Über die Wechselwirkung zweier Nukleonen in der Mesontheorie

Über die Wechselwirkung zweier Nukleonen in der Mesontheorie

von **Markus Fierz.**

(23. III. 1944.)

I. *Einleitung und Problemstellung.* Wie WENTZEL gezeigt hat, liefert die symmetrische Mesontheorie bei starker Koppelung als Hamiltonfunktion zweier Nukleonen[1]) (Proton, Neutron)

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2\,M}\,(p^2+p'^2) + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{3}(d^2_k+d'^2_k) + V(r)\,\Omega\,(\vartheta, \varphi, \psi; \vartheta', \varphi', \psi') \quad (\mathrm{I.1})$$

Dabei sind $\vec{p}$ und $\vec{p}'$ die Bahnimpulse der Nukleonen, M ihre Masse, $\vec{d}$ und $\vec{d}'$ sind ihre Spinmomente. Diese können alle halbganzen Werte annehmen und geben zur Isobarenenergie $\frac{\varepsilon}{2}\sum_k d_k^2$ Anlass. Die potentielle Energie ist durch den dritten Term in $\mathfrak{H}$ gegeben und hängt ausser vom Abstand r der Nukleonen noch von ihren inneren Freiheitsgraden ϑ, φ, ψ ab.

In den Variablen ϑ, φ, ψ sind die d_k folgende Operatoren:

$$d_3 = \frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial\varphi};$$

$$d_1 \pm i d_2 = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\,\mathrm{cotg}\,\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{i}\,\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\psi}\right) \quad (\mathrm{I.2})$$

Die Hamiltonfunktion (I. 1) ist somit analog derjenigen zweier gekoppelter Kugelkreisel.

Neben dem Vektor-Operator d_k existiert noch der weitere Operator h_k, der die Rolle des „Isotopic Spin" spielt. Die Eigenwerte

[1]) G. WENTZEL, H. P. A. **16** (1943), 222, und **16** (1943), 551, § 15. Wir haben in der vorliegenden Arbeit die „Tensorkraft" nicht berücksichtigt, d. h. wir betrachten nur den Term, der bei WENTZEL in der Form

$$V^{(\mu\nu)} = \frac{g^2}{2}\sum_{i,\varrho} S^{(\mu)}_{i\varrho}\,S^{(\nu)}_{i\varrho}\,\Delta\,\frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}$$

geschrieben ist. Die $S_{i\varrho}$ entsprechen unseren x_{ik} [(I. 5) dieser Arbeit]. Ein solches Potential entspricht der von MOLLER und ROSENFELD (Kgl. Danske Vidensk. S. Math. fys. Medd. XVII. 8 (1940)) vorgeschlagenen Theorie.

von h_3 entsprechen den verschiedenen Ladungswerten der Nukleonen. Die Operatoren h_k sind gegeben durch

$$h_3 = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \psi};$$

$$h_1 \pm i h_2 = e^{\pm i \psi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \operatorname{cotg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{i} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \tag{I. 3}$$

Es gilt identisch

$$\sum_k d_k^2 \equiv \sum_k h_k^2 \tag{I. 4}$$

wie man leicht nachrechnet. Die Relation (I. 4), die zwischen Spin und „Isotopic Spin" besteht, ist charakteristisch für die symmetrische Mesontheorie. Fasst man den Vektor $\vec{d}$ als Impulsmoment eines Kugelkreisels auf, so ist $\vec{h}$ dessen Impulsmoment im körperfesten Koordinatensystem, weshalb die Gleichung (I. 4) selbstverständlich ist. Die Grösse $\Omega\,(\vartheta, \varphi, \psi;\ \vartheta', \varphi', \psi')$ lässt sich wie folgt schreiben

$$\Omega\,(\vartheta, \varphi, \psi;\ \vartheta', \varphi'\ \psi') = \sum_{i,k} x_{ik}\, x'_{ik} \tag{I. 5}$$

Dabei ist x_{ik} durch folgende Matrix gegeben:

$$x_{ik} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \sin\psi - \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi, & -\cos\varphi \sin\psi - \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi, & \sin\vartheta \cos\psi \\ -\cos\psi \sin\varphi - \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi, & \cos\varphi \cos\psi - \cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi, & \sin\vartheta \sin\psi \\ \sin\vartheta \cos\varphi \quad , & \sin\vartheta \sin\varphi \quad , & \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{I.6}$$

Bis auf die Anordnung ist x_{ik} die orthogonale Transformation, die vom raumfesten auf das körperfeste Koordinatensystem eines Kreisels führt. Diese ist durch

$$\begin{pmatrix} x_{22} & x_{21} & x_{23} \\ -x_{12} & -x_{11} & -x_{13} \\ x_{32} & x_{31} & x_{33} \end{pmatrix}$$

gegeben. Da in (I. 5) die x_{ik} nur in der Form $\Sigma\, x_{ik}\, x'_{ik}$ vorkommen, spielt dieser Unterschied keine Rolle. Die Definition (I. 6) erweist sich jedoch wegen ihrer Symmetrie in φ und ψ als bequem.

Die Operatoren d_k, h_k und x_{ik} erfüllen die folgenden Vertauschungsrelationen

$$[d_1, d_2] = i d_3;\ [h_1, h_2] = i h_3;\ [d_i, h_k] = 0 \tag{I. 7}$$

$$[d_1, x_{k2}] = [x_{k1}, d_2] = i\, x_{k3} \tag{I. 8}$$

$$[h_1, x_{2k}] = [x_{1k}, h_2] = i\, x_{3k} \tag{I. 9}$$

sowie die durch zyklisches Vertauschen von 1, 2, 3 daraus hervorgehenden Relationen. Die x_{ik} sind miteinander vertauschbar, ebenso gestrichene mit ungestrichenen Grössen.

Weiter gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_l x_{il}\, x_{kl} = \sum_l x_{li}\, x_{lk} = \delta_{ik} \tag{I.10}$$

In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, dass der durch (I. 1) gegebene Hamiltonoperator auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2M}(p^2 + p'^2) + \frac{\varepsilon}{2}\{j(j+1) + j'(j'+1)\}$$
$$+ V(r)\,(J, K, j, j' \,|\, \Omega \,|\, J, K, \bar{j}, \bar{j}') \tag{I.11}$$

Dabei ist

$$\sum_k d_k^2 = j(j+1);\ \sum_k d_k'^2 = j'(j'+1);\ j, j' = {}^1\!/_2, {}^3\!/_2 \ldots$$
$$\sum_k (d_k + d_k')^2 = J(J+1)$$
$$\sum_k (h_k + h_k')^2 = K(K+1)$$

Um die Matrix Ω zu bestimmen, berechnen wir zuerst die allgemeine Form der Matrizen von x_{ik} (Abschnitt II). Hierauf werden wir die Produktdarstellung $\vartheta j \times \vartheta j'$ der Drehgruppe explizit ausreduzieren (Abschnitt III). Diese Rechnung hat auch unabhängig von dem hier behandelten Problem ein gewisses Interesse[1]). Mit Hilfe der im dritten Abschnitt gewonnenen Formeln ist es dann möglich, die Matrix Ω anzugeben (Abschnitt IV).

II. Wir bestimmen zuerst Matrizen x_{ik}, welche den Gleichungen (I. 8), (I. 9) und (I. 10) genügen, und zwar in einer Darstellung, in welcher $\sum_k d_k^2$, $\sum_k h_k^2$, d_3 und h_3 diagonal sind.

Die Grössen d_k, h_k sind Drehimpulsoperatoren und es gilt wegen (I. 7)

$$\sum_k d_k^2 = \sum_k h_k^2 = j(j+1) \tag{II.1}$$

Wir setzen daher in bekannter Weise

$$\begin{aligned}
(j, m \,|\, d_1 + i d_2 \,|\, j, m-1) &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\\
(j, m \,|\, d_1 - i d_2 \,|\, j, m+1) &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\\
(j, m \,|\, d_3 \,|\, j, m) &= m
\end{aligned} \tag{II.2}$$

[1]) Für die allgemeine Theorie dieser Reduktion siehe z. B. VAN DER WAERDEN. Die Gruppentheoretische Methode (Berlin 1932), S. 68.

$$
\begin{aligned}
(j, n \mid h_1 + i h_2 \mid j, n-1) &= \sqrt{(j+n)(j-n+1)} \\
(j, n \mid h_1 - i h_2 \mid j, n+1) &= \sqrt{(j+n+1)(j-n)} \\
(j, n \mid h_3 \mid j, n) &= n
\end{aligned} \tag{II.3}
$$

d_k ist diagonal bezüglich n, h_k bezüglich m. Nichtangeschriebene Matrixelemente verschwinden und es ist stets

$$j \geqslant n, m \geqslant -j$$

Die Relationen (I. 8) bedeuten, dass sich die Zeilen von x_{ik} bezüglich der infinitesimalen Drehungen d_k wie Vektoren verhalten. Das entsprechende gilt gemäss (I. 9) für die Spalten von x_{ik} bezüglich der infinitesimalen Drehungen h_k.

Grössen x_k ($k = 1, 2, 3$), welche sich bezüglich d_k wie ein Vektor verhalten, d. h. Gleichungen

$$[d_i, x_k] = [x_i, d_k] = i\, x_l \qquad (i, k, l \text{ zyklisch})$$

erfüllen, haben nur folgende, nicht verschwindende Matrixelemente[1]):

$$
\begin{aligned}
(j, m \mid x_k \mid j, \overline{m}) &= A_{j\,j}\,(j, m \mid d_k \mid j, \overline{m}) \\
(j, m \mid x_k \mid j-1, \overline{m}) &= A_{j, j-1}\,(j, m \mid b_k \mid j-1, \overline{m}) \\
(j, m \mid x_k \mid j+1, \overline{m}) &= A^*_{j, j+1}\,(j, m \mid b^*_k \mid j+1, \overline{m})
\end{aligned} \tag{II.4}
$$

$A^*_{j, j+1}$ ist zu $A_{j+1, j}$ konjugiert komplex; ebenso $(j, m \mid b^*_k \mid j+1, \overline{m})$ zu $(j+1, \overline{m} \mid b_k \mid j, m)$. Es ist

$$
\begin{aligned}
(j, m \mid b_1 + i\, b_2 \mid j-1, m-1) &= -\sqrt{(j+m)(j+m-1)} \\
(j, m \mid b_1 - i\, b_2 \mid j-1, m+1) &= \sqrt{(j-m)(j-m-1)} \\
(j, m \mid b_3 \mid j-1, m) &= \sqrt{(j-m)(j+m)}
\end{aligned} \tag{II.5}
$$

Zwischen d_k, b_k und b^*_k bestehen die folgenden Relationen:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{a)}\ (j \mid d_i\, b_k - d_k\, b_i \mid j-1) = i\,(j+1)\,(j \mid b_l \mid j-1) \\
&\text{b)}\ (j \mid b_i\, d_k - b_k\, d_i \mid j-1) = -\,i\,(j-1)\,(j \mid b_l \mid j-1) \\
&\text{c)}\ (j \mid b_i\, b^*_k - b_k\, b^*_i \mid j) \quad = i\,(2j-1)\,(j \mid d_l \mid j) \\
&\text{d)}\ (j \mid b^*_i\, b_k - b^*_k\, b_i \mid j) \quad = -\,i\,(2j+3)\,(j \mid d_l \mid j) \\
&\text{e)}\ \sum_k (j \mid b_k\, b^*_k \mid j) = j\,(2j-1) \\
&\text{f)}\ \sum_k (j \mid b^*_k\, b_k \mid j) = (j+1)\,(2j+3) \\
&\text{g)}\ \sum_k (j \mid b_k\, b_k \mid j-2) = \sum_k (j \mid b^*_k\, b^*_k \mid j+2) = 0 \\
&\text{h)}\ \sum_k (j \mid d_k\, b_k \mid j-1) = \sum_k (j \mid d_k\, b^*_k \mid j+1) = 0
\end{aligned}
\right\} \tag{II.6}
$$

sowie die hierzu hermitesch konjugierten Relationen.

[1]) Siehe z. B. W. Pauli, Handbuch der Ph. **24**/1, 2. Aufl. (1933), S. 182.

Dies verifiziert man mittels der Darstellungen (II. 2) und (II. 5). x_{3k} verhält sich bezüglich d_k wie ein Vektor. Da x_{3k} vom Winkel ψ unabhängig ist, sind seine Matrixelemente bezüglich n diagonal.

Wir machen daher gemäss (II. 4) für x_{3k} folgenden Ansatz[1]):

$$x_{3k} = A_{jj}\,(j\mid d_k\mid j) + A_{j,\,j-1}\,(j\mid b_k\mid j-1) + (j-1\mid b_k^*\mid j)\,A^*_{j-1,\,j} \qquad \text{(II. 7)}$$

Die A_{jj} und $A_{j,\,j-1}$ hängen von j und n ab. Aus der Bedingung

$$[x_{3k},\, x_{3l}] = 0 \qquad \text{(II. 8)}$$

folgen mit Hilfe der Relationen (II. 6) (a – d) die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &A_{j,\,j-1}\,[(j+1)\,A_{jj} - (j-1)\,A_{j-1,\,j-1}] = 0 \\ &|A_{jj}|^2 + |A_{j,\,j-1}|^2\,(2j-1) - |A_{j+1,\,j}|^2\,(2j+3) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II. 9)}$$

Die 1. Gleichung bedeutet, dass in (II. 8) der Koeffizient der b_k, die 2. Gleichung, dass der Koeffizient von d_k verschwinden muss. Weiter liefert die Gleichung

$$\sum_k x_{3k}^2 = 1 \qquad \text{(II. 10)}$$

auf Grund der Relationen (II. 6, e – h) die weitere Gleichung

$$j\,(j+1)\,A_{jj}^2 + j(2j-1)\,|A_{j,\,j-1}|^2 + (j+1)\,(2j+3)\,|A_{j+1,\,j}|^2 = 1 \qquad \text{(II. 11)}$$

Aus (II. 9) und (II. 11) folgt

$$A_{j,\,j} = \frac{\alpha}{j\,(j+1)}\,; \quad |A_{j,\,j-1}|^2 = \frac{j^2-\alpha^2}{j^2\,(2j-1)\,(2j+1)} \qquad \text{(II. 12)}$$

Dabei ist α eine Konstante. Diese ist durch die Bedingung

$$j \geqslant n$$

bestimmt. Setzen wir in der ersten Gleichung von (II. 9) $j = n$, so muss, weil $A_{n-1,\,n-1} = 0$ das Produkt $A_{n,\,n-1}\,A_{nn}$ verschwinden. Daher ist

$$\alpha = n$$

Wir erhalten somit

$$A_{jj} = \frac{n}{j\,(j+1)}\,; \quad A_{j,\,j-1} = \frac{\sqrt{(j+n)\,(j-n)}}{j\sqrt{(2j+1)\,(2j-1)}} \qquad \text{(II. 12')}$$

Führt man neben den Operatoren b_k, den h_k entsprechende Ope-

[1]) Die in (II. 7) und im folgenden verwendete symbolische additive Schreibweise ist stets im Sinne der allgemeinen Regel (II. 4) zu verstehen.

ratoren c_k ein, deren Matrixelemente aus (II. 5) durch Ersetzen von m durch n entstehen, so gilt offenbar, da

$$(j, n \mid h_3 \mid j, n) = n; \quad (j, n \mid c_3 \mid j-1, n) = \sqrt{(j+n)(j-n)}$$

$$\left.\begin{aligned}
(j, n, m \mid x_{ik} \mid j, \bar{n}, \bar{m}) &= \frac{(j, n \mid h_i \mid j, \bar{n})\,(j, m \mid d_k \mid j, \bar{m})}{j\,(j+1)} \\
(j, n, m \mid x_{ik} \mid j-1, \bar{n}, \bar{m}) &= \frac{(j, n \mid c_i \mid j-1, \bar{n})\,(j, m \mid b_k \mid j-1, \bar{m})}{j\sqrt{(2j+1)(2j-1)}} \\
(j, n, m \mid x_{ik} \mid j+1, \bar{n}, \bar{m}) &= \frac{(j, n \mid c_i^* \mid j+1, \bar{n})\,(j, m \mid b_k^* \mid j+1, \bar{m})}{(j+1)\sqrt{(2j+3)(2j+1)}}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II. 13)}$$

Denn der Index 3 darf wegen des Tensorcharakters der x_{ik} vor keinem anderen Index ausgezeichnet sein[1]).

Die Darstellung (II. 13) ist unabhängig von einer speziellen Darstellung der Operatoren d_k, b_k, h_i, c_i. d_k und b_k haben lediglich die Relation (II. 6); h_k, c_k die diesen entsprechenden Relationen zu erfüllen.

III. Wegen des Auftretens des Operators Ω in (I. 1) sind d_k und h_k keine Integrale der Bewegungsgleichungen. Wohl aber sind die Spinsumme

$$\vec{D} = \vec{d} + \vec{d}' \qquad \text{(III. 1)}$$

sowie die Summe der „isotopic spin"

$$\vec{H} = \vec{h} + \vec{h}' \qquad \text{(III. 2)}$$

mit $\mathfrak{H}$ vertauschbar. Wir wollen daher an Stelle der Variablen

$$j, m, n; \; j', m', n'$$

die neuen Variablen

$$J, K, M, N, j, j' \qquad \text{(III. 3)}$$

einführen. Dabei ist

$$\sum_k D_k^2 = J\,(J+1); \quad \sum_k H_k^2 = K\,(K+1)$$

$$D_3 = M, \; H_3 = N$$

Aus der Darstellungstheorie der Drehgruppe folgt

$$|j - j'| \leqslant J, K, \leqslant j + j' \qquad \text{(III. 4)}$$

Da wir x_{ik} durch d_k, h_k, b_k, c_k und j darstellen können, so haben wir

[1]) Im Spezialfall $j = \frac{1}{2}$ hat G. Wentzel $(j, n, m \mid x_{ik} \mid j, \bar{n}, \bar{m})$ berechnet (Formel (15. 10) l. c.).

nun die Aufgabe, die Matrizen dieser Grössen in den neuen Variablen zu berechnen. Es genügt diese Aufgabe für d_k und b_k zu lösen. Die Formeln für h_k und c_k erhält man durch Vertauschen von J mit K und von M mit N.

IIIa. *Berechnung von d_k als Matrix in den Variablen J, M, j, j'.* Da $\vec{d}$ mit $\vec{d}'$ vertauschbar ist, so gilt

$$[d_i, D_k] = [D_i, d_k] = i\, d_l \qquad (i, k, l \text{ zyklisch}) \qquad \text{(IIIa. 1)}$$

d. h. d_k ist eine Vektormatrix bezüglich D_k. Wir führen nun Operatoren B_k und B_k^* ein, welche mit den D_k zusammen den Relationen (II. 6) genügen (d. h. man hat in diesen Relationen d_k, b_k b_k^*, j durch D_k, B_k, B_k^*, J zu ersetzen).

Nun machen wir im Sinne von (II. 4) für d_k den folgenden Ansatz

$$d_k = f(J)\,(J\,|D_k|\,J) + g(J)\,(J\,|B_k|\,J-1) + (J-1\,|B_k^*|\,J)\,g^*(J) \qquad \text{(IIa. 2)}$$

$f(J)$, $g(J)$ und $g^*(J)$ sind noch Funktionen von j und j' was wir gelegentlich auch explizit zum Ausdruck bringen werden. $g^*(J)$ ist das Konjugiert-komplexe von $g(J)$; denn d_k ist eine hermitesche Matrix.

Setzt man den Ansatz (IIIa. 2) in die beiden Gleichungen

$$[d_i, d_k] = i\, d_l\,; \qquad \sum_k d_k^2 = j\,(j+1)$$

ein und benützt die (II. 6) entsprechenden Relationen für D_k und B_k, so folgen für $f(J)$ und $g(J)$ die folgenden Gleichungen:

$$g(J)\,[(J+1)\,f(J) - (J-1)\,f(J-1)] = g(J) \qquad \text{(IIIa. 3)}$$

$$f^2(J) + (2J-1)\,|\,g(J)\,|^2 - (2J+3)\,|\,g(J+1)\,|^2 = f(J) \qquad \text{(IIIa. 4)}$$

$$J(J+1)\,f^2(J) + J(2J-1)\,|\,g(J)\,|^2 \\ + (J+1)(2J+3)\,|\,g(J+1)\,|^2 = j\,(j+1) \qquad \text{(IIIa. 5)}$$

Aus (IIIa. 3) folgt sofort

$$f(J) = \tfrac{1}{2} + \frac{\alpha(j, j')}{J(J+1)} \qquad \text{(IIIa. 6)}$$

$\alpha(j, j')$ ist noch zu bestimmen.

Aus (IIIa. 4) und (IIIa. 5) folgt durch Elimination von $g(J+1)$

$$(J+1)^2 f^2(J) - (J+1)\,f(J) \\ + (2J+1)(2J-1)\,g^2(J) = j\,(j+1) \qquad \text{(IIIa. 7)}$$

Setzt man hier den Ausdruck (IIIa. 6) für $f(J)$ ein, so folgt

$$| g(J) |^2 = \frac{(j+\frac{1}{2})^2 - \left[\frac{1}{2} J + \frac{\alpha(j,j')}{J}\right]^2}{(2J+1)(2J-1)} \qquad \text{(IIIa. 8)}$$

Bestimmung von $\alpha(j,j')$: Da $J \geqq | j - j' |$ ist, so muss $g(| j - j' |)$ verschwinden; denn sonst würden Übergänge nach $J = | j - j' | - 1$ auftreten. Desgleichen muss $g(j + j' + 1)$ verschwinden. Diese Bedingungen bestimmen $\alpha(j,j')$:

$$\alpha(j,j') = \tfrac{1}{2}[j \,|\, j+1) - j'(j'+1)] \qquad \text{(IIIa. 9)}$$

Somit erhalten wir aus (IIIa. 6), (IIIa. 8) und (IIIa. 9):

$$f(J) = \tfrac{1}{2}\left[1 + \frac{j(j+1) - j'(j'+1)}{J(J+1)}\right] \qquad \text{(IIIa. 10)}$$

$$g(J) = g^*(J) =$$

$$\frac{1}{2J\sqrt{(2J+1)(2J-1)}} \sqrt{[J^2 - (j-j')^2][(j+j'+1)^2 - J^2]} \qquad \text{(IIIa. 11)}$$

Durch (IIIa. 10), (IIIa. 11) und (IIIa. 2) ist somit d_k als Matrix mit den Variablen J, M dargestellt. Setzt man

$$d_k' = f'(J \,|\, D_k \,|\, J) + g'(J)(J \,|\, B_k \,|\, J-1) + (J-1 \,|\, B_k^* \,|\, J)\, g'(J)$$

so folgt wegen

$$d_k + d_k' = D_k\,,$$

dass

$$g'(J) = -g(J)$$

und dass $f'(J)$ aus $f(J)$ durch Vertauschen von j mit j' hervorgeht. h_k, h_k' erhält man aus d_k, d_k' durch Vertauschen von J mit K und M und N.

II. b. *Berechnung von* b_k, b_k^* *als Matrizen in den Variablen* J, M, j, j'. Da b_k mit d_k' vertauschbar ist, so ist d_k eine Vektormatrix bezüglich D_k. Daher machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}(j \,|\, b_k \,|\, j-1) = {} & s_{j,j-1}(J)(J \,|\, D_k \,|\, J) \\ & + t_{j,j-1}(J)(J \,|\, B_k \,|\, J-1) + (J-1 \,|\, B_k^* \,|\, J)\, r_{j,j-1}(J)\end{aligned} \qquad \text{(IIIb. 1)}$$

$t_{j,j-1}(J)$ wird nicht gleich $r_{j,j-1}(J)$ sein, da b_k keine hermitesche Matrix ist. Um s, t und r zu bestimmen, benützen wir die Gleichungen (II. 6, c) bis (II. 6, f) für d_k, b_k und b_k^*. Wir denken uns den Ansatz (IIIb. 1) in diese Gleichungen eingesetzt und benützen die Relationen (II. 6) für D_k, B_k, B_k^* sowie die Formeln für d_k

gemäss (IIIa. 2), (IIIa. 10), (IIIa. 11). Von den so entstehenden Gleichungen verwenden wir nur die Terme diagonal in J. So erhalten wir

$$|s_{j,j-1}(J)|^2 + (2J-1)|t_{j,j-1}(J)|^2 - (2J+3)|r_{j,j-1}(J+1)|^2 = (2j-1)f_j(J) \tag{IIIb.2}$$

$$|s_{j,j-1}(J)|^2 + (2J-1)|r_{j,j-1}(J)|^2 - (2J+3)|t_{j,j-1}(J+1)|^2 = -(2j+1)f_{j-1}(J) \tag{IIIb.3}$$

$$J(J+1)|s_{j,j-1}(J)|^2 + J(2J-1)|t_{j,j-1}(J)|^2 + (J+1)(2J+3)|r_{j,j-1}(J+1)|^2 = j(2j-1) \tag{IIIb.4}$$

$$J(J+1)|s_{j,j-1}(J)|^2 + J(2J-1)|r_{j,j-1}(J)|^2 + (J+1)(2J+3)|t_{j,j-1}(J+1)|^2 = j(2j+1) \tag{IIIb.5}$$

(N. B. in (IIIb. 3) und (IIIb. 5) haben wir noch j durch $j-1$ ersetzt). Wir heissen nun

$$\left.\begin{aligned} |t_{j,j-1}(J)|^2 + |r_{j,j-1}(J)|^2 &= U_j(J) \\ |t_{j,j-1}(J)|^2 - |r_{j,j-1}(J)|^2 &= T_j(J) \end{aligned}\right. \tag{IIIb.6}$$

Durch Subtraktion von (IIIb. 2) von (IIIb. 3) sowie von (IIJb. 4) von (IIIb. 5) folgt je eine Rekursionsformel für $T_j(J)$. Indem man aus diesen beiden Formeln $T_j(J+1)$ eliminiert und (IIIa. 10) beachtet, folgt

$$T_j(J) = \frac{j}{J(2J-1)(2J+1)}\{2J^2+2j^2-1-2j'(j'+1)\} \tag{IIIb.7}$$

Wenn wir (IIIb. 2) und (IIIb. 3) sowie (IIIb. 4) und (IIIb. 5) addieren und aus diesen Gleichungen $s_{j,j-1}(J)$ eliminieren, erhalten wir die folgende Rekursionsformel für $U_j(J)$:

$$J^2(2J-1)U_j(J) - (J+1)^2(2J+3)U_j(J+1) = J(J+1)[(2j-1)f_j(J) - (2j+1)f_{j-1}(J)] - 4j^2 \tag{IIIb.8}$$

Wir setzen

$$U_j(J) = \frac{u_j(J)}{J^2(2J-1)(2J+1)} \tag{IIIb.9}$$

und erhalten aus (IIIb. 8)

$$u_j(J) - u_j(J+1) = (2J+1)J(J+1)[(2j-1)f_j(J) - (2j+1)f_{j-1}(J)] - 4j^2(2J+1)$$

Setzen wir rechts $f_j(J)$ gemäss (IIIa. 10) ein, so lässt sich diese Gleichung leicht auflösen und man findet

$$u_j(J) = a(j,j') + \tfrac{1}{2}(J^4-J^2) - [j'(j'+1) - 3j^2]J^2 \tag{IIIb.10}$$

$a(j, j')$ ist die „Integrationskonstante" und muss noch bestimmt werden. Zunächst findet man, z. B. mit Hilfe von (IIIb. 4), (IIIb. 5)

$$|s_{j,j-1}(J)|^2 = \frac{1}{2J(J+1)}\left\{j^2+j'(j'+1) - \frac{a(j,j')}{J(J+1)}\right\} - \tfrac{1}{4} \quad \text{(IIIb. 11)}$$

Bestimmung von $a(j, j')$ aus einer „Randbedingung":

Da $J \leqq j+j'$ ist, so muss $s_{j,j-1}(j+j')$ verschwinden; denn es dürfen keine Matrixelemente auftreten, bei denen J seinen Maximalwert beibehält und zugleich j abnimmt. Somit folgt aus (IIIb. 11) mit $J = j + j'$

$$a(j, j') = \tfrac{1}{2}(j-j')(j-j'-1)(j+j')(j+j'+1) \quad \text{(IIIb. 12)}$$

Damit ist $a(j, j')$ bestimmt und (IIIb. 11) liefert die Gleichung

$$|s_{j,j-1}(J)|^2 = \frac{1}{4J^2(J+1)^2}\{[J(J+1)-(j-j')(j-j'-1)][(j+j')(j+j'+1) - J(J+1)]\} \quad \text{(IIIb. 13)}$$

Weiter ist

$$|t_{j,j-1}(J)|^2 = \tfrac{1}{2}(T_j(J) + U_j(J)) = \frac{1}{4J^2(2J-1)(2J+1)}\{(J^4+4jJ^3+(6j^2-2j'(j'+1)-1)J^2 + 2j(2j^2-2j'(j'+1)-1)J+2a(j,j')\} \quad \text{(IIIb. 14)}$$

Wir bemerken nun, dass die Koeffizienten von J^n in (IIIb. 14) die symmetrischen Funktionen der „Wurzeln"

$$(j+j'), (j-j'), (j+j'+1), (j-j'-1)$$

sind. Infolgedessen kann (IIIb. 14) in folgender Form geschrieben werden:

$$|t_{j,j-1}(J)|^2 = \frac{1}{4J^2(4J^2-1)}[(J+j+j')(J+j-j')(J+j+j'+1)(J+j-j'-1)] \quad \text{(IIIb. 14')}$$

Entsprechend findet man für $r_{j,j-1}(J)$:

$$|r_{j,j-1}(J)|^2 = \frac{1}{4J^2(4J^2-1)}[(J-j-j')(J-j+j')(J-j-j'-1)(J-j+j'+1)] \quad \text{(IIIb. 15)}$$

Diese Ausdrücke sind wegen $j + j' \geqslant J \geqslant |j - j'|$ nie negativ und genügen den richtigen Randbedingungen. Es bleiben nun noch die beim Ausziehen der Quadratwurzeln aus (IIIb. 13), (IIIb. 14) und (IIIb. 15) zu wählenden Vorzeichen zu bestimmen. Da die Relationen (II. 6) beim Ersetzen von b_k durch $-b_k$ bestehen bleiben, ist das Vorzeichen von $s_{j,j-1}(J)$ frei wählbar. Wir setzen

$$|s_{j,j-1}(J)| = s_{j,j-1}(J) \tag{IIIb.16}$$

Nun benützen wir die Relation (IIIa. 6). Diese ergibt für den Koeffizienten von $(J \mid B_k \mid J-1)$ folgende Gleichung:

$$(J+1)\, f_j(J)\, t_{j,j-1}(J) - (J-1)\, g_j(J)\, s_{j,j-1}(J-1) = (j+1)\, t_{j,j-1}(J) \tag{IIIb.17}$$

Damit diese Gleichung erfüllt wird, hat man

$$|t_{j,j-1}(J)| = -t_{j,j-1}(J) \tag{IIIb.18}$$

zu setzen. Entsprechend findet man, durch Betrachtung der Koeffizienten von $(J-1 \mid B_k^* \mid J)$:

$$|r_{j,j-1}(J)| = r_{j,j-1}(J) \tag{IIIb.19}$$

Die Grössen s', t' und r' erhält man durch Vertauschen von j mit j' und passende Wahl der Vorzeichen. Da $g = |g|$, $g' = -|g'| = -g$ so gilt

$$t' = |t'| \qquad r' = -|r'|$$

Wir fassen das Resultat des III. Abschnittes zusammen: In der Darstellung, in welcher

$$\sum_k (d_k + d_k')^2 = \sum_k D^2 = J(J+1)$$

und

$$d_3 + d'_3 = D_3 = M$$

auf Diagonalform gebracht sind, gilt

$$\left.\begin{aligned}
(j \mid d_k \mid j) &= f(J,j,j')\,(J \mid D_k \mid J) + g(J,j,j')\,(J \mid B_k \mid J-1) \\
&\quad + (J-1 \mid B_k^* \mid J)\, g(J,j,j') \\
(j \mid b_k \mid j-1) &= s(J,j,j')\,(J \mid D_k \mid J) + t(J,j,j')\,(J \mid B_k \mid J-1) \\
&\quad + (J-1 \mid B_k^* \mid J)\, r(J,j,j') \\
(j-1 \mid b_k^* \mid j) &= s(J,j,j')\,(J \mid D_k \mid J) + r(J,j,j')\,(J \mid B_k \mid J-1) \\
&\quad + (J-1 \mid B_k^* \mid J)\, t(J,j,j') \\
f(J,j,j') &= \frac{1}{2J(J+1)} \{J(J+1) + (j+j'+1)(j-j')\} \\
g(J,j,j') &= \frac{1}{2J\sqrt{4J^2-1}} \sqrt{[J^2-(j-j')^2][(j+j'+1)^2-J^2]} \\
s(J,j,j') &= \\
&\frac{1}{2J(J+1)} \sqrt{(J-j+j'+1)(J+j-j')(j+j'-J)(j+j'+1+J)} \\
t(J,j,j') &= \\
&\frac{-1}{2J\sqrt{4J^2-1}} \sqrt{(J+j+j')(J+j+j'+1)(J+j-j')(J+j-j'-1)} \\
r(J,j,j') &= \\
&\frac{1}{2J\sqrt{4J^2-1}} \sqrt{(j+j'-J)(j+j'+1-J)(J-j+j')(J-j+j'+1)}
\end{aligned}\right\} \tag{III}$$

*

Die Quadratwurzeln sind stets positiv. Die Grössen

$$f', -g', s', -r', -t'$$

erhält man aus den Formeln (III) durch Vertauschen von j mit j'. Durch diese Formeln ist die Produktdarstellung $\vartheta_j \times \vartheta_j'$ explizit ausreduziert.

IV. *Berechnung der Matrix Ω.*. Die Matrix $\Omega = x_{ik}\, x'_{ik}$ kann man auf Grund der Formeln des II. Abschnittes berechnen. Die Matrixelemente von Ω, welche nicht verschwinden, schreiben wir zunächst mit Hilfe der Formeln (II. 13) für x_{ik} in folgender Form an[1]):

$$\text{(IV. 1)} \quad (j, j' \mid \Omega \mid j, j') = \frac{1}{j\,(j+1)\,j'\,(j'+1)}\, h_i\,(K, j, j')\, h_i'\,(K, j', j)\, d_k\,(J, j, j')\, d'_k\,(J, j', j)$$

$$\text{(IV. 2)} \quad (j, j' \mid \Omega \mid j-1, j') = \frac{1}{j\,\sqrt{4j^2-1}\,j'\,(j'+1)}\, c_i\,(K, j, j')\, h'_i\,(K, j', j-1)\, b_k\,(J, j, j')\, d_k'\,(J, j', j-1)$$

$$\text{(IV. 3)} \quad (j, j' \mid \Omega \mid j, j'-1) = \frac{1}{j\,(j+1)\,j'\,\sqrt{4j'^2-1}}\, h_i\,(K, j, j')\, c'_i\,(K, j', j)\, d_k\,(J, j, j')\, b_k'\,(J, j'\, j)$$

$$\text{(IV. 4)} \quad (j, j' \mid \Omega \mid j-1, j'+1) = \frac{1}{j\sqrt{4j^2-1}\,(j'+1)\sqrt{4\,(j'+1)^2-1}}\, c_i\,(K, j, j')\, c_i^{*\prime}(K, j'+1, j-1)\, b_k\,(J, j, j')\, b_k^{*\prime}\,(J, j'+1, j-1)$$

$$\text{(IV. 5)} \quad (j, j' \mid \Omega \mid j-1, j'-1) = \frac{1}{j\,\sqrt{4j^2-1}\,j'\,\sqrt{4j'^2-1}}\, c_i\,(K, j, j')\, c_i'\,(K, j', j-1)\, b_k\,(J, j, j')\, b_k'\,(J, j', j-1)$$

Weiter existieren noch die zu diesen Matrixelementen hermitesch konjugierten Elemente.

Die Matrizen $d_k\,(J, j, j')$, $b_k\,(J, j, j')$ sind durch die Formeln des II. Abschnittes gegeben; ebenso die gestrichenen Grössen. h_k und c_k entstehen aus ihnen durch Vertauschen von J mit K und M mit N.

Man erkennt, dass jedes Matrixelement zwei analog gebaute Faktoren enthält, die in symmetrischer Weise die Grössen $d_k\,(J)$,

[1]) Summationszeichen sind im folgenden weggelassen.

$b_k(J)$ und die Grössen $h_i(K)$, $c_i(K)$ enthalten. Es genügt, jeweilen den einen Faktor zu berechnen, der andere entsteht daraus durch Vertauschen von J mit K.

Es sind somit die 5 Skalare

$$d_k\, d_k', \quad b_k\, d_k', \quad d_k\, b_k', \quad b_k\, b_k^{*\prime} \text{ und } b_k\, b_k'$$

zu berechnen. Hiezu benützt man die im III. Abschnitt gegebenen Formeln und beachtet wieder die Relationen (II. 6) für D_k, B_k, B_k^*. So findet man z. B.

$$\begin{aligned} d_k(J, j, j')\, d'_k(J, j', j) = {} & J(J+1)\, f(J, j, j')\, f(J, j', j) \\ & - (2J-1)\, J\,.\, g(J. j, j')\, g(J, j', j) \\ & - (2J+3)(J+1)\, g(J+1, j, j')\, g(J+1, j', j) \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Vorzeichenregel des III. Abschnittes schon benützt, so dass die Grössen f und g durch (III.) gegeben sind. Auf diese Weise folgt

$$\left.\begin{aligned} & (j, j' \mid \Omega \mid j, j') = \frac{1}{4j(j+1)\, j'(j'+1)} A_1(J, j, j')\, A_1(K, j, j') \\ & (j, j' \mid \Omega \mid j-1, j') = \\ & \qquad \frac{1}{4j\sqrt{4j^2-1}\, j'(j'+1)} A_2(J, j, j')\, A_2(K, j, j') \\ & (j, j' \mid \Omega \mid j, j'-1) = \\ & \qquad \frac{1}{4j(j+1)\, j'\sqrt{4j'^2-1}} A_2(J, j', j)\, A_2(K, j', j) \\ & (j, j' \mid \Omega \mid j-1, j'+1) = \\ & \qquad \frac{1}{4j\sqrt{4j^2-1}\,(j'+1)\sqrt{4(j'+1)^2-1}} A_3(J, j, j')\, A_3(K, j, j') \\ & (j, j' \mid \Omega \mid j-1, j'-1) = \\ & \qquad \frac{1}{4j, j'\sqrt{(4j^2-1)(4j'^2-1)}} A_4(J, j, j')\, A_4(K, j, j') \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} A_1(J, j, j') &= J(J+1) - j(j+1) - j'(j'+1) \\ A_2(J, j, j') &= \{[J(J+1) - (j-j')(j-j'-1)]\,[(j+j') \\ &\qquad (j+j'+1) - J(J+1)]\}^{1/2} \\ A_3(J, j, j') &= \{[J^2 - (j-j'-1)^2]\,[(J+1)^2 - (j-j'-1)^2]\}^{1/2} \\ A_4(J, j, j') &= \{[J^2 - (j+j')^2]\,[(J+1)^2 - (j+j')^2]\}^{1/2} \end{aligned}$$

wobei $j + j' \geqslant J, K, \geqslant | j - j' |$; J, K ganz; j, j' halbganz. Besonders einfach ist der Fall $J = K = o$. In diesem Falle ist stets $j = j'$ und es ist

$$(j \mid \Omega \mid j) = (j \mid \Omega \mid j - 1) = 1$$

Alle anderen Matrixelemente verschwinden.

Die weitere Diskussion des durch (I. 11) und (IV) gegebenen Problems soll einer späteren Arbeit vorbehalten sein[1]).

Basel, Physikalische Anstalt und
Mathemat. physikal. Seminar.

[1]) M. Fierz und G. Wentzel, H. P. A. **17** (1944).