Über den Begriff des Atoms. III

Autor(en): **Scherrer, Willy**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **16 (1943)**

Heft III

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-111400

Über den Begriff des Atoms. III.

von **Willy Scherrer**.

(22. IV. 1943.)

Teil II[1]) war fast ausschliesslich einer Analyse der kräftefreien Wellengleichung

$$\square u \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -a^2 u \tag{1}$$

mit

$$a = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{2}$$

im Sinne der in § 1 und 2 von Teil I[2]) geschilderten Weltpunktdynamik gewidmet. Es handelte sich also um eine Beschreibung der Trägheitsbewegung eines Elementarteilchens im Rahmen der relativistischen Wellenmechanik. Diese Beschreibung weicht aber insofern prinzipiell von der üblichen Behandlung ab, als das Verbot der Überlichtgeschwindigkeit in Gestalt einer Randbedingung in die Prämissen aufgenommen wurde.

In präziser Fassung lag folgende Aufgabe vor, die wir inskünftig als *Einpunktproblem* bezeichnen wollen: Von einem Elementarteilchen sei bekannt, dass es an der Weltstelle

$$Q_1 \sim (ct, x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$$

in Erscheinung trete. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen an irgend einer mit dem Verbot der Überlichtgeschwindigkeit verträglichen Weltstelle Q, also irgendwo im Nachkegel (Zukunftskegel) oder Vorkegel (Vergangenheitskegel) von Q_1 anzutreffen?

Bei Zugrundelegung der Gleichung (1) besteht die sinngemässe Behandlung der Aufgabe darin, dass man Vor- und Nachkegel als Grundgebiet erklärt und die in diesem Gebiet eindeutigen und so-

[1]) Helv. Phys. Acta, XV, **5**, 476 (1942).
[2]) Helv. Phys. Acta, XV, **1**, 53 (1942).

weit als möglich stetigen und beschränkten Lösungen von (1) ermittelt. Als Mass der Wahrscheinlichkeit wählen wir das Integral

$$W = \iiiint_{\mathfrak{G}} u^2\, d(ct)\, d x_1\, d x_2\, d x_3 . \tag{3}$$

Dasselbe soll uns im Mittel die Zahl derjenigen Weltstellen liefern, welche von unserem Teilchen innerhalb des Weltgebietes $\mathfrak{G}$ eingenommen werden. Es handelt sich also nicht um die Definition einer Wahrscheinlichkeit a priori, sondern um einen Versuch, das Integral (3) als empirische Wahrscheinlichkeit zu deuten. Die Funktion u stellt daher nicht einen konkreten Einzelfall dar, sondern das mittlere Verhalten sehr vieler und voneinander vollständig unabhängiger Teilchen, die denselben Konkurrenzbedingungen unterliegen.

Ersetzen wir nun in (3) das Gebiet $\mathfrak{G}$ durch dasjenige Teilgebiet $\mathfrak{G}(T)$ des Grundgebietes, welches zwischen den Ebenen $t = 0$ und $t = T$ enthalten ist, so liefert

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \iiint_{t=T} u^2 c\, d x_1\, d x_2\, d x_3 = \nu(T) \tag{4}$$

die mittlere Zahl der von unseren Teilchen zur Zeit $t = T$ pro Sekunde eingenommenen Weltstellen. Wenn also der Grenzwert

$$\lim_{T\to\infty} \nu(T) = \nu^* \tag{5}$$

existiert, so kann man von einer asymptotischen Erhaltung des Teilchens sprechen. Ein genauer mikrokosmischer Erhaltungssatz wird im Rahmen der in Teil I geschilderten Weltpunktdynamik nicht angestrebt.

Die in den Tafeln (56) und (70) von Teil II mitgeteilten Lösungen erfüllen nun tatsächlich die Bedingung (5). Hingegen sind sie alle entweder auf dem Nullkegel oder auf der Ruhachse singulär. Die einzige im abgeschlossenen Grundgebiet eindeutige, stetige und beschränkte Lösung

$$u = C \cdot \frac{I_1(ar)}{r} ; \quad r = \sqrt{c^2 t^2 - x_1^{\,2} - x_2^{\,2} - x_3^{\,2}} \tag{6}$$

liefert dagegen keinen eigentlichen Grenzwert (5).

Die erwähnten Anomalien verschwinden nun vollständig, wenn man das eben geschilderte Einpunktproblem ersetzt durch folgendes *Zweipunktproblem:* Von einem Teilchen sei bekannt, dass es an zwei zueinander zeitartig gelegenen Weltstellen

$$Q_1 \sim (ct,\, x_1,\, x_2,\, x_3) = (-A\,,\, 0,\, 0,\, 0)$$

und

$$Q_2 \sim (ct,\, x_1,\, x_2,\, x_3) = (A\,,\, 0,\, 0,\, 0)$$

in Erscheinung trete. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dieses Teilchen an irgend einer mit dem Verbot der Überlichtgeschwindigkeit verträglichen Weltstelle Q anzutreffen?

Das Grundgebiet besteht nun aus dem Vorkegel von Q_1, dem Nachkegel von Q_2 und dem Durchschnitt des Nachkegels von Q_1 mit dem Vorkegel von Q_2. Den letzteren endlichen Bereich wollen wir kurz *Doppelkegel* nennen.

Das bezeichnete Problem ist separierbar in den durch die Transformation

$$\left.\begin{aligned} ct &= \frac{\tau\sigma}{A} \\ \varrho &= \frac{\sqrt{(A^2-\tau^2)(A^2-\sigma^2)}}{A} \\ x_1 &= \varrho \cos\vartheta \\ x_2 &= \varrho \sin\vartheta \cos\varphi \\ x_3 &= \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

definierten Lamé'schen Koordinaten $\tau, \sigma, \vartheta, \varphi$. Der Separationsansatz

$$u = T(\tau)\, S(\sigma)\, P(\vartheta)\, \Phi(\varphi) \tag{9}$$

führt auf die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\,\Phi = 0, \quad (\Phi)$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP}{d\vartheta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] P = 0, \quad (P)$$

$$\frac{1}{\sqrt{A^2-\sigma^2}}\frac{d}{d\sigma}\left[(\sqrt{A^2-\sigma^2})^3\frac{dS}{d\sigma}\right] + \left[a^2(A^2-\sigma^2) - E - \frac{l(l+1)A^2}{A^2-\sigma^2}\right] S = 0, \quad (S)$$

$$\frac{1}{\sqrt{A^2-\tau^2}}\frac{d}{d\tau}\left[(\sqrt{A^2-\tau^2})^3\frac{dT}{d\tau}\right] + \left[a^2(A^2-\tau^2) - E - \frac{l(l+1)A^2}{A^2-\tau^2}\right] T = 0. \quad (T)$$

Hier sind in den beiden wohlbekannten Gleichungen (Φ) und (P) die Eigenwerte schon durch die geläufigen Quantenzahlen m und l ausgedrückt. Neu und für das Zweipunktproblem charakteristisch sind die beiden gleichlautenden Gleichungen (S) und (T). Ihre Quantisierung beruht ausschliesslich auf den Schrödinger'schen Forderungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit im abgeschlossenen Doppelkegel und liefert ein diskontinuierliches Spektrum von Eigenwerten E. Führt man an Stelle von σ und τ vermittels

$$\sigma = A \cos \alpha, \qquad \tau = A \cos \beta \tag{10}$$

die Winkelvariabeln α und β ein, so ergeben sich für die einem bestimmten Eigenwert E entsprechenden Eigenfunktionen $S_E[x]$ und $T_E[x]$ die Beziehungen

$$T_E[x] \equiv C S_E[x] \tag{11a}$$

$$S_E[-x] \equiv \pm S_E[x] \tag{11b}$$

$$S_E[x + \pi] \equiv \pm S_E[x] \tag{11c}$$

woraus ihre enge Verwandtschaft mit den Mathieu'schen (resp. Lamé'schen) Eigenfunktionen ersichtlich ist. Ihre Fortsetzung in den Nachkegel von Q_2 oder den Vorkegel von Q_1 geschieht durch Substitutionen

$$\begin{aligned} \alpha &\to k\pi + i\alpha \\ \beta &\to l\pi + i\beta, \end{aligned} \tag{12}$$

wo k und l ganze Zahlen sind und liefert die sogenannten zugeordneten Eigenfunktionen.

Eine erste approximative Analyse der gewonnenen Lösungen zeitigte folgende Ergebnisse:

1. Sämtliche Eigenlösungen sind im abgeschlossenen Grundgebiet eindeutig, stetig und beschränkt und besitzen einen endlichen Grenzwert (5).

2. Die Struktur der Wellenfunktion hängt in dem Sinne von der Grunddistanz $2A$ ab, dass mit wachsendem A in der Umgebung der „Gewissheitsstellen" Q_1 und Q_2 die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von der Ruhachse $Q_1 Q_2$ klein wird. Im Grenzfall $A = \infty$ wird diese Wahrscheinlichkeit Null. Liegt also Q_1 im Unendlichen, Q_2 aber im Endlichen, so beschreibt der Partikel im Endlichen genau eine Trägheitsbahn.

3. In genügendem Abstand von den Gewissheitsstellen entsprechen die auftretenden Frequenzen und Wellenlängen den bekannten de Broglie'schen Gesetzmässigkeiten.

Die hier entwickelte Auffassung der wellenmechanischen Trägheit ist vielleicht geeignet, die rätselhafte Doppelnatur der Materie dem anschaulichen Verständnis näher zu bringen. Sie vermeidet strikte jede Überlichtgeschwindigkeit und gestattet einen kontinuierlichen Anschluss an das klassische Trägheitsgesetz. Die mathematischen Einzelausführungen zu den hier mitgeteilten Resultaten werden an anderer Stelle erscheinen[1]).

Zum Schluss sei im Anschluss an die Feststellung 2. noch folgende Konfiguration erwähnt: Fallen die beiden Weltpunkte Q_1 und Q_2 in *verschiedene* Raumpunkte derart, dass ihr Verbindungsrektor die Geschwindigkeit v repräsentiert, so gehören sämtliche Weltpunkte des Doppelkegels *räumlich* zu einem gestreckten Rotationsellipsoid mit den Halbachsen A und $A\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, dessen Brennpunkte die Raumorte von Q_1 und Q_2 sind. Der von unserem Teilchen in der Zeit von Q_1 bis Q_2 „gestörte" Raum wird also mit $v \to c$ beliebig schmal. Dieses Beispiel illustriert die Unmöglichkeit, auf Grund der relativistischen Metrik eine kleinste Raumdistanz auszuzeichnen.

Bern, Mathematisches Institut der Universität.

---

[1]) Als Teil IV in den „Commentarii Mathematici Helvetici", Anfang 1944.