end{aligned} \tag{0,4}$$

entre les composantes du champ complexe. Elle represente une *rotation dans le plan complexe* 1,2. Les *grandeurs Maxwelliennes*

$$\vec{E} = -\, \partial_t\, \vec{A} - \operatorname{grad} \Phi; \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \tag{0,5}$$

restent *invariantes*. Si, donc, un appareil nous mesure au même endroit une fois u_A et une fois $u_{A'}$ ($A = 1,2$), tandis que l'*état matériel* (décrit par des grandeurs $u^{+A}\, u_A$, etc.*)) et *l'état électromagnétique* sont restés les mémes, la différence entre u_A et $u_{A'}$ permettra de constater une différence entre les potentiels Φ, $\vec{A}$ et Φ', $\vec{A}'$. *A cette observation ne correspond pas non plus une réalité physique.*

Pour rendre impossibles des constatations pareilles ((0,2) et (0,4)), nous demandons que la théorie contienne les deux restrictions suivantes:

1⁰ L'angle $\chi\,(\vec{x}, t)$ dans « *tout plan spinoriel* A, B » (du 1er ordre) ne peut être observé qu'à

$$\Delta\, \chi\,(\vec{x}, t) \geqslant \pi \tag{0,6}$$

près.

2⁰ Si l'angle $\chi\,(\vec{x}, t)$ dans « *un plan complexe* 1,2 » peut être mesuré exactement à un évènement $\vec{x}\, t$ ($\Delta\, \chi\,(\vec{x}, t) = 0$), il faut que la restriction

$$\Delta\, \chi\,(\vec{x} + d\vec{x}, t + dt) \geqslant \pi \tag{0,7}$$

existe pour toute mesure de $\chi\,(\vec{x} + d\vec{x},\, t + dt)$ à un évènement voisin.

De 1⁰, il s'ensuit que $\Delta\,(\chi - \chi') = 2\, \Delta \chi$ vaut toujours *au moins* $2\,\pi$. *Ceci rend impossible toute constatation d'une rotation* (0,2) *dans le plan spinoriel.* La condition 2⁰ donne aux *dérivées* de $\chi\,(\vec{x}, t)$ les incertitudes $\Delta\, \partial_t\, \chi = \Delta\, \partial_i\, \chi = \infty$ ($\partial_t = \partial/\partial t$; $\partial_i = \partial/\partial x_i$) et *rend ainsi impossible d'observer* $\vec{A} - \vec{A}'$ *et* $\Phi - \Phi'$ *en* (0,3).**)

---

*) Cf. page 182.

**) A la place de π dans l'inégalité (0,7) tout autre *angle fini* renderait le même service.

Dans cet article, nous proposons des principes d'incertitude de la forme

$$\Delta\, u\,(v)_A\, \Delta\, u\,(v')_B \geqslant 2\,\pi\, |\, r\,(u(v)_A,\, u(v')_B)\,| \tag{0,8}$$

qui, limitant les précisions $\Delta\, u\,(v)_A$ des valeurs observables des composantes moyennes

$$u(v)_A = v^{-1} \int_v (d\vec{x})^3\, u\,(\vec{x}, t)_A \tag{0,9}$$

(définies comme des *valeurs moyennes* des composantes u_A et u_B prises sur des (petits) volumes v (et v') de telle manière que (0,6) et (0,7) soient remplis.

Les conséquences de ces deux *principes* sont alors les 4 *conclusions* n^0 2 à n^0 5, mentionnées ci-dessus.

§ 1. Le principe d'incertitude pour l'angle δ dans le plan a, b.

Nous considérons un système décrit par deux variables (ayant la même dimension) a et b. L'état du système est alors représenté par un point dans le plan a, b. Un principe d'incertitude:

$$(\Delta a)^2\, (\Delta b)^2 \geqslant (2\,\pi\, r\,(a,\, b))^2 \tag{1,1}$$

exprime que le point représentatif du système ne pourra jamais être localisé plus exactement qu'à l'intérieur d'un contour $C(a, b)$ = const, tel que son aire *(aire d'incertitude)* vaut

$$\iint_C da\, db = \oint_C (a\, db - b\, da) = 2\,\pi\, r\,(a,\, b)\,. \tag{1,2}$$

Nous définissons ce contour C de telle manière qu'il ne contient *aucune intersection avec lui-même.* L'aire d'incertitude (1,2) a alors un *signe défini.* La plus grande précision est atteinte si $C(a, b)$ est un rectangle avec la surface $2\,\pi\, |r\,(a,\, b)|$. C'est alors que (1,1) résulte avec le signe =.

(1,1) et (1,2) montrent que, *pour toute paire de grandeurs observables* a, b, il existe *une troisième observable*

$$r\,(a,\, b) = -\, r\,(b,\, a) \tag{1,4}$$

r est une *grandeur observable* parce que l'incertitude à laquelle la paire est soumise peut être constatée. Si le point représentatif est localisé dans un contour de surface $2\,\pi\, r$, l'état du système est déterminé d'une manière optimale. Un tel état est en général trouvé si l'on fait une observation $a = a'$ sur une variable a avec la précision maximale ($\Delta a = 0$). Le contour qui détermine l'état a maintenant dégénéré en un rectangle composé de deux droites de signes

opposés, parallèles à l'axe b, qui coïncident et qui coupent l'axe à l'endroit $a = a'$.

L'aire d'incertitude ΔF et ΔG qui limite la connaissance de deux fonctions $F(a, b)$ et $G(a, b)$ est représentée par l'aire $2\pi r(F,G)$ qui correspond à la surface (1,3). On peut considérer F et G comme des coordonnées obliques ou curvilignes dans le plan a, b. L'aire $2\pi r(F, G)$ s'exprime alors par la déterminante fonctionnelle

$$\{F, G\}_{a,b} = \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial G}{\partial b} - \frac{\partial G}{\partial a}\frac{\partial F}{\partial b} \tag{1,5}$$

si F et G sont des fonctions linéaires, soit

$$r(F, G) = \{F, G\}_{a,b}\, r(a, b) \tag{1,6}$$

(1,6) est aussi valable pour des fonctions générales, si les valeurs de F et de G sont grandes par rapport à ΔF et ΔG. De même, les lois

$$\begin{aligned} &r(r(F, G), H) + r(r(G, H), F) + r(r(H, F), G) = 0 \\ &r(FG, H) = Fr(G, H) + Gr(F, H) \end{aligned} \tag{1,6a}$$

tiennent dans ces cas.

Un principe qui limite la *précision $\Delta\delta$ de l'angle δ entre le rayon vecteur et l'axe a* est obtenu de la manière suivante:

« Le point représentatif doit être situé à l'intérieur d'un contour fixe $C^f(a, b) = 0$.»

Tout contour d'incertitude $C(a, b)$ se trouve alors entièrement à l'intérieur de $C^f = 0$. Il remplit ainsi un domaine fini $\Delta\delta$ de l'angle polaire pour autant que $r \neq 0$.

Nous imposons à notre plan la condition d'étre *isotrope*. Le contour C^f est alors un cercle de rayon R:

$$a^2 + b^2 \leqslant R^2;\ C^f = a^2 + b^2 - R^2 = 0 \tag{1,7}$$

La condition $\Delta\delta = 2\pi$ est remplie si $2\pi\,|\,r\,| = \pi R^2$, parce que, alors, le point représentatif est toujours à l'intérieur du contour C, qui doit être *identique* au contour fixe C^f. *La valeur moyenne $\bar{a}$ de a est toujours nulle.* Admettons que deux observations de a fournissent les deux valeurs a' et a''. Si $a' \neq a''$, la différence $a' - a''$ permet de distinguer entre deux états différents du système. Or une constatation pareille serait contradictoire à la proposition que le système ne connait qu'un seul état, celui qui est défini par la coïncidence des contours C^f et C. *Donc toute observation de a fournit le résultat $a = a' = a'' = 0$.*

Nous passons maintenant à la restriction moins forte: $\Delta\delta = \pi$. Elle demande que la surface $2\pi\,|\,r\,| = \frac{1}{2}\pi R^2$ ne remplisse que la

moitié du cercle (1,7). Un état qui contient un optimum de notre connaissance sur a est représenté par un contour C formé par l'axe b et le demi-cercle droit ou gauche de (1,7). Les moyennes sont dans ces deux états

$$\begin{aligned} \overline{a} &= a_+ = \sqrt{h} \\ \overline{a} &= a_- = -\sqrt{h} \end{aligned} \tag{1,8}$$

où $\sqrt{h}$ est une constante. Une observation de a est définie par l'opération qui nous fournit un optimum de notre connaissance sur a. Elle détermine un état. Comme deux états (décrits par deux contours ayant la même surface $2\pi r$) qui représentent les deux une connaissance optimale avec un $a > 0$ ne peuvent ainsi pas exister, *il faut que toute observation de a donne, ou le résultat* a_+ ou a_-. Nous exprimons ce fait, qui est valable aussi pour b, par la loi:

$$a^2 = b^2 = h \tag{1,9}$$

h est ainsi une *constante physique du système* (déterminée par la restriction (1,7)).

C'est à ce moment que nous nous heurtons à une contradiction: L'état décrit, où a vaut a_+ implique $\Delta a = 0$. Mais, vu (1,7), l'incertitude en b vaut $\Delta b = 2\,R$ (où $= 2\,a_+$) = fini. Pour éviter cette contradiction, nous étudions *la nature de la troisième variable* $c = r\,(a, b)$. Dans notre problème, elle ne peut prendre que les valeurs ($c_+ > 0$ est une constante).

$$c = c_+ \text{ ou } c = c_- = -\,c_+;\; 2\,\pi\,c_+ = \tfrac{1}{2}\,\pi\,R^2 \tag{1,10}$$

Nous introduisons maintenant trois variables normalisées.

$$\alpha = \frac{a}{a_+}, \quad \beta = \frac{b}{b_+}, \quad \gamma = \frac{c}{c_+} \tag{1,11}$$

qui, toutes les trois, ont la propriété que n'importe quelle observation fournit le résultat

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1 \tag{1,11a}$$

Elles sont reliées par

$$r\,(\alpha, \beta) = \varepsilon\gamma; \quad (\Delta\alpha)^2\,(\Delta\beta)^2 = (2\,\pi\,\varepsilon)^2; \quad \varepsilon = \frac{c_+}{h} \tag{1,12}$$

La valeur moyenne $\overline{\gamma}$ de γ est nulle si ou $\alpha = \pm 1$ ou $\beta = \pm 1$ sont connues. De même, si γ est connu ($\gamma = \pm 1$), ni l'une ni l'autre des variables α et β ne peuvent être déterminées. Ceci implique une relation du genre

$$r\,(\beta, \gamma) = \varepsilon\alpha \tag{1,13}$$

*

Elle exprime que la connaissance de α implique une incertitude en β et en γ. Le facteur ε semble d'abord être arbitraire. Mais les valeurs observables de α, β et γ étant de *même nature* (1,11), aussi l'incertitude entre β et γ doit avoir la même grandeur

$$(\Delta\beta)^2 (\Delta\gamma)^2 \geqslant (2\pi\varepsilon)^2$$

Ceci nous permet de trouver une représentation non contradictoire du problème, si l'on introduit *à la place du plan un espace à trois dimensions* α, β, γ. Le point représentatif doit alors être situé:

1⁰ sur un disque circulaire, de rayon $\varrho = \sqrt{2}$ (avec un contour ayant un sens de rotation fixe),

2⁰ à l'intérieur d'une sphère de rayon $\varrho' = \sqrt{3}$.

3⁰ le contour du disque touche toujours la surface de la sphère.

Ces trois conditions montrent que toute mesure de α est représentée par un état, ou le disque est normal à l'axe α. Il coupe alors cet axe à l'endroit $\alpha = \pm 1$. Le rayon (au carré) de la sphère étant alors $\varrho'^2 = \alpha^2 + \varrho^2 = 3$, q. é. d. Les moyennes de γ et β sont $\overline{\gamma^2} = \overline{\beta^2} = 1$. Donc (1,11a) est satisfait. L'aire d'incertitude $2\pi\varepsilon\gamma$ est observée, si le produit des incertitudes en α et β prend sa valeur maximale, c.-à-d. si le disque est dans la position normale à l'axe γ. La projection dans le plan α, β est alors égale à la surface du disque, soit $2\pi\varepsilon\gamma = \pi\varrho^2\gamma = 2\pi\gamma$. *Le facteur* ε *est ainsi déterminé à* $\varepsilon = 1$.

Le sens de rotation est arbitraire. S'il est choisi de telle manière que le disque situé à $\gamma = +1$ projette un contour parcouru dans le sens positif dans le plan α, β, on obtient les relations cycliques suivantes:

$$\begin{aligned} &r(a, b) = c;\ r(b, c) = ha;\ r(c, a) = hb \\ &a^2 = b^2 = h;\ c^2 = c^2_+ = h^2 \end{aligned} \tag{1,14}$$

L'isotropie de notre système permet d'introduire d'autres axes a^0 et b^0 reliés aux axes a, b par:

$$\begin{aligned} a &= a^0 \cos\chi - b^0 \sin\chi \\ b &= a^0 \sin\chi + b^0 \cos\chi \end{aligned} \tag{1,14a}$$

L'analyse de ces nouvelles grandeurs physiques a^0 et b^0 doit fournir le même résultat que celle faite pour a et b, indépendants de la valeur de χ. La loi (1,9) ne résulte, pour a^0 et b^0, que si

$$ab = 0 \tag{1,14b}$$

c.-à-d. si *toute observation du produit* ab *fournit le résultat nul.* Ce résultat (1,14b) est d'ailleurs obtenu directement si l'on fait l'analyse géométrique dans l'espace $\alpha\beta\gamma$.

Un système plus compliqué est décrit par les variables a_1, b_1, a_2, b_2 .... a_n, b_n qu'on peut représenter dans *un espace à* $2n$ *dimensions*. L'analyse faite ci-dessus est d'abord valable individuellement dans tous les *plans de projection* $a_i\, b_i$ (resp. *espaces* $a_i\, b_i\, c_i$) de l'espace multidimensionnel. Si l'espace multidimensionnel est isotrope vis-à-vis d'une *rotation simultanée* dans les plans $a_1\, a_2$ et $b_1\, b_2$, les conditions

$$\begin{aligned} &a_1^2 = b_1^2 = a_2^2 = \ldots = h;\ a_1\, a_2 = b_1\, b_2 = a_1\, b_2 = \ldots = 0; \\ &r\,(a_1, b_1) = r\,(a_1, a_2) = \ldots = h \end{aligned} \tag{1,15}$$

doivent être ajoutées à (1,9) et (1,14b).

La surface d'incertitude limitant $\Delta F\,.\,\Delta G$ sera maintenant la projection d'un élément de surface (à composantes $r\,(a_i, b_k)$, $r\,(a_i, a_k)$ et $r\,(b_i, b_k)$) dans les plans F, G, si l'on a introduit $F = F\,(a_1, \ldots)$, $G = \,,\, H = \,,\, \ldots.$ comme des coordonnées curvilignes dans l'espace du système. Cette projection est donnée par

$$r\,(F, G) = \tfrac{1}{4} \sum_a \sum_b \sum_i \sum_k \{F, G\}_{a_i b_k}\, r\,(a_i, b_k) \tag{1,16}$$

La sommation doit être effectuée sur toute paire de variables décrite par les indices i, k, a, b ($i, k = 1,2 \ldots n$; a et b chacun $= a, b$). Finalement, on peut se demander ce qu'est le produit des incertitudes $\Delta r\,(a_i, b_i)\, \Delta a_k$. Un état est concevable où $r\,(a_i, b_i)$ est déterminé dans le plan $a_i\, b_i$ laissant a_i et b_i eux-mêmes complètement indéterminés. Alors a_k peut être déterminé en même temps dans les deux plans $a_i a_k$ et $b_i a_k$ pour autant que l'indice k n'est pas identique à i. Si ceci est le cas, le problème dégénère en (1,13). En général, on a donc la *relation de* Pauli (nous substituons a_k pour b_i, et a_l pour a_k)

$$r\,(r(a_i, a_k), a_l) = h\,(\delta_{il} a_k - \delta_{kl} a_i) \tag{1,17}$$

La normale du disque a le même signe dans les deux espaces de projection $a_i, a_k, r(a_i, a_k)$ et $a_i, a_l, r\,(a_i, a_l)$.

Nous appelons ces relations les *relations de* Pauli, parce que les trois matrices $\sigma_1 = k \times 1$, $\sigma_2 = l \times 1$, $\sigma_3 = i \times i$ et $j = 1 \times i$ satisfont à la relation cyclique*)

$$j\,(\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1) = -\,\sigma_3;\ \sigma_1^2 = \sigma^2_2 = \sigma^2_3 = -\,j^2 = 1 \tag{1,18}$$

et parce qu'il existe un *calcul opératoriel* qui se base sur (1,18) et qui exprime le principe ($\sigma_1 = \alpha$, $\sigma_2 = \beta$, $\sigma_3 = \gamma$ cf. (1,11))

$$(\Delta\alpha)^2\,(\Delta\beta)^2 \geqslant (2\,\pi\gamma)^2 \tag{1,19}$$

si $+\sqrt{(\Delta\alpha)^2}$ est la *fluctuation* de α.

*) Pour les définitions des matrices i, k et l voir éq. (2,4b).

§ 2. Le champ de Majorana.**)

Certaines observations faites sur les *rayons cathodiques* (observations dont l'analyse est assez complexe) montrent qu'une onde cathodique de longueur d'onde $\lambda = 2\pi \mid \vec{k} \mid^{-1}$ est capable de *deux polarisations* ($\sigma = 1,2$). Elles se distinguent l'une de l'autre par une *propriété vectorielle, le spin.* Pour des paquets d'ondes ayant une vitesse $\vec{v} = c\,\vec{k}\,(\varkappa^2 + |\vec{k}|^2)^{-\frac{1}{2}} < c$ ($\varkappa^{-1}$ est une *longueur fondamentale* caractéristique de ces ondes cathodiques), une *théorie à amplitude vectorielle* fournit toujours *trois polarisations.* Pour expliquer ces deux polarisations, on a dû concevoir des *ondes à amplitude spinorielle* (de 1er ordre).

Des spineurs qui se transforment suivant (0,2) sont des grandeurs à quatre composantes ($A = 1,3,5,7$), qui se transforment suivant*):

$$u_A = (\delta_A{}^{B'} \cos\chi + (j\sigma_{ik})_A{}^{B'} \sin\chi)\, u_{B'} \equiv (e^{j\sigma_{ik}\chi})_A{}^{B'} u_{B'} \qquad (2,1)$$

si l'« *appareil* » effectue une *rotation* autour de l'angle $\vartheta = 2\chi$ dans le *plan* $x_i\, x_k$, et qui changent leurs valeurs d'après

$$u_A = (\delta_A{}^{B'} \cosh\chi' + (\gamma_i)_A{}^{B'} \sinh\chi')\, u_{B'} \equiv (e^{\gamma_i \chi'})_A{}^{B'} u_{B'} \qquad (2,2)$$

si l'« *appareil* » a été *mis en mouvement* avec une vitesse $v = c\,\mathrm{tgh}\,2\chi'$ dans la direction de l'axe x_i. $(j\sigma_{ik})_A{}^{B'}$ et $(\gamma_i)_A{}^{B'}$ et d'autres grandeurs sont des *coefficients constants* à plusieurs indices ($i,k = 1$ à 3, A, $B' = 1,3,5,7$), qu'on exprime sous forme de *matrices de quatres lignes* en A, B'. D'un *spineur de 2ème ordre* U_{AB}, qui se transforme comme un produit $u_A^+\, u_B$ de deux spineurs, on peut former un *scalaire*, un *vecteur*, etc. d'espace temps $x = (x^\mu)$ ($\mu = 1\ldots4$; $i = 1,2,3$; $x^i = x_i$; $x^4 = -x_4 = ct$*)) à l'aide de ces coefficients constants. En particulier, il existe des coefficients $j\beta$, $\vec{\alpha}$ et 1 tels que

$$J = (j\beta)^{AB} U_{AB}; \qquad J^i = \alpha^{iAB} U_{AB}; \qquad \varrho = J^4 = \delta^{AB}\, U_{AB} \qquad (2,3)$$

Pour que (2,1) et (2,2) forment une représentation (bivoque) du groupe de Lorentz, il faut que 1° ces matrices $\alpha_i = \alpha^i = (\alpha^i{}_A{}^{B'})$ existent, 2° que leurs produits $\alpha_i\alpha_k = ((\alpha_i\alpha_k)_A{}^{B'}) = (\alpha_{iA}{}^C\, \alpha_{kC}{}^{B'})$ satisfassent à

$$\begin{aligned} &\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\,\delta_{ik}\,1; \quad \alpha_4 = -\alpha^4 = -1 \\ &\alpha_i(j\beta) + (j\beta)\,\alpha_i = 0; \quad -(j\beta)\,(j\beta) = -(j\beta)^2 = 1 \end{aligned} \qquad (2,4)$$

*) Dans les considérations suivantes, nous poserons la vitesse $c = 1$ et $t = x^4$ En plus, on pose $u^A = u_A$; $\alpha^{\mu AB} = \alpha^\mu{}_A{}^B$. Un indice μ, i, A, B, paraissent deux fois de suite sous forme co- et contravariante (p. ex. $u_A^+ u^A$) implique la sommation sur toutes les valeurs de cet indice (p. ex. $A = 1,3,5,7$). δ^{AB} est la *matrice d'unité.* δ_{ik} le *tenseur fondamental* ou *tenseur d'unité.*

) Le champ spinoriel à quatre composantes réelles a été envisagé pour la première fois par E. Majorana, Nuov. Cim. **14, 4 (1937).

et 3° qu'elles soient reliées aux matrices $j\sigma_{ik}$ et γ_i en (2,1) et (2,2) par $(j\sigma)_{ik} = \alpha_i \alpha_k$; $\gamma_i = (j\beta)\,\alpha_i$; $(j\sigma_{ik})^2 = -\gamma_i^2 = -1$ (2,4a).

Les matrices $j\sigma_{ik}{}^{AB} = -j\sigma_{ik}{}^{BA}$ et $j\beta^{AB} = -j\beta^{BA}$ sont *antisymétrique* en A et B, tandis que $\alpha_i{}^{AB} = \alpha_i{}^{BA}$ et $\gamma_i{}^{AB}$ des matrices *symétriques*[1]). $1 = (\delta^{AB})$ est la matrice unité. Une représentation particulière de ces matrices à quatre lignes peut être obtenue sous forme de produits directs entre les quatre matrices à deux lignes

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad l = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$kl = -lk = -i; \quad li = -il = +k; \quad ik = -ki = l$$

$$\alpha_1 = k \times 1; \quad \alpha_2 = l \times 1; \quad \alpha_3 = i \times i; \quad j\beta = i \times l \tag{2,4b}$$

$$1 \times k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}; \quad i \times l = \begin{pmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{pmatrix}; \quad -i \times 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette représentation fournit en (2,1) la transformation (0,2) si $\chi = \vartheta/2$ et si $j\sigma_{ik} = j\sigma_{12} = -(i \times 1)$ (cf. (2,4b)).

Suivant l'exposé du § 1, l'impossibilité d'observer une rotation $\vartheta = 2\chi = 2\pi$ de l'appareil suit de la théorie, si les observations du champ $u\,(v)_A$ sont soumises dans chaque plan AB à la condition (1,15), soit à

$$u\,(v)_A\, u\,(v)_B = \delta_{AB}\, h v^{-1} \tag{2,5}$$

hv^{-1} est une grandeur scalaire par rapport aux rotations spatiales. Elle ne peut dépendre que du volume v, dans lequel les moyennes sont formées, si l'espace est homogène. Pour que la loi (2,5) soit covariante, une fonction spinorielle symétrique de 2ème ordre $D^{(+)}(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau)_{AB}$ doit exister dépendant des deux événements $x = (\vec{x}, x^4 = t)$ et $y = (\vec{y}, y^4 = \tau)$ telle que (2,5) soit une conséquence de:

$$u\,(\vec{x}, t)_A u(\vec{y}, \tau)_B = h D^{(+)}(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau)_{AB} = -h D^{(+)}(\vec{y} - \vec{x}, \tau - t)_{BA} \tag{2,7}$$

Dans le cas d'un espace-temps homogène et isotrope, elle ne peut dépendre que de la distance invariante $R^2 = |\vec{x} - \vec{y}|^2 - (t - \tau)^2$. Elle peut être représentée par des fonctions différentes dans les *différentes régions de l'univers* (*le présent* ($R^2 > 0$), *le futur* ($R^2 < 0$, $\tau > t$) et *le passé* ($R^2 < 0$, $\tau < t$) de l'évènement x).

Après ce bref exposé du calcul spinoriel, nous continuons *l'analyse des ondes cathodiques*. La *vitesse de groupe* d'un *paquet d'ondes* a le rapport voulu avec la *longueur d'onde*, si la relation covariante ($\omega = k^4 = -k_4$)

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\varkappa^2 + |\vec{k}|^2} > 0; \; k_\mu k^\mu = -\varkappa^2 \tag{2,8}$$

existe entre la fréquence $\omega_{\vec{k}}$ et le vecteur d'onde $\vec{k}$. Ceci est le cas si u_A est une somme de termes $u_{\vec{k}\,\sigma}(\vec{x}, t)_A$ du type des *ondes planes:*

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}\,\sigma}(\vec{x}, t)_A &= V^{-\frac{1}{2}}\{p^0_{\vec{k}\,\sigma}(\sigma_A \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t) + \tau_A \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)) \\ &\quad + q^0_{\vec{k}\,\sigma}(-\tau_A \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t) + \sigma_A \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)) \qquad (2{,}9a) \\ &\equiv p^0_{\vec{k}\,\sigma} S(\vec{k}, \sigma, p/x)_A + q^0_{\vec{k}\,\sigma} S(\vec{k}, \sigma, q/x)_A \end{aligned}$$

La forme alternative avec des coefficients, fonctions de t, $p(t)$ et $q(t)$ est quelquefois plus appropriée:

$$u_{\vec{k}\,\sigma}(\vec{x}, t) = p_{\vec{k}\,\sigma}(t)\, S(\vec{k}, \sigma, p/\vec{x})_A + q_{\vec{k}\,\sigma}(t)\, S(\vec{k}, \sigma, q/\vec{x})_A \qquad (2{,}9b)$$

Ces coefficients sont reliés aux p^0 et q^0 par *la rotation dans le plan* pq

$$\begin{aligned} p(t) &= p^0 \cos \omega t - q^0 \sin \omega t \\ q(t) &= p^0 \sin \omega t + q^0 \cos \omega t \end{aligned} \qquad (2{,}10)$$

Chaque composante u_A de la fonction spinorielle est, en vertu de (2,8), solution de *l'équation covariante de* DE BROGLIE

$$(\Delta - \varkappa^2)\, u = -\partial_t^2\, u \qquad (2{,}11)^{*)}$$

Les α^μ_{AB} ($\alpha^4_{AB} = \delta_{AB}$) se transforment comme un *quadrivecteur* a^μ et *un spineur de 2ème ordre* U_{AB} (leurs valeurs numériques restent ainsi invariants $\alpha^{111} = \alpha^{1'1'1'}$, $\alpha^{112} = \ldots$). *L'équation de* MAJORANA

$$Q_A{}^B u_B \equiv ((-\vec{\alpha}, \mathrm{grad}) - j\beta)_A{}^B u_B = \partial_t u_A \qquad (2{,}12)$$

est, pour cette raison, *covariante* (la relation algébrique (2,4) fait de (2,11) une conséquence de (2,12)). La *double fonction* $D^{(+)}(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau)_{AB}$ doit être une solution symmétrique de (2,11). On peut démontrer que

$$D^{(1+)}(\vec{x}, t)_{AB} = ((\vec{\alpha}, \mathrm{grad}) + 1\,\partial_t + j\beta)_{AB}\, D^{(0-)}(\vec{x}, t) \qquad (2{,}13)$$

est (à une constante numérique près) la *seule solution spinorielle symétrique* de (2,12) si $D^{(0-)}(\vec{x}, t)$ est *la seule solution scalaire antisymétrique* de (2,11). Elle a été introduite par HEISENBERG et PAULI (au cas $\varkappa = 0$) et a été discutée par l'auteur d'autre part[4]). Elle répond, pour $t = 0$, aux propriétés suivantes:

$$D^{(0-)}(\vec{x}, 0) = 0;\ \mathrm{grad}\, D^{(0-)}(\vec{x}, 0) = 0;\ \partial_t D^{(0-)}(\vec{x}, 0) = \delta(\vec{x}) \qquad (2{,}14)$$

Son analyse de FOURIER est la somme

$$D^{(-0)}(\vec{x}, t) = -V^{-1} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}^{-1} \sin(k\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t) \qquad (2{,}15)$$

---

*) Le symbole Δ en (2,11) etc. étant *l'opérateur laplacien* dans l'espace $\vec{x}$ n'est pas à confondre avec le *symbole de l'incertitude.*

La sommation est à effectuer sur tout $\vec{k}$ périodique en V. La fonction

$$u_A = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma} u_{\vec{k}\sigma A} \tag{2,16}$$

avec (2,9a) est l'expression générale de la solution de (2,12) que nous appellerons le *champ de* MAJORANA. De (2,7), la fonction (2,15) résulte, si l'on considère les $p_{\vec{k}}$ et $q_{\vec{k}}$ comme un *système de variables physiques* a_i et b_i ayant les propriétés (1,14). Les amplitudes spinorielles σ_A et τ_A sont normalisées

$$\sigma_A \tau^A = 0; \; \sigma_A \sigma^A = \tau_A \tau^A = 1 \tag{2,17*)}$$

On remarque qu'en effet il n'existe que *deux solutions linéairement indépendantes du type* (2,9a). Elles représentent *deux ondes* qui se propagent *en direction* de $+\vec{k}$. On ne cherche que les solutions de (2,10) avec $\omega_{\vec{k}} > 0$**) et on se rappelle que les solutions $u_{\vec{k}\sigma A}$ et $\partial_t u_{\vec{k}\sigma A}$ ne doivent pas être considérées comme linéairement indépendantes vu le fait que (2,9a) contient les deux constantes p^0 et q^0.

Il importe peu, si l'on impose les conditions (1,14) aux fonctions $p_{\vec{k}}(t)$.... ou aux constantes $p_{\vec{k}\sigma}$, vu l'invariance de la condition (1,9) et (1,11) par rapport aux rotations (1,11a) qui relient ici, sous forme de (2,10), $p(t)$ aux p^0.

De (2,7) et de (2,14), suit (2,5) dans la forme:

$$u(v')_A \, u(v'')_B = \delta_{AB} \frac{v'''}{v' \, v''} h \tag{2,20}$$

pour les *valeurs moyennes* de u_A dans le *volume* v' et de u_B dans le *volume* v''. v''' est le *volume commun* à v' et v''. Toute observation de $u(v)_A$ fournit donc une des deux valeurs $\pm\sqrt{v^{-1}h}$. Elle interdit la connaissance de toute *autre composante* $u(v)_B$ $(B \neq A)$ au *même endroit* et de tout $u(v')_B$ $(B =$, ou $\neq A)$ à d'autres endroits $v' \neq v)$. L'analyse faite dans le plan a, b au § 1 s'applique à tout plan A, B et rend *impossible l'observation de l'angle* χ *(restriction* 1^0 *de l'introduction).*

---

*) Pour la démonstration, on utilise la relation $(\omega_{\vec{k}} > 0)$

$$\sum_{\sigma=1,2} \sigma_A \sigma_B = \sum_{\sigma} \tau_A \tau_B = (\vec{k}\vec{\alpha}_{AB} + \omega_{\vec{k}} \, \delta_{AB}) \, \omega_{\vec{k}}^{-1} \tag{2,18}$$

qui résulte de la sommation Σ sur $\sigma = 1,2$ des deux solutions linéairement indépendantes (et orthonormales) de

$$(\vec{k}\vec{\alpha})_A{}^B \begin{pmatrix} +\sigma_B \\ -\tau_B \end{pmatrix} + \varkappa (j\beta)_A{}^B \begin{pmatrix} \tau_B \\ \sigma_B \end{pmatrix} = \omega_{\vec{k}} \begin{pmatrix} \sigma_A \\ -\tau_A \end{pmatrix} \tag{2,19}$$

**) La condition $\omega_{\vec{k}} > 0$ pour la racine de (2,8) est nécessaire pour que l'onde se propage en direction $+\vec{k}$.

Pour que la théorie ait un sens physique, il faut que des grandeurs scalaires et vectorielles W, ϱ et $\vec{T}$, $\vec{J}$ (se transformant comme les composantes $W = T^{44}$, $T^i = T^{4i}$ d'un tenseur $T^{\mu\nu}$ resp. d'un vecteur $\varrho = J^4$, $J^i = J_i$) existent, qui satisfont à la loi covariante:

$$\partial_t W + \operatorname{div} \vec{T} = 0; \qquad \partial_t \varrho + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \tag{2,21}$$

et qui peuvent être interprétées comme la *densité d'énergie* et la *densité de charge électrique* transportée par le *rayonnement cathodique.* Si $U(x, y)_{AB}$ en (2,3) satisfait à l'équation d'onde (2,12) par rapport à (xA) et à (yB), les $\varrho(\vec{x}, t)$ et $\vec{J}(\vec{x}, t)$ formés en (2,3) avec $U(x, x)_{AB} = U(\vec{x}, t; \vec{x}, t)_{AB}$ ont la propriété (2,21). Il en est de même pour les

$$T^{44} = W = \lim_{t=\tau} \partial_\tau U(\vec{x}, t; \vec{x}, \tau)_A{}^A; \quad \vec{T} = \lim_{t=\tau} \vec{\alpha}^{AB} \partial_\tau U(\vec{x}, t; \vec{x}, \tau)_{AB} \tag{2,22}$$

Ne sont admissibles que des *théories ou il n'existe aucun effet qui ne soit en rapport avec la cause primordiale.* Or, toute *double fonction* U_{AB} *symétrique* en xA et yB admet des *effets* sous forme des *observables* ϱ, $\vec{J}$ et $\vec{T} \neq 0$, tandis que, par intégration partielle, on constate que *l'énergie totale* H*) (que nous devons considérer comme cette *cause primordiale*) est *identiquement nulle.*

Nous devons donc considérer la *double fonction antisymétrique* la plus générale. Elle peut être mise dans la forme

$$\begin{aligned} U(x, y)_{AB} &= \sum_{\vec{k}\,\sigma\,a} \sum_{k'\,\sigma'\,a'} g^0_{\vec{k}\,\sigma a,\, k'\,\sigma'\,a'}\, S(\vec{k}, \sigma, a/x)_A\, S(\vec{k}', \sigma,' a'/y)_B \\ &= \sum \sum g_{\vec{k}\ldots, \vec{k}'\ldots}(t, \tau)\, S(\vec{k}, \sigma, a/\vec{x})_A\, S(\vec{k}', \sigma', a'/y)_B \\ &= U(\vec{x}, t; \vec{y}, \tau)_{AB} \end{aligned} \tag{2,23}$$

où l'indice $\vec{k}$ dénombre *tous les vecteurs d'ondes* $\vec{k}$, l'indice σ les *deux polarisations* ($\sigma = 1,2$) possibles d'une onde $\vec{k}$ et ou a parcourt les *deux symboles* $a = p, q$, qui distinguent les *deux solutions* (2,9a) associées à tout $\vec{k}\sigma$. $g_{\ldots p, \ldots}(t, \tau)$ et $g_{\ldots q, \ldots}(t, \tau)$ sont des *doubles fonctions* antisymétriques en t et τ, qui satisfont aux mêmes équations différentielles ($\dot{f} = \partial_t f$) par rapport à t (à $\tau =$ const.), comme les paires de fonctions

$$\dot{p}_{\vec{k}\,\sigma} = -\,\omega_{\vec{k}}\, q_{\vec{k}\,\sigma}; \qquad \dot{q}_{\vec{k}\,\sigma} = \omega_{\vec{k}}\, p_{\vec{k}\,\sigma} \tag{2,24}$$

$g^0 \ldots$ sont les valeurs initiales ($t = \tau = 0$) de $g \ldots (t \ldots, \tau)$

La *troisième variable* $r\,(a(t), b(\tau))$ associée à la paire $a(t)$, $b(\tau)$**)

*) $H(t) = \int_V (dx^3)\, W(\vec{x}, t)$.

**) a et b parcourent $a = p, q$.

satisfait aux *mêmes équations* $\partial_t r = \ldots$; $\partial_\tau r = \ldots$ que les variables $a(t)$ et $b(\tau)$ elles-mêmes. Posant ainsi pour $g^0_{\ldots,\ldots}$ les *constantes*

$$g^0_{\vec{k}\sigma a, \vec{k}'\sigma' b} = \tfrac{1}{2} r\,(a^0_{\vec{k}\sigma}, b^0_{\vec{k}'\sigma'}) + \tfrac{1}{2}\,|\,r_+\,|\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,\delta_{\sigma\sigma'}\,i_{ab} \qquad (2{,}25)$$

et pour $g_{\ldots,\ldots}(t,\tau)$ les *doubles fonctions* en t et τ (résultant de (2,24), si l'on prend la valeur initiale (2,25)), *l'énergie totale* H et la *quantité de mouvement totale* $\vec{P}$ prennent les formes

$$H = \int (dx)^3\, W = \tfrac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma} \omega_{\vec{k}}\,(r\,(p_{\vec{k}\sigma}, q_{\vec{k}\sigma}) + |\,r_+\,|) = \sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma} h\,\omega_{\vec{k}}\,N_{\vec{k}\sigma}$$

$$\vec{P} = \int (dx)^3\,\vec{T} = \ldots = \sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma} h\vec{k}\,N_{\vec{k}\sigma}; \qquad N_{\vec{k}\sigma} = 0{,}1 \qquad (2{,}26)$$

Résumant cet exposé, on arrive à la conclusion suivante: *L'observation que certains rayons* (à vitesse $< c$) *ont une polarisation vectorielle qui ne peut prendre que deux valeurs, nous a amené à introduire un champ spinoriel de 1er ordre. Pour qu'une rotation autour de* 2π *d'un appareil destiné à observer ce champ ne puisse pas être constatée, l'énergie par onde plane et périodique doit être un multiple entier* (0 ou 1) *de* $h\,\omega_{\vec{k}}$; h *est une constante caractéristique de ce champ. La quantité de mouvement est le même multiple de* $h\vec{k}$. Le rayonnement a ainsi une *nature corpusculaire* et peut être considéré comme formé de *particules* ou de *quanta* dont l'*énergie* H est reliée à la quantité de mouvement $\vec{P}$ par la relation de la mécanique du point de *masse* $h\varkappa$.

$$H = +\sqrt{(h\varkappa)^2 + |\,\vec{P}\,|^2} = h\varkappa + \tfrac{1}{2}(h\varkappa)^{-1}\,|\,\vec{P}\,|^2 + \ldots \qquad (2{,}27)$$

Ces particules satisfont au *principe d'exclusion de* Pauli, c.-à-d. qu'elles suivent *la statistique de* Fermi-Dirac (FD).

Remarquons qu'on peut écrire (2,25) sous la forme

$$U(x,y)_{AB} = \tfrac{1}{2} r\,(u(x)_A,\ u(y)_B) + \tfrac{1}{2} r\,(u^{(BE)}(x)_A, u^{(BE)}(y)_B) \qquad (2{,}28)$$

où r est la *troisième observable* formée des grandeurs $u(x)_A$ et $u(y)_B$ suivant le procédé de § 1. Le 2ème terme est défini par

$$\begin{aligned} r\,(u^{(BE)}(x)_A,\ u^{(BE)}(y)_B) &\equiv h\,D^{(1-)}\,(x,y)_{AB} \\ &= h\,((\vec{\alpha}, \mathrm{grad}) + 1\,\partial_t + j\beta)_{AB}\,D^{(1+)}\,(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) \end{aligned} \qquad (2{,}29)$$

Il est une *deuxième solution fondamentale spinorielle mais antisymétrique*. Elle a été introduite par Dirac. La *fonction scalaire symétrique* $D^{(1+)}$, solution de l'éq. de de Broglie, est l'analogue de $D^{(0-)}$ (2,15):

$$D^{(1+)}\,(\vec{x}, t) = V^{-1}\sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}^{-1} \cos\,(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}}\,t) \qquad (2{,}30)^{4)}$$

Elle a les propriétés suivantes:

$$\lim_{|\vec{x}|^2-t^2=0} D^{(1+)}(\vec{x},t) = (|\vec{x}|^2 - t^2)^{-1}$$
$$\partial_i D^{(1+)}(x,0) = \partial_t D^{(1+)}(\vec{x},0) = 0 \tag{2,31}$$

$$\int_v (dx)^3 \partial_\mu \partial_\nu D^{(1+)}(\vec{x},0) = \infty \qquad \int_{v \gg \varkappa^{-3}} (dx)^3 \varkappa D^{(1+)}(\vec{x},0) \simeq 1 \tag{2,32}$$

La fonction $D^{(1+)}$ décroit fortement (prop. à $e^{-\varkappa R}$) pour $R^2 \gg \varkappa^{-2}$. En vertu de (2,32), on a donc le droit d'écrire

$$\lim_{\varkappa^{-1}=0} \varkappa D^{(1+)}(\vec{x},0) = \delta(\vec{x}) \tag{2,33}$$

Sa singularité sur le cône de lumière est déterminée par (2,31) (1ère éq.). L'application de (1,17) est intéressante entre les observables $U_{AB} = r(u_A, u_B) + \ldots$ et u_C. Le développement de Fourier (2,28) et (2,25) pour U_{AB} et (2,9) pour u_c, donne le résultat

$$r(U(x,y)_{AB}, u(z)_C) = \frac{h}{2} D^{(0+)}(z-x)_{CA}\, u(y)_B - D^{(0+)}(y-z)_{BC}\, u(x)_A) \tag{2,34}$$

Ainsi, au temps $t = \tau$, la valeur de $u(\vec{x})_A$ peut être connue simultanément avec toute valeur $\varrho(\vec{y})$ sauf pour $\vec{x} = \vec{y}$. Or, a fortiori, *$\varrho(\vec{x})$ peut, à un temps t donné, être connu simultanément dans tout l'espace.*

§ 3. Le champ de de Broglie.

La double fonction $U(x,y)_{AB}$ en (2,28), dont dérivent W et $\vec{T}$, étant *antisymétrique* en xA et yB, l'application (2,3) montre que $\varrho = \vec{J} = 0$ parce que $\alpha^{\mu AB}$ est *symétrique*. Par contre, la *matrice antisymétrique* $(j\beta)^{AB}$ permet de définir une *densité scalaire* J (2,3). Notre champ de Majorana u_A $(A = 1,3,5,7)$ se montre donc insuffisant pour décrire une réaction sur un *champ Maxwellien* $(\vec{E}, \vec{B})$, mais apte à influencer un *champ scalaire* φ. Cette réaction est contenue dans l'*équation inhomogène de* de Broglie (= *équation de* Yukawa *neutre*)

$$(\Delta - \mu^2 - \partial_t^2)\, \varphi(\vec{x},t) = -\varepsilon' J(\vec{x},t) \tag{3,1}$$

Nous lui donnons une *forme causale* (analogue à celle de l'équation de Majorana) en introduisant *deux composantes* φ_a $(a = 1,3)$ $\varphi_1 = \varphi^1 \equiv \varphi$; $\varphi_3 = \varphi^3 \equiv \mu^{-1} \partial_t \varphi$. μ^{-1} est une *nouvelle longueur fondamentale caractéristique du champ de* de Broglie. L'évolution

temporelle de $\varphi_a(\vec{x},t)$ est alors donnée en termes de $\varphi_a(\vec{x},0)$ et de $J_a(\vec{x},0)$ $(J_1 = J;\ J_3 = 0)$ par

$$\partial_t \varphi_a = R_a{}^b \varphi_b + \mu^{-1} \varepsilon' i_a{}^b J_b$$
$$R_a{}^b = - i_a{}^b \mu + \frac{1}{2\mu} (i + l)_a{}^b \Delta \text{ *)} \tag{3,2}$$

La densité d'énergie $(W = T^{44};\ \vec{T} = (T_i);\ T_i = T^i = T^{4i})$ est (en termes de φ)

$$T_{\mu\nu} = - (\partial_\mu \varphi)(\partial_\nu \varphi) + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} ((\partial_\alpha \varphi)(\partial^\alpha \varphi) + \mu^2 \varphi\varphi) \tag{3,3}$$

En vertu de (3,1), sa divergence vaut

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}_{(\Psi)} = \varepsilon' J \partial^\mu \varphi \tag{3,4}$$

L'influence qu'exerce ce champ φ sur le *mouvement des paquets d'ondes de* MAJORANA U_{AB} doit s'exprimer dans l'équation de l'évolution en t de cette double fonction (cf. (2,12) pour l'opération $Q_A{}^B$):

$$\partial_t u_A = Q_A{}^B u_B + \varepsilon' (j\beta)_A{}^B \varphi u_B \tag{3,5}$$

Il en résulte

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}_{(U)} = - \varepsilon' J \partial^\mu \varphi \tag{3,6}$$

(3,4) et (3,6) montrent que la théorie satisfait au *principe de conservation d'énergie.* On s'intéresse surtout à *l'évolution des aires d'incertitudes* $r(\varphi_a(\vec{x},t),\ u_A(\vec{x}',t)) \equiv r(\varphi_a, u'_A)$, $r(u_A, u'_B)$ et $r(\varphi_a, \varphi_b')$. La première de celles-ci est donnée par (3,1) et (3,5), soit par

$$\begin{aligned}\partial_t r(\varphi_a, u'_A) &= R_a{}^b r(\varphi_b, u'_A) + Q'_A{}^B r(\varphi_a, u'_B) \\ &+ \varepsilon' \eta_A^{cB} \varphi_c' r(\varphi_a, u'_B) + \varepsilon' \eta_A^{cB} u'_B r(\varphi_a, \varphi_c') \\ &+ \varepsilon' i_a{}^b \varepsilon' \mu^{-1} r(J_b, u'_A)\end{aligned} \tag{3,7}$$

Ici, on a remplacé $(j\beta)_A{}^B \varphi'$ par le symbole $\eta_A^{cB} \varphi_B'$ avec $\eta_A^{1B} = (j\beta)_A{}^B$ et $\eta_A^{3B} = 0$.

Nous essayons *l'hypothèse suivante: Les valeurs d'une composante* $\varphi(\vec{x},t)_a = \varphi_a$ *et d'une composante* $u(\vec{x}',t)_A = u'_A$ *au même temps t peuvent être connues simultanément:*

$$r(\varphi_a, u'_A) = 0 \tag{3,8}$$

Cette hypothèse réduit à zéro le 1er membre et les trois premiers termes du 2ème membre en (3,7). Les deux termes qui restent sont alors liés par

$$r(\varphi_a, \varphi_c') \eta_A^{cB} u_B' = - h \mu^{-1} \delta(\vec{x} - \vec{x}') i_a{}^c \eta_{cA}{}^B u_B \tag{3,9}$$ **)

---

*) i, k et l sont les *matrices a deux lignes* $i_a{}^b = i_{ab}$ de (2,4b) avec $a, b = 1, 3$.

**) Le dernier membre a été transformé suivant (2,28) et (1,17) soit:

$$\eta^{bCD} r(\tfrac{1}{2} r(u_C, u_D),\ u'_A) = h \eta^{bAC} u_C \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Le deuxième membre de cette relation a déjà été *transformé par l'application de* (2,3) *et* (2,34). Le résultat (3,9) est *une identité en* u_A, *si l'aire* $r(\varphi_a, \varphi_b')$ *vaut*

$$r(\varphi_a, \varphi_b') = -h\,\mu^{-1}\, i_{ab}\, \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{3,10}$$

Ecrit en termes de φ et de $\partial_t \varphi$ ces aires sont

$$\begin{aligned} r(\varphi(\vec{x},t), \varphi(\vec{y},t)) &= 0 \\ r(\varphi(\vec{x},t), \partial_t \varphi(\vec{y},t)) &= h\,\delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \tag{3,10a}$$

Les relations (3,10a) sont *indépendantes de la constante de couplage* ε'. Elles doivent ainsi être valides, même pour un *champ de* DE BROGLIE, *qui satisfait à l'équation homogène* (2,11), (3,10a) et (2,14), déterminent l'évolution temporelle sous forme covariante:

$$r(\varphi(\vec{x},t), \varphi(\vec{y},\tau)) = h\, D^{(0-)}(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) \tag{3,11}$$

où $D^{(0-)}$ est la *fonction fondamentale antisymétrique* (2,15). L'analyse de FOURIER du champ φ peut être exprimée par

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x},t)_{\vec{k}} &= (V\omega_{\vec{k}})^{-\frac{1}{2}} (p^0_{\vec{k}} \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t) + q^0_{\vec{k}} \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)) \\ &= (2\,\omega_{\vec{k}})^{-\frac{1}{2}} (p^0_{\vec{k}}\, S(\vec{k}, p \mid x) + q^0_{\vec{k}}\, S(\vec{k}, q \mid x)) \\ \varphi(\vec{x}, t) &= \sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}} \end{aligned} \tag{3,12}$$

Elle amène au résultat désiré (3,11) si

$$\begin{aligned} r(p_{\vec{k}}, q_{\vec{k}'}) &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, h \\ r(p_{\vec{k}}, p_{\vec{k}'}) &= r(q_{\vec{k}}, q_{\vec{k}'}) = 0 \end{aligned} \tag{3,13}$$

On démontre (3,11) en appliquant (1,6). Le point représentatif dans l'espace multidimensionnel $p_{\vec{k}}$, $q_{\vec{k}'}$ ne peut jamais être localisé dans un plan $p_{\vec{k}}\, q_{\vec{k}}$ que à l'intérieur d'une surface d'incertitude

$$2\pi\, r(p_{\vec{k}}, q_{\vec{k}}) = 2\pi h \tag{3,14}$$

Les aires ont ainsi la surface $2\pi h$ et leur contour C est parcouru dans le sens positif. Introduisant le rayon $R^2_{\vec{k}} = p^2_{\vec{k}} + q^2_{\vec{k}}$ et l'angle $\delta_{\vec{k}}$ entre le rayon vecteur et l'axe $p_{\vec{k}}$, l'aire (3,14) d'incertitude vaut:

$$2\pi\, r(\tfrac{1}{2} R^2_{\vec{k}}, \delta_{\vec{k}}) = 2\pi h \tag{3,15}$$

Elle équivaut à une relation d'incertitude

$$\tfrac{1}{2}\, \Delta\, \delta_{\vec{k}}\, \Delta\, R^2_{\vec{k}} \geqslant 2\pi h \tag{3,16}$$

On arrive à la détermination optimale de $R^2_{\vec{k}}$, si l'on renonce à toute connaissance de l'angle $\delta_{\vec{k}}$. $\Delta\, \delta_{\vec{k}}$ prend alors sa valeur maximale 2π.

*) $\delta_{\vec{k}\vec{k}'} = 0$ ou $= 1$ suivant que $\vec{k} \neq \vec{k}'$ ou $\vec{k} = \vec{k}'$.

Le point représentatif d'un tel état est situé à l'intérieur d'un *anneau*, construit de *deux cercles concentriques*, dont la *différence du* (carré du) *rayon* vaut

$$\Delta R^2_{\vec{k}} = 2h \tag{3,17}$$

L'état à rayon minimal est celui où la *valeur moyenne* vaut

$$R^2_{\vec{k}} = h \tag{3,18}$$

Sa surface représentative est le *cercle* de rayon $\sqrt{2h}$. Les états consécutifs sont des *anneaux*, dans lesquels la valeur moyenne vaut:

$$R^2_{\vec{k}\,N_k} = 2h\,(N_{\vec{k}} + \tfrac{1}{2})\,; \quad N_{\vec{k}} = 0,1,2\ldots\infty \tag{3,19}$$

Nous nous heurtons ici à la même contradiction qu'en § 1. Il faut que toute observation de R^2 donne une des valeurs de (3,19). Ainsi, toute observation de R^2 nous fournit la *certitude* que $R^2_{\vec{k}}$ vaut $R^2_{N\vec{k}}$ ($\Delta R^2_{\vec{k}} = 0$), tandis que $\Delta\delta_{\vec{k}} = 2\pi$ reste *fini*. Ceci est en *contradiction avec* (3,16). Nous ne voulons pas trancher ici la manière par laquelle le calcul vectoriel crée une représentation géométrique analogue à celle donnée au § 1, et qui évite cette difficulté*).

Pour définir la densité d'énergie nous remarquons que toute *double fonction symétrique* $\Psi(x,y) = \Psi(\vec{x},t;\,\vec{y},\tau)$ permet de définir un tenseur $T_{\mu\nu(\Psi)}$ apte à décrire la densité d'énergie par la dérivation

$$T_{\mu\nu(\Psi)} = \lim_{x=x'} (-\partial_\mu \partial_\nu' + g_{\mu\nu}(\partial_\alpha \partial'^\alpha + \mu^2))\,\Psi(x,x') \tag{3,20}$$

si analoguement à $U(\vec{x},t;\vec{y},\tau)$ on définit une *double fonction:*

$$\Psi(\vec{x},t;\vec{y},\tau) = \varphi(\vec{x},t)\,\varphi(y,\tau) - \varphi^{(FD)}(\vec{x},t)\,\varphi^{(FD)}(\vec{y},\tau) \tag{3,21}$$

Le 1er terme de (3,21) satisfait évidemment à (3,1). Si le second terme est une double fonction $\varphi^{(FD)}(x)\,\varphi^{(FD)}(y)$, *solution symétrique de l'équation homogène* ((3,1) avec $\varepsilon' = 0$), la loi de conservation (3,6) résulte quand même. Le développement de (3,21) est

$$\Psi(\vec{x},t;\vec{y},\tau) = \sum_{\vec{k}a}\sum_{\vec{k}'a'} (\omega_{\vec{k}}\,\omega_{\vec{k}'})^{-\frac{1}{2}}\, g(t,\tau)_{\vec{k}a,\vec{k}'a'}\, S(\vec{k}a/\vec{x})\, S(\vec{k}'a'/\vec{x}') \tag{3,22}$$ **)

Il est analogue à (2,23) si l'on exprime g par:

$$g_{\vec{k}a,\vec{k}'a'} = \tfrac{1}{2}\,a(t)_{\vec{k}}\,a'(\tau)_{\vec{k}'} - \tfrac{1}{4}\,h\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,\delta_{aa'} \tag{3,23}$$

---

*) La démonstration la plus simple est fourni par le *calcul opératoriel.*

**) La sommation sur a et a' implique que les deux symboles parcourent chacun les valeurs p et q.

L'énergie totale vaut (si $\varepsilon' = 0$) (cf. (3,19))

$$H_{(\Psi)} = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} (\tfrac{1}{2}\, \omega_{\vec{k}} (p_{\vec{k}}^2 + q_{\vec{k}}^2) - \tfrac{1}{2}\, h\, \omega_{\vec{k}}) = \sum_{\vec{k}} h\, \omega_{\vec{k}}\, N_{\vec{k}} \qquad (3,24)$$

Nous sommes ainsi arrivés à la conclusion suivante:

Un *champ scalaire* φ *de* DE BROGLIE, qui exerce une influence sur le *champ spinoriel* u_A, doit satisfaire à un principe d'incertitude (3,11), qui a pour conséquence que son énergie totale $H_{(\Psi)}$ est composée par l'énergie des ondes périodiques sous forme de *quanta d'énergie* $h\, \omega_{\vec{k}}$. h est la constante introduite pour le *champ de* MAJORANA. *S'il existe plusieurs champs* φ *qui agissent tous sur plusieurs champs* u_A, *la constante* h *a toujours la même valeur.* h *est ainsi une constante universelle, la constante de* PLANCK. h entre ainsi en parallèle avec *la vitesse constante* c (de la lumière). La différence entre φ et u_A se manifeste en ce que les quanta de φ doivent être considérés comme des particules suivant la statistique de BOSE-EINSTEIN (BE). Celle-ci résulte du *principe de* HEISENBERG (3,13) de la même manière que la statistique de FD était la conséquence du *principe de* PAULI (1,14).

Nous ajoutons ici une remarque utile pour toute application:

Le deuxième terme de $\Psi(x, y)$ en (3,21), (3,23) et dans le troisième membre de (3,24) provient de

$$\varphi^{(FD)}(\vec{x}, t)\, \varphi^{(FD)}(\vec{y}, \tau) = \tfrac{1}{2}\, h\, D^{(1+)}(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) \qquad (3,25)$$

On peut, formellement, le considérer comme formé par un *deuxième champ scalaire* $\varphi^{(FD)}(\vec{x}, t)$, solution de l'équation homogène, mais avec des coefficients $p_{\vec{k}}^0$ et $q_{\vec{k}}^0$, qui remplissent les *relations de* PAULI (1,14) *de la statistique* FD.

De même, le deuxième terme de la double fonction U_{AB} en (2,28) du *champ de* MAJORANA peut, formellement, être interprétée comme l'aire d'incertitude d'un deuxième champ $u_A^{(BE)}$ solution de la même équation comme u_A, mais avec des coefficients $p_{\vec{k}\sigma}^0$ et $q_{\vec{k}\sigma}^0$ qui remplissent *les relations de* HEISENBERG (3,14) *de la statistique* BE.

§ 4. Le champ de Dirac.

Pour décrire une influence du champ u_A sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$, il faut pouvoir définir des *matrices antisymétriques* aptes à former ϱ et $\vec{J}$. On peut considérer

$$(j\vec{\alpha}) \equiv i \times \vec{\alpha}; \quad j \equiv i \times 1 \qquad (4,1)$$

comme de telles matrices, formées par *produits directs* entre la matrice i (à deux lignes) et les $\vec{\alpha}$, 1 (à quatre lignes) (2,4b). (4,1)

sont ainsi des *matrices à huit lignes.* j a les coefficients nuls, sauf $j_{12} = -j_{21} = j_{34} = -j_{43} =$ etc. $= -1$. De même, $j\vec{\alpha}_{AB}$ vaut $(j\vec{\alpha})_{12} = -(j\vec{\alpha})_{21} = \vec{\alpha}_{11} = \vec{\alpha}_{22}$, etc.

A la place de $1\,\partial_t$ et $(\vec{\alpha}, \text{grad})$, on introduit les matrices D_t et $(\vec{\alpha}, D)$ définies par

$$\begin{aligned} D_{tA}{}^{B} &= \delta_A{}^B\,\partial_t + j_A{}^B\,\varepsilon\Phi\,(\vec{x},t) \\ D_A{}^B &= \delta_A{}^B\,\text{grad} - j_A{}^B\,\varepsilon\,A\,(\vec{x},t) \end{aligned} \qquad (4{,}2)^{*)}$$

dans l'équation de MAJORANA, qui devient alors *l'équation de* DIRAC ($\partial_t u_A \to D_t u_A$; grad $u_A = \vec{D} u_A$) (2,12). u_A a maintenant 8 composantes $A = 1,2,3\ldots 8$ au lieu de $A = 1,3,5,7$. Le quadrivecteur

$$\varrho = J^4 = j^{AB}\,U_{AB}; \qquad \vec{J} = (j\,\vec{\alpha})^{AB}\,U_{AB} \qquad (4{,}3)$$

satisfait à l'équation de continuité, tandis que le tenseur $T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{(U)}$ (défini par (2,22) avec D^{AB}_{τ} à la place de $\partial_\tau\,\delta^{AB}$) possède la divergence

$$\partial_t\,W_{(U)} + \text{div}\,\vec{T}_{(U)} = \varepsilon\vec{E}\,\vec{J} \neq 0 \qquad (4{,}4)$$

$\vec{E}$ est relié aux Φ et $\vec{A}$ par (0,5). La définition habituelle de l'énergie électromagnétique satisfait au théorème de POYNTING

$$\partial_t\,W_{(\max)} + \text{div}\,\vec{T}_{(\max)} = -\,\varepsilon\vec{E}\vec{J}\,, \qquad (4{,}5)^{**)}$$

si le champ de MAXWELL $\vec{B} = (B_{ik})$ et $\vec{E} = (B_{i4})$ forment un *tenseur antisymétrique* $B_{\mu\nu}$ d'espace temps solution de

$$\text{div}\,\vec{E} = \varepsilon\varrho; \quad \text{rot}\,\vec{B} - \partial_t\vec{E} = -\,\varepsilon J \qquad (4{,}5\text{a})$$

Une analyse (analogue à celle faite pour le *champ de* DE BROGLIE) montre que l'*énergie et l'impulsion portées par toute onde plane et périodique du champ de* MAXWELL doit être quantifiée suivant la statistique *BE*. $H_{(\max)}$ et $\vec{P}_{(\max)}$ ont ainsi la forme (2,26) avec $N_{\vec{k}\,\sigma} = 0,1,2\ldots\infty$.

Nous remarquons qu'à une substitution (0,3) correspond la transformation

$$u\,(x)_A = (e^{-j\,\chi(x)})_A{}^{B'}\,u\,(x)_{B'} \qquad (4{,}7)$$

Elle représente une rotation dans chacun des plans 12, 34, 56 et 78, qui sont les plans complexes de (0,4).

---

*) La *constante* ε, qui dépend du *choix du système d'unités du champ électromagnétique*, n'est pas à confondre avec le ε $(= 1)$ introduit dans la discussion qui suit (1,12) au § 1.

**) $W_{\max}$ est à corriger par un terme analogue à (3,21) et suiv. enlevant la zéropoint énergie.

En l'absence d'un champ électromagnétique, la solution $u_{\vec{k}}$ de Dirac peut être écrite comme la combination de *deux champs de* Majorana (2,9a), A tout $\vec{k}$ appartiennent maintenant *quatre polarisations indépendantes.* Soient $\sigma_A^{(1)}$ et $\tau_A^{(1)}$ des spineurs, c.-à-d. *deux solutions* de l'équation (2,9a) pour un *premier champ de* Majorana (avec des *composantes nulles* pour $A = 2,4,6$ et 8), soient $\sigma_A^{(2)}$ et $\tau_A^{(2)}$ les spineurs d'une *solution d'un second champ de* Majorana avec les composantes $\sigma_A^{(2)} = j_A{}^B \tau_B^{(1)}$ et $\tau_A^{(2)} = - j_A{}^B \sigma_B^{(1)}$ pour $A = 2,4,6$ et 8 (et avec des *composantes nulles* pour $A = 1,3,5$ et 7). Alors on peut considérer, à la place de la solution de (2,9a) avec les deux constantes $p^0_{\vec{k}\,\sigma 1}$ et $q^0_{\vec{k}\,\sigma 1}$ une *solution de* Dirac où $-\tau_A^{(1)}$ et $\sigma_A^{(1)}$ au *deuxième terme* de (2,9a) sont remplacés par $\tau_A^{(2)} = j\sigma_A^{(1)}$ et $\sigma_A^{(2)} = j\tau_A^{(1)}$. Nous appelons les coefficients de cette onde $p^0_{\vec{k}\,\sigma +}$ et $q^0_{\vec{k}\,\sigma +}$. *Linéairement indépendante de cette solution* est celle où l'on pose au *premier terme* $-\tau_A^{(1)}$ et $\sigma_A^{(1)}$ (pour σ_A et τ_A (en 2,9a)) tandis que le *second* s'écrit par $\sigma_A^{(2)} = -j\tau_A^{(1)}$ et $\tau_A^{(2)} = -j\sigma_A^{(1)}$. On a ainsi transformé

$$\begin{aligned} p^0_{\vec{k}\,\sigma 1} &= q^0_{\vec{k}\,\sigma +}\,; \qquad & q^0_{\vec{k}\,\sigma 2} &= q^0_{\vec{k}\,\sigma -} \\ q^0_{\vec{k}\,\sigma 1} &= p^0_{\vec{k}\,\sigma -}\,; \qquad & p^0_{\vec{k}\,\sigma 2} &= q^0_{\vec{k}\,\sigma -} \end{aligned} \tag{4,8}$$

Cette *substitution* laisse *invariantes les considérations du* §1. Ce *champ de* Dirac satisfait ainsi à (2,7) comme le faisait le *champ de* Majorana) avec $A, B = 1$ à 8. Elle permet d'écrire les *solutions particulières* dans la forme

$$u_{\vec{k}\,\sigma \pm} = V^{-\frac{1}{2}} \left((p^0_{\vec{k}\,\sigma \pm}\, 1 \pm q^0_{\vec{k}\,\sigma \pm}\, j)\, e^{j(\vec{k}\vec{x} \pm \omega_{\vec{k}} t)} \right)_A{}^B \sigma_B \tag{4,9*}$$

La *charge électrique totale* vaut ($\lambda = +, -$)

$$e_{(U)} = \varepsilon \int (dx)^3\, \varrho_{(U)} = \sum_{\vec{k}\,\sigma\,\lambda} e_{\vec{k}\,\sigma\,\lambda} = \sum_{\vec{k}\,\sigma} \varepsilon h (N_{\vec{k}\,\sigma +} - N_{\vec{k}\,\sigma -}) \tag{4,10}$$

Une onde $u_{\vec{k}\,\sigma\,\lambda}$ à «polarisation» $\lambda = +, -$ porte $N_{\vec{k}\,\sigma\,\lambda}$ (= 0 ou 1) quanta qui contribuent à la charge $\pm N_{k\,\sigma \pm}\, e$ avec

$$e = \varepsilon h \tag{4,11}$$

La charge électrique est ainsi quantifiée en ce que l'on n'observera, par onde, que des *multiples entiers* (0 et 1) de $\pm e$. La charge *positive ou négative* est contribuée par les ondes particulières (4,9) à *fréquence positive* ($+\omega_{\vec{k}} > 0$) ou négative ($-\omega_{\vec{k}} < 0$) dans l'exposant complexe de (4,9).

---

*) $(e^f)_A{}^B = \frac{1}{0!}\,\delta_A{}^B + \frac{1}{1!}\, f_A{}^B + \frac{1}{2!}\, f_A{}^C f_C{}^B + \ldots$ $(e^{j\varphi})_A{}^B = \delta_A{}^B \cos\varphi + j_A{}^B \sin\varphi$.

§ 5. Le champ de Schroedinger-Yukawa.

On peut faire agir sur le *champ de* DIRAC le *champ de* DE BROGLIE de la même manière qu'en § 3. Mais il existe encore une autre possibilité: Celle-ci est représentée en introduisant *en plus du champ de* DIRAC, qui représente des quanta chargés à spin $^1/_2$, un deuxième champ portant des quanta neutres (non chargés) de spin $^1/_2$ soit un *champ de* MAJORANA. Ceci demande une augmentation du nombre des composantes de 8 à 12. Elle permet d'introduire des matrices antisymétriques à 12 lignes $\lambda\alpha^\mu$. Soient

$$\lambda\vec{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\alpha} & 0 \\ \vec{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda\alpha^4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \qquad (5,1)^{*)}$$

les matrices qui définissent le *courant électrique* $(A, B = 1,2,.,11,12)$:

$$\vec{J}_{(U)} = (\lambda\vec{\alpha})^{AB}\, U_{AB}\,; \qquad \varrho = J^4 = (\lambda\alpha^4)^{AB}\, U_{AB} \qquad (5,2)$$

qui est ainsi porté par les 8 premières composantes du champ u_A. En D_t et $\vec{D}$ la matrice λ est substitué à j. Les deux matrices η^a

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & j\beta \\ 0 & 0 & j\beta \\ j\beta & j\beta & 0 \end{pmatrix}; \quad \eta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -j\beta \\ 0 & 0 & j\beta \\ -j\beta & j\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad (5,3)$$

sont aussi *antisymétriques* et permettent de définir deux *densités scalaires* $(a = 1,2)$ ($j\beta$ est la matrice à 4 lignes du § 1).

$$J^a = \eta^{aAB}\, U_{AB}; \quad \lambda\eta^a - \eta^a\lambda = i^{ab}\,\eta_b \qquad (5,4)$$

A leur tour, ils peuvent être utilisés pour influencer *deux champs de* DE BROGLIE φ^1 et φ^2 par l'action décrite en (3,1) *(éq. de Yukawa avec des charges)*. Les lois de la commutation entre les matrices λ et η^a (5,4) montrent que

$$\partial_t\, \varrho_{(U)} + \operatorname{div} \vec{J}_{(U)} = \varepsilon'\,(\varphi^1(-J^2) + \varphi^2 J^1) = \varepsilon'\, i^{ab}\,\varphi_a\, J_b \quad (5,5)^{**)}$$

D'autre part, les grandeurs

$$\begin{aligned} J_{(\Psi)} &= \varphi^1(\operatorname{grad}\varphi^2) - \varphi^2(\operatorname{grad}\varphi^1) = -\lim_{\vec{x}=\vec{y}} \operatorname{grad}_{\vec{y}}\, i^{ab}\,\Psi(\vec{x},\vec{y})_{ab} \\ \varrho_{(\Psi)} &= -\varphi^1\,\partial_t\,\varphi^2 + \varphi^2\,\partial_t\,\varphi^1 = \lim_{t=\tau} \partial_\tau\, i^{ab}\,\Psi(\vec{x}, t; \vec{y}\,\tau)_{ab} \end{aligned} \qquad (5,6)$$

satisfont à

$$\partial_t\, \varrho_{(\Psi)} + \operatorname{div} \vec{J}_{(\Psi)} = \varepsilon'\,(\varphi^1 J^2 - \varphi^2 J^1) = -\varepsilon'\, i^{ab}\,\varphi_a\, J_b \qquad (5,7)$$

---

*) $\vec{\alpha}$ et $j\beta$ sont, à partir de maintenant, des matrices à 12 lignes, soit

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}; \quad j\beta \equiv \begin{pmatrix} j\beta & 0 & 0 \\ 0 & j\beta & 0 \\ 0 & 0 & j\beta \end{pmatrix}; \quad \alpha^4 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**) Dans les considérations qui suivent on a posé $\vec{A} = \Phi = 0$.

si les φ_a satisfont à (3,1) muni d'une indice $a = 1,2$. *La densité* $\varrho = \varrho_{(U)} + \varrho_{(\Psi)}$ *est ainsi conservée.* De même, l'énergie $W = W_{(U)} + W_{(\Psi)}$ satisfait à (2,21).

La *transformation de jauge du champ* u_A garde sa forme (4,7) avec λ à la place de j.

Substituée en (5,4), elle produira une rotation dans le plan $a, b = 1,2$.

$$J_a = (e^{-i\varkappa})_a{}^{b'} J_{b'} \tag{5,9}$$

Ceci est en parfait accord avec l'action du champ de MAXWELL $\vec{E}$, $\vec{B}$, sur φ_a, si celle-ci est représentée par la substitution des opérations $D_{ta}{}^b \varphi_b$ et $\vec{D}_a{}^b \varphi_b$ à la place de $\partial_t \varphi_a$ et grad φ_a en (3,1) et (5,6)*). Le champ φ_a subit ainsi la même rotation (5,9) que J_a*).

Le terme $T^{\mu\nu}_{(\Psi)} = T^{\mu\nu}_{(\Psi_1)} + T^{\mu\nu}_{(\Psi_2)}$ définissant $W_{(\Psi)}$, peut être formé par contraction d'une double fonction $\Psi(x,y)_{ab}$, qui est la fonction (3,21), les φ étant munis d'un indice a (φ_a et φ_b). La densité de charge (5,6) doit être formée de la même manière (cf. deuxième identité en (5,6)).

Nous passons maintenant à l'*aire d'incertitude* $r(\varphi(\vec{x},t)_a, \varphi(\vec{x}',t)_b)$. Pour ceci, nous transcrivons l'équation pour φ_a en (3,2) où *l'indice a parcourt dès maintenant les valeurs a = 1 à 4:*

$$\varphi_1 = \varphi_1;\ \varphi_2 = \varphi_2;\ \varphi_3 = \mu^{-1}\partial_t \varphi_1;\ \varphi_4 = \mu^{-1}\partial_t \varphi_2;$$
$$J_1 = J_1;\ J_2 = J_2;\ J_3 = J_4 = 0$$

Une équation analogue à (3,7) est ainsi obtenue pour l'évolution des aires, la seule différence étant que l'indice $a, b, \ldots$ parcourt les valeurs de 1 à 4 avec $\eta^3 = \eta^4 = 0$. i et j sont les deux matrices à 4 lignes

$$i = 1 \times i;\ j = i \times 1 \tag{5,10}$$ **)

qui relient φ_1 à φ_3, φ_2 à φ_4 (i) et φ_1 à φ_2, φ_3 à φ_4 (j).

Avant de discuter (3,8) et (3,9), nous calculons l'aire d'incertitude entre $\Psi_{ab} = \varphi_a \varphi_b - \ldots$ et φ_c' qui résultent de (3,8) et (3,9). Des grandeurs ainsi obtenues, nous formons, en utilisant (1,6a):

$$r(\Psi_{ab}, \varphi_c')\, J'^c = -h\, \mu^{-1} (\varphi_a'\, i_{bc} + \varphi_b'\, i_{ac})\, \delta(\vec{x} - \vec{x}')\, \eta^{cAB} U(\vec{x}, \vec{x}')_{AB} \tag{5,11}$$

On peut s'en servir pour déterminer la fonction $\tau(\vec{x} - \vec{x}')_{ab}$ intervenant en

$$r(\varphi_a, \varphi_b') = -\tau(\vec{x} - \vec{x}')_{ab}. \tag{5,12}$$

La définition de Ψ_{ab} a pour conséquence

$$r(\Psi_{ab}, \varphi_c') = -\varphi_a\, \tau(\vec{x} - \vec{x}')_{bc} + \varphi_b\, \tau(\vec{x} - \vec{x}')_{ac} \tag{5,13}$$

*) $D_{ta}{}^b = \delta_t\, \delta_a{}^b + i_a{}^b\, \varepsilon\, \Phi(\vec{x},t)$; $\vec{D}_a{}^b = \text{grad}\, \delta_a{}^b - i_a{}^b \varepsilon \vec{A}(\vec{x},t)$.

**) en $D_{ta}{}^b$ et $\vec{D}_a{}^b$ de la note *) i est à et remplacer par j.

La définition $J^c = \eta^{cAB}\, U\,(\vec{x}, \vec{x})_{AB}$ montre que la *seule manière de satisfaire* (5,11) *identiquement* en J^c est de poser

$$\tau\,(\vec{x} - \vec{x}')_{ab} = h\,\mu^{-1}\, i_{ab}\, \delta\,(\vec{x} - \vec{x}') \tag{5,14}$$

Ceci réduit (5,12) à (3,10). Les deux champs φ_1 et φ_2 satisfont ainsi, chacun séparément, à (3,10a) ou (3,11), que nous exprimons dans la forme analogue à (2,7)

$$r\,(\varphi\,(\vec{x}, t)_a,\ \varphi\,(\vec{y}, \tau)_b) = D^{(-)}\,(\vec{x} - \vec{y},\ t - \tau)_{ab} \tag{5,14a}$$

en termes de (2,15) avec l'indice $a, b = 1, 2$:

$$D^{(-)}\,(\vec{x}, t)_{ab} = -\,D^{(-)}\,(-\,\vec{x},\ -\,t)_{ba} = \delta_{ab}\, D^{(0-)}\,(\vec{x}, t) \tag{5,14b}$$

Cette théorie quantifiée du champ de SCHROEDINGER a été proposée par PAULI et WEISSKOPF[5]). Remarquons, que les composantes u_9 à u_{12} du champ de DIRAC-MAJORANA u_A impliquent la *théorie du neutrino,* c.-à-d. leurs quanta (à quantité de mouvement $h\vec{k}$) ont les propriétés du § 2: Il n'est donc pas nécessaire de concevoir un « *antineutrino* ». Par conséquent, l'*angle* $\chi\,(t)$ entre le *rayon vecteur* φ_1, φ_2 et l'axe φ_1 dans le plan 1,2 peut être *déterminé aussi exactement que désiré,* aucune limite n'étant imposée à $\varphi^2{}_1 + \varphi^2{}_2$. Le même est vrai pour le rayon vecteur $\partial_t\, \varphi_1$, $\partial_t\, \varphi_2$. Ceci permet de déterminer simultanément $\chi\,(t + dt)$. *Ce résultat est en contradiction avec la 2ème restriction* (éq. (0,7)) *de l'introduction.*

Pour y remédier, nous proposons de *renoncer à l'hypothèse* (3,8) et de la remplacer par *l'hypothèse moins forte.*

$$\lim_{v', v'' \gg \mu^{-3}} r\,(m^{ab}\, \Psi\,(v')_{ab},\ \lambda^{AB}\, U\,(v'')_{AB}) = 0 \tag{5,14*}$$

m_{ab} étant une matrice quelconque à 4 lignes ($a, b = 1, 2, 3, 4$). En multipliant (3,7) avec φ_b et u'^A et en le symmétrisent en trouve la conséquence qu'à la place de (3,9), on doit demander que, (pour les expressions moyennes) l'aire $r\,(.., ..)$ satisfasse à

$$\lim_{v', v'' \gg \mu^{-3}} r\,(\Psi\,(v')_{ab},\ \varphi\,(v'')_c\, J\,(v'')^c) = -\,h\,\mu^{-1}\,(\varphi\,(v')_a\, i_b{}^c + \varphi\,(v')_b\, i_a{}^c)\, \frac{v'''}{v'\,v''}\, J\,(v'')_c \tag{5,15*}$$

D'autre part, il résulte de (5,12)

$$\lim_{v', v'' \gg \mu^{-3}} r\,(\Psi\,(v')_{ab},\ \varphi\,(v'')_c) = -\,(\varphi\,(v')_a\, m_{bc} + \varphi\,(v')_b\, m_{ac})\, \frac{v'''}{v'\,v''} \tag{5,16*}$$

si la fonction τ a la propriété

$$\lim_{v \gg \mu^{-1}} \int_v (dx)^3\, \tau\,(\vec{x})_{ab} = m_{ab} \int_v (dx)^3\, \delta\,(\vec{x}) = m_{ab} \tag{5,17*}$$

*) $f(v)$ est *la moyenne* d'une fonction $f(x)$ définie par (0,9). v''' est défini en (2,20) comme étant le *volume commun* à v' et v''.

Le champ $\varphi(v)_a$ ne contient que *les basses fréquences* $|\vec{k}| \ll \mu$. En vertu de (3,2) dans l'approximation $\varepsilon' = 0$, cette partie de φ_a est solution de

$$\partial_t \varphi(v)_a \cong -\mu\, i_a{}^b \varphi(v)_b = \mu\, \varphi(v)^b\, i_b{}^a \tag{5,18}$$

On peut le décomposer en *deux groupes* $\varphi(v)_{a\pm}$ qui satisfont respectivement à

$$\partial_t \varphi(v)_{a\pm} \cong \mp \mu\, j_a{}^b \varphi(v)_{a\pm}; \qquad \varphi(v)_a = \varphi(v)_{a+} + \varphi(v)_{a-} \tag{5,19}$$

Si $\varepsilon' \neq 0$ le groupe $\varphi(v)_{a+}$ ne sera, essentiellement, influencé que par la partie $J(v)_{a+}$ de $J(v)_a$, qui ne contient que la fréquence $+\omega_{\vec{k}} \cong \mu$. (5,19) est alors satisfait. Nous imposons encore une *autre restriction* à (5,14) et (5,15) en demandant que ces relations ne soient valables que dans la forme

$$r(M)(v'), N(v'')) = P(v') \frac{v'\,''}{v'\,v''} \tag{5,20}$$

où M, N et P sont des *grandeurs invariantes par rapport à des substitutions de jauge.* $N = \varphi_c J^c$ est une telle variable. Ψ_{ab} ne possède cette propriété que si on le multiplie avec une matrice m^{ab} commutant avec j^{ab} et si l'on contracte les indices ($M = m^{ab}\Psi_{ab}$). Le deuxième membre prend alors automatiquement cette forme invariante.

En plus de cette restriction ($v', v'' \gg \mu^{-3}$; $(mj)_a{}^b = (jm)_a{}^b$) il convient de *redéfinir les moyennes* $f(v)$ par

$$f(v) = v^{-1}\, T^{-1} \int_v (dx)^3 \int_{t-\frac{1}{2}T}^{t+\frac{1}{2}T} dt'\, f(\vec{x}, t') \tag{5,21}$$

Cette définition permet la transformation suivante du deuxième membre de (5,15) dès que $T \gg \mu^{-1}$:

$$\begin{aligned} m^{ab} \varphi_{b\pm}\, i_a{}^c J_c(v') &\cong \varphi^a_\pm\, i_a{}^b m_{cb} J^c(v') \\ &\cong +\mu^{-1} (\partial_t \varphi^a_\pm)\, m_{ca} J^c(v') \\ &\cong -\mu^{-1} \varphi^a_\pm\, m_{ca}\, \partial_t J^c(v') \\ &\cong \pm m^{ab} \varphi_{b\pm}\, j_a{}^c J_{c\pm}(v') \\ &\cong \pm m^{ab} \varphi_{b\pm}\, j_a{}^c J_c(v') \end{aligned} \tag{5,22}^{*)}$$

On a d'abord utilisé (1° identité) le fait que la matrice m^{ab} **) commute avec $i_a{}^b$. Ceci est le cas pour $j_a{}^b$, $i_a{}^b$ et $\delta_a{}^b$ qui suffisent à former les moyennes de $\varrho(\Psi)$, $\vec{J}(\Psi)$, $W(\Psi)$ et $\vec{T}(\Psi)$. Ensuite (2ème identité), on a substitué (5,18) et (3ème identité) on a intégré par parties sur t'

*) L'argument (v') signifie, que la *moyenne de toute l'expression* est prise suivant (5,21).

*) m^{ab} doit être symétrique vu la définition de M.

en (5,21). Comme T est grand par rapport à la période μ^{-1}, ce n'est que la partie J_{c+} qui contribue à la moyenne (5,21) si l'on s'occupe de la partie φ_{b+}. On peut donc substituer (4ème identité) l'équation (5,19) à laquelle satisfait cette partie J_{c+}. Finalement (5ème identité), on écrit formellement encore une fois J_c pour J_{c+} afin d'arriver à une *expression très semblable au 1er membre,* $\pm j_a{}^c$ étant substitué pour $i_a{}^c$. Ainsi (5,15) prend la forme

$$\lim_{v', v'', T^3 \gg \mu^{-3}} r(\Psi(v')_{ab}, \varphi_c J^c(v'')) = -h\,\mu^{-1}((\varphi_{a+} - \varphi_{a-})\, j_b{}^c + (\varphi_{b+} - \varphi_{b-})\, j_a{}^c)\, J_c(v') \qquad (5,23)^{*)}$$

La comparaison avec (5,16) montre que l'identification (5,17) et

$$\tau(\vec{x} - \vec{x}')_{ab} = \mp h\,\mu^{-1} j_{ab}\, \bar{\delta}(\vec{x} - \vec{x}') \text{ si } \varphi_{a+} \gtrless \varphi_{a-} \qquad (5,24)$$

(ou $\bar{\delta}(\vec{x})$ est une « fonction $\delta(\vec{x})$ » qui peut s'étendre sur un volume $v \sim \mu^{-3}$) présente une deuxième alternative, différente de (5,14) par la substitution de $\pm j_{ab}$ pour i_{ba}. Il est à remarquer que (5,23) et (5,16) avec la condition $\varphi_{a+} \gg \varphi_{a-}$ ne déterminent $\tau(\vec{x} - \vec{x}')_{ab}$ que pour les composantes $a, b = 1, 2$, parce que $J_3 = J_4 = 0$.

(5,24) *peut être mis sous forme covariante, si l'on identifie* $\bar{\delta}(\vec{x})$ *avec la fonction* $\mu\, D^{(1+)}(\vec{x}, 0)$ ((2,32) et (2,33)). Ceci implique que, dans (5,14a), on doit substituer

$$D^{(-)}(\vec{x}, t)_{ab} = -D^{(-)}(-\vec{x}, -t)_{ab} = \mp j_{ba}\, D^{(1+)}(\vec{x}, t) \qquad (5,25)^{*)}$$

avec la fonction (2,30). Il exprime dans sa forme ($a, b = 1, 2$)

$$r(\varphi(v)_a, \varphi(v)_b) = \mp j_{ab}\, h\, v^{-1}\, \mu^{-1} \qquad (5,26)$$

que l'angle $\chi(t)$ entre l'axe φ_1 et le rayon vecteur φ_1, φ_2 peut être mesuré avec toute la précision voulue ($\Delta\chi(t) \to 0$) pourvu qu'on prenne un champ $\varphi_1{}^2 + \varphi_1{}^2 \gg h\,(v\,\mu)^{-1}$. Mais la singularité (2,31) de $D^{(1+)}$ implique (pour $a, b = 1, 2$):

$$r(\partial_t\, \varphi(v)_a, \partial_t\, \varphi(v)_b) = \mp j_{ab}\, \infty \qquad (5,27)$$

Ceci signifie que le point représentatif du rayon vecteur $\partial_t\, \varphi_1, \partial_t\, \varphi_2$ *ne peut être localisé que dans une bande* $\Delta\, \partial_t\, \varphi_1 =$ *fini,* $\Delta\, \partial_t\, \varphi_2 =$ *infini. L'angle* $\chi(t + dt)$ *ne peut ainsi être connu qu'à* $\Delta\chi(t + dt) = \pi$ *près.*

C'est cette deuxième alternative qui correspond à notre deuxième restriction exprimée en (0,7).

Il faut maintenant discuter le sens physique de la restriction $\varphi_{a+} \gg \varphi_{a-}$: Elle signifie que, au temps t et dans une partie de l'es-

*) Posant partout μ pour $\varkappa$.

pace (celle où $\varphi_{a+} \gg \varphi_{a-}$), on peut connaître séparément pour les deux champs φ_a et u_A, les grandeurs invariantes par rapport aux transformations de jauge (p. ex. $\varrho_{(\Psi)}$ et $\varrho_{(U)}$), pourvu qu'on les comprenne comme des moyennes sur des régions d'espace temps à dimensions linéaires $l_i = l^i$ et $l^4 \gg \mu^{-1}$. Si nous choisissons en (5,25) p. ex. le signe $-$, il existe, en général, des *autres régions*, avec $\varphi_{a+} \lesssim \varphi_{a-}$ dans lesquelles une *connaissance simultanée* de $\varphi_{(\Psi)}$ et de $\varrho_{(U)}$ n'est pas possible. Dans ces régions (5,14a) avec (5,25) (signe $-$) est satisfait mais pas (5,23) et son corollaire (5,14). Les valeurs de (5,14) doivent, en ce cas, être calculées en solvant explicitement (3,7) et les équations correspondantes pour $\partial_t r\,(u_A, u_B')$ et $\partial_t r\,(\varphi_a, \varphi_a')$.

La moyenne (5,21) de la densité de charge $\varepsilon\,\varrho\,(v)$ peut être transformée comme (5,22)

$$\begin{aligned} \varepsilon\,\varrho\,(v)_\Psi &\mathrel{\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \varepsilon\,\mu\, i^a{}_b\, j^{bc}\, \Psi_{a\,c}(v) \\ &\mathrel{\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \varepsilon\,\mu\, i^a{}_b\, j^{bc}\,(\varphi_{a+}\,\varphi_{c+} + \varphi_{a-}\,\varphi_{c-} - (\text{FD-termes})) \\ &\mathrel{\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \varepsilon\,\mu\,(\varphi_{a+}\,\varphi^a{}_+ - \varphi_{a-}\,\varphi^a{}_- - (\text{FD-termes})) \qquad (5,28) \end{aligned}$$

On voit alors que l'amplitude (au carré) de $\varphi_{a+} = \varphi^a{}_+$ représente la *contribution positive* et celle de $\varphi_{a-} = \varphi^a{}_-$ la *contribution négative* à la *densité de charge* $\varepsilon\,\varrho_{(\Psi)}$ *portée par le champ* φ_a. La *restriction* (5,24) signifie donc: *Il est toujours possible de connaître simultanément la distribution de charge et d'énergie séparément pour les contributions des champs* u_A *et* φ_a *dans une région où la contribution de* φ_a *à la charge* $\varepsilon\,\varrho\,(v)$ *est essentiellement limitée à un seul signe.*

Pour compléter la théorie, on doit encore étudier la loi d'incertitude qui résulte de (5,25) (avec un signe choisi) pour un *champ du type* $\overline{\varphi}$ *de* DE BROGLIE du § 3, qui *agit* sur le *champ de* SCHROEDINGER. Le champ considéré φ_1, φ_2 de ce paragraphe (champ de SCHROEDINGER) exerce une action du type (3,1) sur le champ de DE BROGLIE, qu'on étudie en posant $\varepsilon'\,J = \varepsilon'\,\Psi_a{}^a$ comme inhomogénéité ($a, b = 1,2$) en (3,1)*) et en ajoutant un terme $\mu\,\varepsilon'\,\overline{\varphi}$ à μ^2 dans l'équation homogène de SCHROEDINGER pour φ_1, φ_2. L'analyse analogue à (3,7) et suivantes (avec $\overline{\varphi}_{\overline{a}}$ ($\overline{a} = 1,3$) à la place de φ_a et φ_a à la place de u_A) montre alors que le champ de DE BROGLIE $\overline{\varphi}$ satisfait à (3,11) avec un signe déterminé par le signe choisi en (5,25) si, dans une partie d'espace, le champ de SCHROEDINGER satisfait à $\varphi_{a+} \gg \varphi_{a-}$. Dans cette région, le champ $\overline{\varphi}$ de DE BROGLIE et les grandeurs covariantes $\varrho_{(\Psi)}$ du champ φ_1, φ_2 de SCHROEDINGER peuvent être connues simultanément. Dans les régions où la charge

*) Pour $\overline{\varphi}(\vec{x}, t)$.

négative devient importante ($\varphi_{a+} \gtrsim \varphi_{a-}$), une connaissance simultanée n'est plus possible.

Il en est de même pour l'interaction entre le champ de MAXWELL $\vec{E}, \vec{B}$ et celui de SCHROEDINGER $\varrho_\Psi, \vec{J}_\Psi$. La signification physique de ce phénomène a été illustrée dans une note précédente[6]). Nous rappelons que l'analyse de FOURIER de φ_a ($a = 1,2$) peut se faire de façon analogue à la transition des u_A de (2,9a) à u_A en (4,9), si l'on passe de (3,12) à

$$\varphi_a = \varphi_{a+} + \varphi_{a-} = (2\sqrt{\omega_{\vec{k}}})^{-\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\vec{k}} (1\, p^0_{\vec{k}+} - j\, q^0_{\vec{k}+})\, e^{j(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)}$$
$$+ (1\, p^0_{\vec{k}-} + j\, q^0_{\vec{k}-})\, e^{j(\vec{k}\vec{x} + \omega_{\vec{k}} t)}\Big)_a{}^b\, \sigma_b \qquad (5,29)^{*})$$

La loi (5,25) demande que

$$\begin{aligned} r(p^0_{\vec{k}+}, p^0_{\vec{k}'+}) &= -r(p^0_{\vec{k}-}, q^0_{\vec{k}'-}) = \pm h\, \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ r(p^0_{\vec{k}+}, p^0_{\vec{k}'\pm}) &= r(q^0_{\vec{k}+}, q^0_{\vec{k}'\pm}) = 0 \end{aligned} \qquad (5,30)$$

La loi (5,14b), qui contredisait notre 2ème restriction, se distingue en (5,30) par le signe + dans le second membre de la 1ère équation (5,30). Nous voulons (sans preuve) montrer *la différence physique entre notre théorie et la théorie écartée* (*théorie de* PAULI-WEISSKOPF):

Le passage de $p^0_{\vec{k}\pm}$ aux $p^0_{\vec{k}\pm}(t)$ se fait encore une fois à l'aide de (2,10) (avec $\omega_{\vec{k}} > 0$). La théorie (5,14b) que nous avons écartée avait donc l'avantage de relier les variables canoniques $p_{\vec{k}+}$ et $q_{\vec{k}+}$ par *le même signe* pour $p_{\vec{k}+}$ et $p_{\vec{k}-}$. Les relations canoniques ((5,30) (*avec le signe* +!)) étant remplies à un moment $t = 0$, elles le restaient pour *tout temps* $t \neq 0$, même si le champ a été influencé soit par U_{AB}, soit par $\overline{\varphi}$, soit par $\vec{E}, \vec{B}$. Il en est de même pour le terme FD, qu'on soustrait. L'effet de cette différence se montre très important:

L'énergie totale à la forme (3,24) tandis que, pour la charge, on a analoguement au champ de DIRAC (4,10) ($\lambda = +, -$)

$$e_{(\Psi)} = \varepsilon \int (dx)^3\, \varrho_{(\Psi)} = \sum_{\vec{k}\lambda} e_{\vec{k}\lambda} = \sum_{\vec{k}} \varepsilon h\, (N_{\vec{k}+} - N_{\vec{k}-}) \qquad (5,31)$$

les valeurs observables de

$$h\, N_{\vec{k}\lambda}(t) = \tfrac{1}{2}(p^2_{\vec{k}\lambda} + q^2_{\vec{k}\lambda}) - \tfrac{1}{2}\, |\, r(p_{\vec{k}\lambda}, q_{\vec{k}\lambda})\, | \qquad (5,32)$$

étant des multiples de h. En général, c'est-à-dire si une influence $\vec{E}, \vec{B}$ est exercée sur φ_a, $\frac{1}{2}(p^2_{\vec{k}\lambda} + q^2_{\vec{k}\lambda})(t)$ est *fonction de t*. Dans la

*) Les σ_b sont normalisés comme les σ_A en (2,17).

théorie canonique écartée, on avait, comme dans la théorie du champ u_A de DIRAC, pour le terme $\frac{1}{2} \mid r \mid$ une *constante, même si la dépendance* $p_{\vec{k}\lambda}(t)$ *était influencée par* $\vec{E}, \vec{B}$.

Dans la nouvelle théorie (5,25) *avec les relations non canoniques* (5,30), $\frac{1}{2} \mid r \mid$ en (5,32) *est une fonction de t dès qu'une influence se manifeste. La création spontanée (qui apparaît dans la théorie de* PAULI-WEISSKOPF *comme parallèle à l'annihilation spontanée des quanta d'un champ* u_A*) de paires de quanta du champ* φ_a *(de charge opposée) est une caractéristique de la forme canonique* ((5,30) *avec* +) *parce qu'elle résulte du fait que* $\frac{1}{2} \mid r \mid$ *est constant. La dépendance* $\frac{1}{2} \mid r \mid (t)$ *de t dans la nouvelle théorie enlève rigoureusement cette contribution spontanée et ne laisse que la création induite de paires (soit la création proportionnelle au nombre des quanta (de* φ_a*) déjà présent) par le champ* $\vec{E}, \vec{B}$. Ce résultat est identique à la nouvelle mécanique du point de masse[6]).

Genève, Institut de Physique de l'Université.

Littérature.

[1]) Cf. résumé Soc. Suisse de Physique, Helv. Phys. Acta **15**, 513 (1942).

[2]) La quantification doit se faire suivant la nouvelle méthode qui a été exposée en détail en Arch. de Genève, **24**, 193 et 261 (1942); **25**, 5 (1943); cf. aussi le résumé Helv. Phys. Acta **15**, 327 (1942). p. 328 lire Z^2 et Z à la place de Z^4 et Z^2.

[3]) Cette forme particulière de l'équation de DIRAC a été proposée pour la première fois par MAJORANA, R. C. Academia de Lincei, **14**, 1 (1937).

[4]) STUECKELBRG, C. R. Soc. Phys. Hist. Nat. Genève **59**, 49 et 53 (1942).

[5]) PAULI et WEISSKOPF, Helv. Phys. Acta **7**, 709 (1934).

[6]) Cf. STUECKELBERG. La démonstration est faite en utilisant l'équivalence entre cette théorie et la nouvelle mécanique proposée par l'auteur, Helv. Phys. Acta **14**, 321, 588 (1941) et **15**, 23 (1942).

[7]) Cf. STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **11**, 225 et 299 (1938).

[8]) L'existence d'une grandeur pareille *(la longueur fondamentale)* a été considérée *depuis l'antiquité.* En *mathématique (géometrie) moderne* elle a été introduite par CAVALIERI (1635) et LEIBNIZ (1684). Un exposé historique de ces idées a été donné par F. KLEIN, Elementarmathematik vom höhern Standpunkte aus (Springer), Bd. I (4. Aufl.), p. 231 et suiv. (1933), Bd. II (3. Aufl.), p. 203 et suiv. (1925). En *physique moderne* elle a été proposée par HEISENBERG, Zs. f. Phys. **101**, 533 (1936).