

Zur Verflüssigung von Gaskugeln

Autor(en): **Baumgartner, Willy**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **18 (1945)**

Heft III

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111603>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zur Verflüssigung von Gaskugeln

von Willy Baumgartner.

(1. III. 1945.)

I. Einleitung.

Die Frage nach den möglichen Aufbauformen und Zustandsänderungen einer im Gravitationsgleichgewicht befindlichen Gaskugel hat eine durchaus einseitige Entwicklung erfahren, indem nur der Übergang im Gebiete höherer Temperatur und die Konstitution bei ca. 10^6 — 10^7 °K untersucht wurde. Seit den bekannten Arbeiten EDDINGTON's, die den Strahlungsdruck als wesentliches Moment einführten, und unter dem Einfluss der Quantentheorie ist diese Tendenz nur verstärkt worden. Dass das zur Kontrolle der aufgestellten Theorien nötige empirische Tatsachenmaterial mindestens in Aussicht stand, konnte nur fördernd wirken. Und schliesslich ist nicht zu vergessen, dass bei tiefern Temperaturen (10^3 — 10^4 °K) der Stern infolge der mannigfachen spezifischen Stoffeigenschaften durchaus nicht mehr ein relativ einfaches Ding zu sein braucht¹). Die möglichen Varianten und Extremfälle häufen sich, andererseits wirkt die Kompliziertheit der mathematischen Fragestellungen geradezu abstossend; denn die soeben angedeuteten Komplikationen und dann insbesondere ein empfindlicher Mangel an reellen Erkenntnissen lassen höchstens eine allgemeine Diskussion — z. B. der auftretenden Differentialgleichungen — als zu einigermaßen plausibeln Resultaten führend erscheinen.

Es soll in dieser Arbeit versucht werden, mit Hilfe einiger bis heute bekannter Tatsachen über das Verhalten der Stoffe bei Temperaturen $\sim 10^4$ °K den Übergang einer gasförmigen Kugel in den flüssigen Zustand zu beschreiben. Im Hintergrund, es sei dies offen zugegeben, steht der Gedanke der Möglichkeit einer genauern Beschreibung der Vorgänge, die zur Bildung der heute vorhandenen Planeten führte. Dabei ist nicht etwa gemeint, dass die Entstehung des Planetensystems in globo untersucht wird, sondern dass aus einem anfänglichen, aus irgendwelchen Gründen vorhandenen Urnebel oder Riesengaskugel heraus die Bildung von dichteren Gas- und sogar Flüssigkeitszentren auftrat.

Schon mancherlei Vermutungen sind geäussert worden, ohne aber einer strengeren Theorie zu weichen. So ist etwa bekannt die

Kelvin'sche Anschauung, nach der die in der Aussensphäre der gasförmigen Erdkugel sich bildenden Tropfen ins Innere fielen, sich zuerst durch Verdampfung wieder auflösten, schliesslich aber doch das Kugelzentrum erreichten. Von diesem Augenblick an besitzt der Gasball einen flüssigen Kern, der nun weiter wächst. Es wird also bei dieser Anschauung eine Verflüssigung von innen heraus in Aussicht genommen. Dementsprechend ist auch eine solche von aussen her, oder sogar nur aussen, in Betracht zu ziehen. Man würde in letzterem Fall also einen gasförmigen Kern und eine flüssige Schale haben. Eine solche Annahme scheinen z. B. KUHN und RITTMANN²⁾ zu machen, wenn sie schreiben: „Als Ergebnis . . . erhalten wir offenbar zunächst eine flüssige Schale, die auf hochkomprimierter Solarmaterie ruht.“

Die Frage der Verflüssigung einer Gaskugel wurde von MERCIER³⁾ behandelt, indem mit Hilfe der Dampfdruckabhängigkeit von der Temperatur diejenigen Teile einer polytropen Gaskugel bestimmt werden, wo der Gasdruck grösser als der Sättigungsdruck des Dampfes ist und die sich also verflüssigen. Dabei wird die Masse der Kugel zu 10^{27} g angenommen, die Zentraltemperatur zu 6000 °K. Ferner wird die Kugel als aus Metaldampf, hauptsächlich von Eisen, bestehend angesehen. Das vorwiegende Ergebnis ist, dass Verflüssigung in den äusseren Teilen auftritt. MERCIER⁴⁾ schreibt: „Si le globe était initialement une masse gazeuse polytropique, des vapeurs métalliques ont dû tout de suite se condenser dans toute une couche extérieure et se précipiter par conséquent vers le centre.“ Und dann⁵⁾, im Gegensatz zu den Anschauungen von KUHN und RITTMANN, die die Eisenkernhypothese aufgeben: „. . . et la liquéfaction de vapeurs métalliques, que nous pouvons qualifier de spontanée, explique qu'un noyau de fer se soit formé“.

In Übereinstimmung mit JEFFREYS stellt MERCIER des weitern fest, dass die Dauer der Verflüssigung nur gering war, JEFFREYS gibt einige tausend Jahre (vgl. dazu aber Arch. de Genève **59**, 82, 1942, wo die Zeitdauer von JEFFREYS zu einigen Jahren abgeschätzt wird).

Betrachten wir eine im Schweregleichgewicht befindliche Gaskugel. Sie sei in ihren Temperaturverhältnissen so beschaffen, dass

1. noch keine oder bloss vernachlässigbare Verflüssigung aufgetreten ist,
2. Strahlungsdruck und Ionisation keine Rolle spielen,
3. ihr Aufbau derjenige einer Emden'schen⁶⁾⁷⁾⁸⁾ polytropen Gaskugel ist.

Zu 1.: Darin ist inbegriffen, dass die leichter kondensierbaren Stoffe sich in erhöhtem Masse im Innern konzentrieren, d. h. der

Aufbau der Gaskugel in erster Näherung aus zwei konzentrischen Teilen von verschiedenem chemisch-physikalischen Verhalten besteht. Innen wären dann die schwereren Metalle. Diese Differenzierung, in übertragenem Sinn ein Saigerungsvorgang, ist also bedingt durch die thermische Instabilität der Gaskugel bei tiefen Temperaturen — natürlich in Zusammenarbeit mit der Schwere —, indem eben die Kondensation die Aussenteile einer Gaskugel von leicht kondensierbaren Stoffen freihält. Und da diese Saigerung nicht allein auf Gravitationswirkungen beruht, so wird sich auch ein Einfluss in der nähern Umgebung des Mittelpunktes feststellen lassen.

Zu 2.: Nach MERCIER⁹⁾ ist als ungefähre Grenze eine Temperatur von der Größenordnung 10^4 °K zu setzen. Ferner ist nach EDDINGTON¹⁰⁾

$$1 - \beta = 0,003 \left(\frac{M}{\odot} \right)^2 \mu^4 \beta^4 \quad (1,1)$$

$$\beta = \frac{\text{Gasdruck}}{\text{Gesamtdruck}}$$

$$\odot = \text{Sonnenmasse}$$

$$\mu = \text{Molekulargewicht}$$

Für $1 - \beta \sim 10^{-3}$ und $\mu^4 \sim 10^6$ bedeutet dies

$$M \leq 10^{30} \text{ g} \quad (1,2)$$

Zu 3.: Ganz abgesehen davon, dass sich hier eine durchgebildete Theorie vorfindet, ist zu beachten, dass bei den gewählten relativ niedrigen Temperaturen wieder Konvektionsvorgänge für die Wärmeleitung massgebend sind. Der Transport von Energie durch Strahlung ist zu vernachlässigen.

Diese angedeutete Kugel wird sich nun bei Wärmeabgabe und Entropiezunahme zusammenziehen und dabei heisser werden. Es ist dies ja das bekannte Paradoxon von H. LANE. Von all den möglichen Arten dieser Kontraktion werden die Haupteigenschaften bereits durch die spezielle der gleichförmigen wiedergegeben. Sie lässt sich definieren als polytrope Zustandsänderung vom Index $4/3$ oder der Klasse 3 (kosmogonische Zustandsänderung oder Kosmogonide nach RITTER). Bei einer so verlaufenden Entwicklung ist unter anderem

$$p \cdot T^{-4} \quad (1,3)$$

eine Invariante. Diese letzte Aussage gilt, soweit das Gas ideal ist.

Es stellen sich nun hinsichtlich der Behandlung einer Verflüs-

sigung zwei Fragen, die, wie man ohne weiteres einsieht, eng miteinander verknüpft sind:

- a) Durch welchen analytischen Ausdruck soll die Kondensation erfasst werden, durch eine Zustandsgleichung etwa in v. d. Waalscher Form, reduziert oder unreduziert, oder durch Einführung des Begriffs des Sättigungsdruckes? Das eine Mittel hat mehr empirischen Charakter, das andere ist aus allgemeinen thermodynamischen Überlegungen herzuleiten.
- b) Wenn das Verflüssigungskriterium durch a) einmal festgelegt ist, so ist zu untersuchen, wie sich ihm gegenüber eine in gleichmässiger Kontraktion befindliche Gaskugel verhält.

Es werden hier beide in a) angegebenen Wege gebraucht.

II. Diskussion der verschiedenen Anschauungen

Wir nehmen zuerst die v. d. Waals'sche Gleichung zu Hilfe, und zwar in dem Sinne, dass sie ein einfacher Standardtyp einer Gleichung ist, die sowohl gasförmigen wie flüssigen Zustand beherrscht. Um diese Betonung des Beispielhaften zu verstärken, also spezifische Stoffkonstanten zu unterdrücken, brauchen wir sie in der reduzierten, etwas anders geschriebenen Form:

$$(\pi + 3 \varphi^2)(3 - \varphi) = 8 \vartheta \varphi \quad (2,1)$$

Dabei ist also

$$\pi = \frac{p}{p_k}; \quad \varphi = \frac{\varrho}{\varrho_k}; \quad \vartheta = \frac{T}{T_k} \quad (2,2)$$

wo gewöhnlich p_k , ϱ_k , T_k die Zustandsgrössen beim kritischen Punkt sind. Hier sollen sie mehr als Parameter auftreten, um den Zustandsraum p , ϱ , T des in Frage stehenden Gases formelmässig zu beherrschen. In der Darstellung (2,1) der Zustandsgleichung sind die wichtigeren Punkte folgende:

α) Nullstellen des Drucks:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= \frac{9 + \sqrt{81 - 96 \Theta}}{6} > 0 \\ \varphi_3 &= \frac{9 - \sqrt{81 - 96 \Theta}}{6} > 0 \end{aligned} \quad (2,3)$$

Für $\Theta > \frac{27}{32}$ gibt es nur die eine reelle Nullstelle $\varphi_1 = 0$.

β) Pole des Drucks: $\varphi = 3$ ist für alle Isothermen ein Pol.

γ) Wendepunkt: Die Isotherme $\Theta = 1$ hat an der Stelle $\varphi = 1$ einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente (vgl. Fig. 1.)

In bekannter Weise führt ein Weg im $\pi - \varrho$ -Diagramm, der einen mit wachsendem ϱ absteigenden Isothermenast trifft, zu Verflüssigung. Andererseits ist die gleichförmige Kontraktion im $\pi - \varrho$ -Diagramm durch die Kurve (vgl. (1,3)):

$$p = \Gamma \varrho^{4/3} \quad (2,4)$$

oder

$$\pi = \Gamma' \varrho^{4/3} \quad (2,5)$$

dargestellt. Dabei ist

$$\Gamma' = \Gamma \frac{\varrho_K^{4/3}}{p_K} \quad (2,6)$$

Damit unsere Kosmogenide absteigende Kurvenstücke der Isothermen trifft, muss Γ' genügend klein sein.

Es ist vorteilhaft, dass wir die Kosmogenide in dieser Weise temperaturunabhängig schreiben können. Die Gleichung (2,4) folgt ja rein aus Schwere-Druckgleichgewichtsüberlegungen; welche Änderungen die Temperatur erfährt, muss aus der Zustandsgleichung erschlossen werden (vgl. EMDEN⁷), S. 391).

Nun kann man aber weiter mit Hilfe der Theorie der polytropen Gaskugeln einige Aussagen machen über die Aussicht, dass eine Gaskugel von gegebener Polytropenklasse, Masse und Radius sich in diskontinuierlichem Vorgang zu verflüssigen Gelegenheit hat, trotzdem sie nach LANE heisser wird. Man bestimmt dazu einfach die Konstante Γ in (2,4) als Funktion von Masse M , Radius R und dem Ort, wo das betreffende Teilchen am Anfang der Entwicklung im Sterninnern stand.

Die Emden'sche Gleichung für die Klasse n lautet⁸)

$$\frac{d^2 u}{d \xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{du}{d \xi} + u^n = 0 \quad (2,7)$$

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \varrho_Z u^n \\ p &= p_Z u^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (2,8)$$

Die Zentraldichte ϱ_Z berechnet sich aus

$$\varrho_Z = \frac{1}{4 \pi} \frac{M}{R^3} \left[- \xi \frac{d \xi}{d u} \right]_0 \quad (2,9)$$

der Zentraldruck p_Z aus

$$p_Z = \frac{G}{4 \pi (n+1)} \frac{M^2}{R^4} \left[\left(\frac{d \xi}{d u} \right)^2 \right]_0 \quad (2,10)$$

Der Index $_0$ soll auf den Randwert hindeuten. G ist die Gravitationskonstante.

Die Konstante Γ ist zu bestimmen aus

$$\Gamma = p \cdot \varrho^{-4/3} \quad (2,4)$$

Es ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= (4\pi)^{1/3} GM^{2/3} u^{1-\frac{n}{3}} \Phi(\xi_0) \\ \text{wo } \Phi(\xi_0) &= \frac{1}{n+1} \left[-\xi^2 \frac{du}{d\xi} \right]_0^{-2/3} \end{aligned} \right\} \quad (2,11)$$

Interessant ist insbesondere das Zentrum, dort ist $u = 1$ und man hat

$$\Gamma_Z = (4\pi)^{1/3} GM^{2/3} \Phi(\xi_0) \quad (2,12)$$

Der Faktor $(4\pi)^{1/3} G \Phi(\xi_0) \cdot 10^7$ hat die Grössenordnung 1 für alle endlichen Kugeln, d. h. $0 \leq n < 5$. Also ist

$$\Gamma_Z \sim M^{2/3} \cdot 10^{-7} \quad (2,13)$$

und schliesslich entsprechend (2,6)

$$\Gamma_Z' \sim \frac{M^{2/3} \varrho_k^{4/3}}{p_k \cdot 10^7}$$

Da für Stoffe, für die man p_k und ϱ_k kennt, $\varrho_k \sim 1 \text{ g/cm}^3$, so folgt

$$\Gamma_Z' \sim \frac{M^{2/3}}{p_k} 10^{-7} \quad (2,14)$$

Für eine genauere Bestimmung von Γ_Z' wäre noch p_k zu wählen, sowie M . Wir nehmen nun umgekehrt $\Gamma_Z' \sim 1/2$ an, legen also die Kosmogenide durch das Gebiet der Verflüssigung (vgl. Fig. 1) und erhalten:

$$M \sim p_k^{3/2} \cdot 10^{10} \text{ g}, \quad (2,15)$$

falls p_k in cgs-Einheiten ausgedrückt ist.

Nehmen wir, rein versuchsweise, das p_k von Wasser

$$p_{k, \text{H}_2\text{O}} = 195 \text{ atm}$$

so ergibt sich

$$M \sim 10^{22} \text{ g}$$

Den kritischen Druck von Metallen schätzen wir zu ca. 10^4 atm . ab. Das würde eine Masse ergeben:

$$M \sim 10^{26} \text{ g}$$

Dies ist nun um Grössenordnungen kleiner als die Masse der Pla-

neten. Im übrigen ist natürlich dann die Temperatur nicht so hoch, wie sie gemäss den idealen Gasgesetzen zu berechnen wäre. Auf alle Fälle sehen wir, dass kleinere Massen zu Verflüssigung geeignet sind. Ferner erkennt man aus der Figur 1 ohne weiteres, wie die Kosmogenide zuerst mit wachsendem φ die Isothermen in Richtung steigender Temperaturen schneidet, um dann aber wieder für $\varphi \rightarrow 3$ zu tiefern zu führen, eine schon z. B. von VÉRONNET¹¹⁾ des nähern besprochene Tatsache.

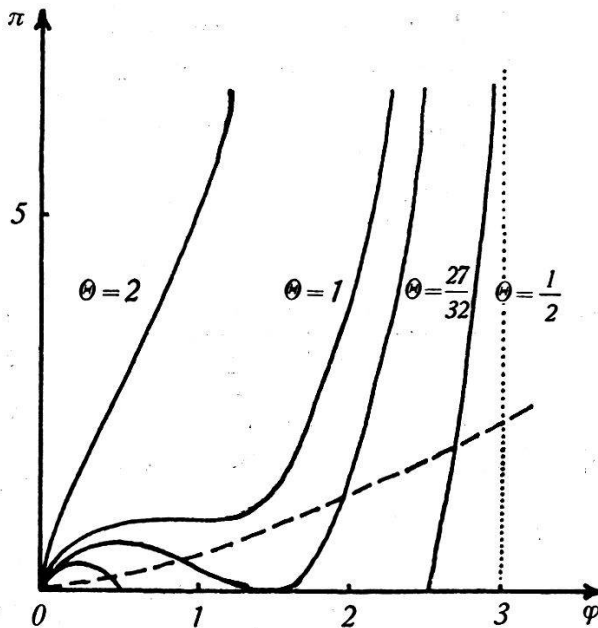


Fig. 1.

--- Kosmogenide $\pi = \frac{1}{2} \varphi^{4/3}$

Die oben angegebene Masse von 10^{26} g scheint also eine maximale Grenze für Kondensation von Gaskugeln zu bedeuten. Auf alle Fälle kann man annehmen, dass für grössere Massen $M \sim 10^{30}$ g, wie sie die grossen Planeten zeigen, ein direktes Entstehen aus einer Gaskugel durch Verflüssigung im Innern — und nicht nach der schon kurz erwähnten Kelvin'schen Anschauung — nicht in Frage kommt. Ob sie sich infolge Einbettung in einen grössern Nebel (Urnebel im Sinn von LAPLACE) durch Aufsammeln umliegender Materie nachträglich vergrössern konnten, ist zu verneinen bei einem Massenverhältnis von 1:1000. Die 10^3 mal grössere Masse dieser Umgebung würde die separate Existenz einer Gaskugel gar nicht zulassen.

MERCIER⁴⁾ hat, wie schon erwähnt, durch Vergleich der Dampfdruckkurve von Metallen und der Temperatur-Druckverhältnisse einer polytropen Kugel die Verflüssigungszonen bestimmt, also diejenigen Teile der Gaskugel, die sich infolge Übersättigung kon-

densieren. Es soll dieser Vergleich verallgemeinert werden. Wir gehen hier also auf dem zweiten Weg vor!

Für die Polytropenklasse u gilt

$$p = K T^{n+1} \quad (2,16)$$

Möglichkeit zur Verflüssigung ist also sicher vorhanden, wenn die Kurve (2,16) im $p - T$ -Diagramm oberhalb der Dampfdruckkurve verläuft. Das ist aber weiterhin für ein um so grösseres Temperaturintervall $0 \leq T \leq T_0$ der Fall, je grösser K ist. Der Polytropenexponent n kommt nicht so sehr in Betracht, da er für Kugeln von endlichem Radius immer < 5 ist. Es gilt

$$K = p \cdot T^{-(n+1)}$$

und da

$$T = T_Z \cdot u \quad (2,17)$$

mit⁹⁾

$$\left. \begin{aligned} T_Z &= \frac{G\mu}{\mathfrak{R}} \frac{M}{R} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left[-\xi \frac{au}{a\xi} \right]_0} \\ \mu &= \text{Molekulargewicht} \\ \mathfrak{R} &= \text{Gaskonstante} = 8,31 \cdot 10^7 \text{ cgs} \end{aligned} \right\} \quad (2,18)$$

so ergibt sich für K

$$K = \mu^{-(n+1)} M^{1-n} R^{n-3} \frac{\mathfrak{R}^{n+1} (n+1)^n}{G^n} \psi(\xi_0) \quad (2,19)$$

wo $\psi(\xi_0)$, wie angedeutet, nur von den Randwerten der Emden'schen Normallösung abhängig ist. $\psi(\xi_0)$ ist von Null verschieden und unerheblich für die Grössenordnung von K . In Abhängigkeit von M und R zeigt sich, dass folgende Verhältnisse günstig sind:

1. für $0 < n < 1$: grosse Masse und kleiner Radius, also grosse mittlere Dichte,
2. für $n = 1$: kleiner Radius — es besteht Massenunabhängigkeit —,
3. für $1 < n < 3$: kleine Masse und kleiner Radius,
4. für $n = 3$: kleine Masse — der Radius spielt keine Rolle —,
5. für $n > 3$: kleine Masse und grosser Radius.

Der Bereich, wo also grosse Massen nicht hindernd wirken ist auch bei diesem Kriterium klein, so klein, dass er wohl nicht ins Gewicht fällt.

Man wird sich fragen, ob denn die Voraussetzung, dass eine polytrophe Kugel im Zustande der Übersättigung existenzfähig sei, sie sich nicht rasch verflüssige und in sich zusammenstürze, zutreffe. Dazu ist aber zu bemerken: Die freiwerdende Kondensationswärme führt sofort ein Gleichgewicht herbei in dem Sinne,

dass genau soviel verflüssigt wird, als dabei freiwerdende Kondensationswärme nach aussen abstrahlt. Dadurch tritt offensichtlich ein bremsendes Moment auf. Wenn wir uns einigermaßen ein Bild machen wollen von den dabei auftretenden Möglichkeiten und Vorgängen, so können wir die Ergebnisse der thermodynamischen Meteorologie¹²⁾ zu Hilfe ziehen, obwohl ein wesentlicher Unterschied besteht, indem ein Gemisch von Kondensat (Wasser) und Gas (Luft) vorhanden ist und letzterer Bestandteil mengenmässig stark überwiegt. Diese Ergebnisse enthalten zwei wichtige Punkte:

- a) Das Wasser fällt nicht von erreichter Sättigung an aus, sondern bleibt im Trägergas schwebend. Tropfen im Sinne des täglichen Sprachgebrauches sind sogar an die Existenz von Eiskernen gebunden (Eiskeimtheorie von BERGERON, FINDEISEN u. a.¹³⁾). Sonst kommt es höchstens zum bekannten feinen Nieselregen. Die Erklärung liefert bekanntlich ein Kelvin'sches Theorem.
- b) Für die Kondensationsvorgänge in der terrestrischen Atmosphäre spielt der Begriff der Feuchtadiabate¹⁴⁾ (H. HERTZ, W. v. BETZOLD) die ausschlaggebende Rolle. Dabei ist unter Feuchtadiabate ein Weg adiabatischer Zustandsänderung in Verbindung mit Kondensation zu verstehen. Je nachdem, ob das gebildete flüssige Wasser ausfällt oder nicht, spricht man von irreversibler oder reversibler Feuchtadiabate.

Entsprechend der Verallgemeinerung, die ZÖLLNER und insbesondere EMDEN durch die Einführung polytroper Zustandsänderungen durchführten, kann man auch bei einer „feuchten“ Dampfkugel — sie enthält in erheblichem Ausmass Stoffe, die bei geringer Temperaturänderung ihren Aggregatzustand wechseln — von verschiedenen „Feuchtpolytropen“ sprechen. Da es aber aussichtslos ist, eine einigermaßen überschaubare Darstellung der zuständigen, der Emden'schen entsprechenden Differentialgleichung durchzuführen, drehen wir die Frage eben so, dass polytroper Aufbau vorausgesetzt wird und dann die für die Verflüssigung in Betracht kommenden Zonen aufgesucht werden. Das ist aber genau das obige Verfahren.

Die Möglichkeit, wonach sich um einen gasförmigen Kern eine flüssige Schale bilden kann, ist kaum in Betracht zu ziehen. Denn wenn eine Verflüssigung auftritt, so entstehen dabei doch Tropfen. Diese haben aber eine grössere Dichte als das umgebende Gas, sie sinken gegen das Zentrum. Wenn sie an Ort und Stelle bleiben, dann bilden sie, solange sie genügend klein sind, eventuell Wolken, die sich aber nie zu einer zusammenhängenden Flüssigkeitsschicht ergänzen. Dafür liefern die terrestrischen Verhältnisse deutliche

Fingerzeige. Es gibt allerdings eine Möglichkeit zur Ausbildung einer Schalenstruktur, d. h. innen Gaszustand, aussen flüssig. Bei Rotation nämlich kann die Zentrifugalbeschleunigung gerade die Schwerewirkung aufheben. Aber das ist nur bei bestimmtem Abstand vom Zentrum möglich. Dieses Gleichgewicht ist äusserst labil, und Störungen sind in genügender Anzahl und von genügender Grösse vorhanden (eruptive Ausbrüche, Fluterscheinungen, Grösßenänderung des gasförmigen Kerns usw.). Plausible Ergebnisse zeigt die Diskussion der Kelvin'schen Anschauung, zu der nun übergegangen werden soll.

III. Feuchtkugeln (FK)

Die Kelvin'sche Anschauung erklärt sich den Vorgang der Verflüssigung folgendermassen*):

Die in den äusseren Teilen der Gaskugel gebildeten Kondensationsprodukte fallen ins Innere der Kugel und verdampfen dort; indem die Abkühlung immer mehr nach innen dringt, stossen auch die Tropfen weiter vor, um schliesslich das Zentrum oder doch seine Umgebung zu erreichen. Die Abkühlung steht nicht etwa im Widerspruch mit dem Lane'schen Paradoxon. Denn einmal wird dies nicht mehr strenge gültig sein, was bereits oben (S. 173) festgestellt wurde; andererseits bewirkt gerade der „Regen“ eine besonders starke Abkühlung, die ja nicht durch praktisch unerschöpfliche atomare Energiequellen wie in grossen Sternen verhindert wird. Die Tropfen werden während ihrem Fall nach innen verdunsten und damit eine Dichtevergrösserung der betreffenden Partien herbeiführen. Fassen wir eine Schale der Kugel mit bestimmtem Abstand vom Zentrum ins Auge, so werden sie dort so lange verdunsten, bis der Sättigungsdruck erreicht ist, oder wenn der Druck bereits anfangs gross genug war, werden sie die Kondensation erheblich beschleunigen. Denn die in solchen Schichten schon vorher auftretende Kondensationswärme wurde anfangs bloss durch Konvektion abgeleitet. Diese Konvektionsströme haben zuerst allein den Grad der Verflüssigung bestimmt. Da aber bereits eine Massengrenze angegeben wurde, unterhalb deren, bloss auf diese Art, Kondensation möglich ist, so lässt sich einzig durch Verflüssigung infolge zusätzlicher Abkühlung gemäss den eben gemachten Ausführungen eine Erhöhung dieser Schranke erwarten. Dass das in der Tat der Fall ist, werden wir unten sehen.

*) Genau verhält es sich wie folgt: KELVIN selbst postuliert seine Hypothese für den Vorgang der Verfestigung der Erde¹⁵), NÖLKE¹⁶) überträgt sie in präziserer Fassung auf denjenigen der Verflüssigung.

Zu diesem gerade im Zuge befindlichen Material, nach flüssig oder gasförmig zu „kippen“, kommen hinzu Gase, die nicht von Kondensation betroffen werden. Man wird also ein Gemisch von beiden haben, und der vorwiegende Bestandteil wird die Temperatur-, Druck- und Dichteverhältnisse bestimmen. Spezialisieren wir uns auf den Fall, wo der Gasbestandteil gegenüber dem sich verflüssigenden zurücktritt und nur als Trägergas die Sinkgeschwindigkeit der Tropfen beeinflusst, so kann man dann für den Aufbau der Kugel, d. h. den die äusseren Schichten tragenden Druck, gerade den Dampfdruck verantwortlich machen. Offenbar bildet dasjenige Element aus all den vorhandenen eine solche Kugel, das

1. bei hoher Temperatur sich kondensiert und
2. in reichlicher Menge vorhanden ist.

Diese Bedingungen erfüllen¹⁷⁾ vor allem Silicium und Eisen. Sauerstoff fällt aus wegen 1.

Die Kugel wird also im wesentlichen aus einem im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen zweiphasigen System Dampf-Flüssigkeit bestehen. In jedem Raumelement der Kugel hat man, um den Terminus technicus zu gebrauchen, Nassdampf, jedes Raumelement ist „feucht“. Man könnte auch von einer Nebelkugel sprechen in Anlehnung an bekannte terrestrische Analoga.

Bei einer diesen Annahmen entsprechenden FK haben wir zur Bestimmung von p , T , ρ als Funktion des Radius r drei Beziehungen:

1. eine hydrodynamische

$$\frac{dp}{dr} = -g\rho \quad (3,1)$$

mit

$$r^2g = 4\pi G \int_0^r \rho r^2 dr \quad (3,2)$$

G ist die Gravitationskonstante = $6,68 \cdot 10^{-8}$ cgs;

2. den Dampfdruck p , gegeben durch die Gleichung von CLAPEYRON-CLAUSIUS

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v'' - v''')} \quad (3,3)$$

λ = Verdampfungswärme
 v'' = spezifisches Volum des Dampfes
 v''' = spezifisches Volum der Flüssigkeit

3. die Zustandsgleichung:

$$F(p, T, \rho) = 0 \quad (3,4)$$

Wir nehmen zur Vereinfachung als Zustandsgleichung die der idealen Gase und setzen weiter λ als konstant voraus. Beide Voraussetzungen sind natürlich von einer heutzutage nicht näher abschätzbaren Ungenauigkeit. Unter dieser Voraussetzung und derjenigen, dass $v''' \ll v''$, folgt dann aus (3,3)

$$p = P e^{-\frac{L}{T}} \quad (3,5)$$

mit

$$L = \frac{\lambda \mu}{\mathfrak{R}} \quad (3,6)$$

Somit ist

$$\varrho = \frac{\mu}{\mathfrak{R}} \frac{p}{T} = -\frac{\mu P}{\mathfrak{R} L} \left(\frac{p}{P}\right) \ln \left(\frac{p}{P}\right) \quad (3,7)$$

In bekannter Weise folgt aus (3,1) und (3,2)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\varrho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \varrho \quad (3,8)$$

und also mit (3,7)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\mathfrak{R} L}{\mu} \frac{\frac{d}{dr} \left(\frac{p}{P} \right)}{\left(\frac{p}{P} \right) \ln \left(\frac{p}{P} \right)} \right) = -\frac{4\pi G \mu P}{\mathfrak{R} L} \left(\frac{p}{P} \right) \ln \left(\frac{p}{P} \right) \quad (3,9)$$

Wir substituieren

$$\left. \begin{array}{l} \alpha r = x \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G \mu^2 P}{\mathfrak{R}^2 L^2} \\ [\alpha] = \text{cm}^{-1} \end{array} \right\} \quad (3,10)$$

$$\frac{p}{P} = e^{-\frac{L}{T}} = y \quad (3,11)$$

und erhalten

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y \ln y} \right) + y \ln y = 0 \quad (3,12)$$

Ausgerechnet ergibt dies

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1 + \ln y}{y \ln y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + (y \ln y)^2 = 0 \quad (3,13)$$

Wir machen keinen grossen Fehler, wenn wir vor das Glied mit $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ eine 2 setzen und so erreichen, dass die Differentialgleichung vollständig integrierbar ist. Numerische Behandlung und insbesondere das Studium der Beziehungen dieser Gleichung (3,13)

mit der für die isotherme Gaskugel gültigen Beziehung¹⁸⁾ haben diese Sachlage bestätigt*). Es ist dann, wie man durch Einsetzen sofort ersieht:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{A}{x^2} - \frac{x}{3} \right) (y \ln y)^2 \quad (3,14)$$

und daraus

$$\int \frac{dy}{(y \cdot \ln y)^2} = -\frac{A}{x} - \frac{x^2}{6} + B \quad (3,15)$$

A und B sind Integrationskonstanten. Das Integral links in (3,15) lässt sich auf ein Exponentialintegral zurückführen. Schreiben wir

$$\overline{Ei}(x) = \int_c^x \frac{e^t}{t} dt \quad (3,16)$$

wo c in den Jahnke-Emde'schen Tafeln (2. Auflage, S. 83) den Wert $\sim 0,37$ hat, so bekommt man nach Substitution von $y = e^{-t}$:

$$\int_{\eta}^{\tau} \frac{dy}{(y \ln y)^2} = - \int_{\tau}^{\eta} \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^{\tau}}{\tau} - \int_{\tau}^{\eta} \frac{e^t}{t} dt \quad (3,17)$$

bis auf eine Konstante. Es folgt als endgültige Lösung

$$\overline{Ei}(\tau) - \frac{e^{\tau}}{\tau} = \frac{A}{x} + \frac{x^2}{6} - B \quad (3,18)$$

Diese zweidimensionale Lösungsschar ist einfach zu überblicken. Sie hat eine Singularität in Form eines Poles in $x = 0$; durch Wahl von $A = 0$ erhalten wir eine im Endlichen überall reguläre eindimensionale Schar. Wir treffen also ähnliche Eigenschaften wie bei der Emden'schen Differentialgleichung an. Nur wird dann dort

*) Ein Verbindungsweg ist folgender:

Durch die Transformation

$$\ln y = -\frac{1}{\Phi} \quad \Phi = \frac{T}{L}$$

geht (3,12) über in

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dx} \right) + \frac{1}{\Phi} e^{-\frac{1}{\Phi}} = 0$$

Da uns nur das Gebiet $0 < \Phi < 1$ interessiert, setzen wir

$$\frac{1}{\Phi} e^{-\frac{1}{\Phi}} \sim \Phi^n = e^{\Omega}$$

Für $\xi = \sqrt{n} x$ erhalten wir sofort

$$\frac{d^2 \Omega}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\Omega}{d\xi} + e^{\Omega} = 0,$$

die Differentialgleichung der isothermen Gaskugel.

durch die sog. Polytropentemperatur ein weiterer Parameter frei. Hier dagegen ist für $A = 0$ etwa durch Wahl der Zentraltemperatur alles bestimmt.

Indem wir die genauere Diskussion der allgemeinen Lösung auf später verschieben, behandeln wir zunächst den Fall $A = 0$, der im Zentrum regulär ist, eine dort verschwindende Ableitung hat ($y \neq 0!$) und den wir als vollständige FK bezeichnen (VFK). Setzen wir also $A = 0$ und bestimmen B durch Wahl der Zentraltemperatur, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{6} \sqrt{\Phi(\tau) - \Phi(\tau_Z)} \\ &= 2,45 \sqrt{\Phi(\tau) - \Phi(\tau_Z)} \end{aligned} \right\} \quad (3,19)$$

Dabei ist

$$\Phi(\tau) = \overline{Ei}(\tau) - \frac{e^\tau}{\tau} \quad (3,20)$$

Nun gilt nach JAHNKE-EMDE (2. Auflage, S. 80)

$$\overline{Ei}(\tau) = \frac{e^\tau}{\tau} H(\tau) \quad (3,21)$$

$$\left. \begin{aligned} H(\tau) &\approx 1 + \frac{1!}{\tau} + \frac{2!}{\tau^2} \\ &\tau \gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (3,22)$$

Nach (3,17) ist

$$\tau = \frac{L}{T} \quad (3,17a)$$

oder also für $T \rightarrow 0: \tau \rightarrow \infty$. Aber dann gilt asymptotisch

$$\Phi(\tau) \sim \frac{e^\tau}{\tau^2} \quad (3,23)$$

d. h.

$$x \sim 2,45 \cdot \frac{e^{\frac{\tau}{2}}}{\tau} \quad (3,24)$$

Es gibt also im Endlichen keine Nullstelle der Temperatur. Uns interessieren weiter die Grössen p , T , ϱ , r , $M(r)$. Man findet leicht:

$$\left. \begin{aligned} p &= P e^{-\tau} \\ T &= \frac{L}{\tau} \\ \varrho &= \frac{\mu P}{\mathfrak{R}L} \tau e^{-\tau} \end{aligned} \right\} \quad (3,25)$$

Für die Masse hat man

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \varrho r^2 dr = -\frac{4\pi\mu P}{\mathfrak{R}L} \frac{1}{\alpha^3} \int_0^x y \ln y \xi^2 d\xi$$

Mit Hilfe von (3,12) ergibt sich sofort

$$M(r) = \frac{4\pi P\mu}{\mathfrak{R}L\alpha^3} \left(+ \frac{\xi^2}{y \ln y} \frac{dy}{d\xi} \right)_0^x \quad (3,25a)$$

und schliesslich wegen (3,14), (3,19)

$$M(r) = \frac{4\pi P\mu}{\mathfrak{R}L\alpha^3} \sqrt{24} \left[\Phi(\tau) - \Phi(\tau_Z) \right]^{3/2} e^{-\tau} \cdot \tau \quad (3,26)$$

Für ein $\tau \gg 1$ hat man hier

$$M(r) = \text{const} \times \frac{e^{\tau/2}}{\tau^2} \quad (3,27)$$

Endlich ist r zu erhalten aus

$$r = x \alpha^{-1} = x \sqrt{\frac{\mathfrak{R}^2 L^2}{4\pi G P \mu^2}} \quad (3,28)$$

Für die weitere Auswertung der VFK gehen wir über zur Frage der Bestimmung von P , L , μ . Besonders interessant werden natürlich Kugeln aus schwer verdampfenden Stoffen sein, die mit grossem Prozentsatz am Aufbau der Planeten beteiligt sind. Dies ist der Fall, wie oben (S. 177) angedeutet, etwa bei Eisen. Den Wert von μ wählen wir entsprechend zu $\mu = 57$; bekanntlich sind ja Metaldämpfe einatomig. Die Abhängigkeit der VFK von μ ist durch die Dichte ($\rho \sim \mu$), die Masse ($M \sim \mu^{-2}$) und den Radius ($r \sim \mu^{-1}$) dargestellt. Weiter ist die Masse $\sim P^{-1/2}$. Eine Unsicherheit in der Bestimmung von μ und P , die übrigens bei höherer Temperatur ausgeprägter ist als bei niedrigerer, wirkt sich also nicht stark aus.

Die Konstante L , im wesentlichen die Verdampfungswärme (vgl. 3,5, 3,6) hat dagegen einen sehr starken Einfluss, da sie im Exponenten steht. L ist bekanntlich, bei festem μ , eine mit wachsender Temperatur abnehmende Grösse; im kritischen Punkt ist sie sogar Null. Um uns über diese Temperaturabhängigkeit — die von μ vernachlässigen wir — ein Bild zu machen, sei nach den Critical Tables¹⁹⁾ der Dampfdruck von Zink und Kadmium angegeben:

$${}^{10}\log p_{\text{Cd}} = -111 \frac{52,23}{T} - 1,203 {}^{10}\log T + 12,107$$

$${}^{10}\log p_{\text{Zn}} = -127 \frac{52,23}{T} - 1,203 {}^{10}\log T + 12,184$$

p wird dabei in Tor gemessen.

Die Abhängigkeit ist also ziemlich stark, für Eisen dürfte sie etwas kleiner sein.

Gegenüber der Bedeutung von L durch Auftreten im Exponenten spielt sein Vorkommen in der Grösse α eine untergeordnete Rolle.

Es seien nun für einige Elemente die Grössen P und L angegeben¹⁹⁾:

Element	L	P
Kohlenstoff . . .	$6,49 \cdot 10^4$	$4,0 \cdot 10^9$
Eisen	$3,72 \cdot 10^4$	$3,1 \cdot 10^7$
Nickel	$3,72 \cdot 10^4$	$4,0 \cdot 10^7$
Silicium (fest) . .	$2,04 \cdot 10^2$	$9,0 \cdot 10^5$
Magnesium . . .	$3,13 \cdot 10^3$	$9,9 \cdot 10^{12}$

P ist so bestimmt, dass der Druck in Tor herauskommt.

Es werde noch kurz die Einwirkung der Beimischung von andern Stoffen auf die Grössenverhältnisse der VFK besprochen. Weil die Voraussetzung eines Phasengleichgewichtes das Vorhandensein von Kondensat in jedem Raumelement bedeutet, so nehmen wir von dieser Kondensatdichte, sowie der Trägergasdichte an, dass beide proportional der Dampfdichte sind, also

$$\varrho_{\text{Kond}} + \text{Träger} = \varkappa \cdot \varrho$$

ist, und dass ihr Vorhandensein sich nur gravitations- und massenmässig auswirke. Dann bedeutet dies für α eine Multiplikation mit $(1 + \varkappa)^{1/2}$, für die Masse eine solche mit $(1 + \varkappa)^{-1/2}$, d. h. eine kleinere Kugel mit kleinerer Masse. Die VFK wird eben so stark verkleinert, dass auch die Vergrösserung der Dichte nicht hinreicht, um gleiche Masse wie ohne Beimischung zu erhalten. Überhaupt ist gerade die Frage der Beimischung anderer Stoffe ein Faktor, der uns veranlasst, die Massenbestimmung nur auf Zehnerpotenzen als zuständig anzusehen.

Man findet nun gemäss (3,28)

$$\alpha_{\text{Fe}} = 3,43 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^{-1}. \quad (3,29)$$

Für den in Gleichung (3,26) auftretenden Faktor

$$\mathfrak{M} = \frac{4 \pi P \mu}{\mathfrak{H} L \alpha^3} g \quad (3,30)$$

ergibt sich

$$\mathfrak{M}_{\text{Fe}} = 2,38 \cdot 10^{26} g. \quad (3,31)$$

Weiter bestehen folgende Relationen zwischen τ_Z und T_Z , der Mittelpunktstemperatur, gemäss (3,25):

T_Z^0	37200	18600	12400	9300	7400	6200	5300	4600	4100	3700
τ_Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Da wir für x und M eine Differenz $\{\Phi(\tau) - \Phi(\tau_Z)\}$ haben, so sehen wir unter Beachtung der Wertetabelle für $\Phi(\tau)$:

Wertetabelle

τ	$e^{-\tau}$	$\tau e^{-\tau}$	$\Phi(\tau)$
1	$3,68 \cdot 10^{-1}$	$3,68 \cdot 10^{-1}$	$-8,23 \cdot 10^{-1}$
1,35	2,59	3,49	0,00
2	1,35	2,70	1,26
3	$4,98 \cdot 10^{-2}$	1,50	3,24
4	1,83	$7,32 \cdot 10^{-2}$	5,98
5	$6,74 \cdot 10^{-3}$	3,38	$1,05 \cdot 10^1$
6	2,48	1,49	1,88
7	$9,12 \cdot 10^{-4}$	$6,38 \cdot 10^{-3}$	3,48
8	3,35	2,68	6,78
9	1,23	1,11	$1,38 \cdot 10^2$
10	$4,54 \cdot 10^{-5}$	$4,54 \cdot 10^{-4}$	2,90
11	1,67	1,84	6,28
12	$6,14 \cdot 10^{-6}$	$7,37 \cdot 10^{-5}$	$1,40 \cdot 10^3$
13	2,26	2,94	3,17
14	$8,32 \cdot 10^{-7}$	1,16	7,29
15	3,06	$4,58 \cdot 10^{-6}$	$1,70 \cdot 10^4$
16	1,13	1,81	3,97
17	$4,14 \cdot 10^{-8}$	$7,04 \cdot 10^{-7}$	$0,95 \cdot 10^5$
18	1,52	2,74	2,30
19	$5,60 \cdot 10^{-9}$	1,06	5,58
20	2,06	$4,12 \cdot 10^{-8}$	$1,35 \cdot 10^6$
21	$7,58 \cdot 10^{-10}$	1,59	3,32
22	2,79	$6,14 \cdot 10^{-9}$	$0,82 \cdot 10^7$
23	1,03	2,36	2,03
24	$3,78 \cdot 10^{-11}$	$9,08 \cdot 10^{-10}$	$0,50 \cdot 10^8$
25	1,39	3,48	1,26
26	$5,11 \cdot 10^{-12}$	1,33	3,16
27	1,88	$5,07 \cdot 10^{-11}$	$0,79 \cdot 10^9$
28	$6,91 \cdot 10^{-13}$	1,94	2,01
29	2,54	$7,37 \cdot 10^{-12}$	$0,50 \cdot 10^{10}$
30	$9,36 \cdot 10^{-14}$	2,81	1,28

Die Kugel ist nur sehr schwach durch die Zentraltemperatur beeinflusst, sowohl was die Masse wie was den Radius betrifft. Dabei ist natürlich ein genügend grosser Randwert von τ , d. h. genügend kleiner Randwert der Temperatur vorausgesetzt. Der Begriff „Randwert“, ebenso weiter unten derjenige der „Randtemperatur“, soll sich auf die äussersten Teile der *VFK* beziehen. Wir stellen also fest, dass die Zentraltemperatur einer sich verflüssigenden Gaskugel, sobald sie unterhalb der kritischen Temperatur liegt,

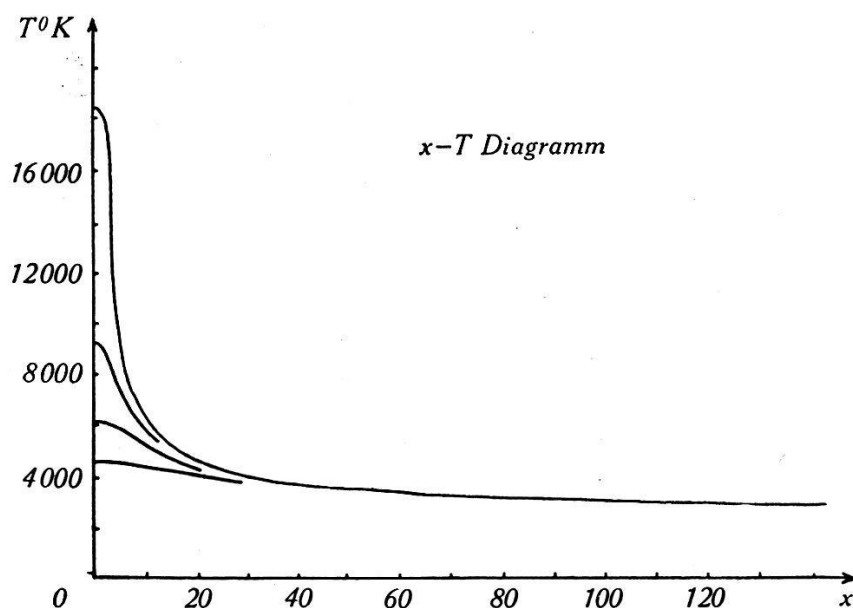


Fig. 2.

kein Hindernis für eine stabile *VFK* darstellt. Dies kommt, wie man am x - T -Diagramm ersieht (Fig. 2), daher, dass in der Hauptsache die *VFK* nahezu isotherm ist und so der Einfluss der Zentraltemperatur unterdrückt wird; denn diese Fastisothermtemperatur ist weitgehend unabhängig von den zentralen Verhältnissen.

τ	x für $\tau_Z \leq 10$	$M \mathfrak{M}^{-1}$ für $\tau_Z \leq 10$
15	$3,19 \cdot 10^2$	$4,95 \cdot 10^1$
16	4,88	7,01
17	7,55	$1,01 \cdot 10^2$
18	$1,18 \cdot 10^3$	1,49
19	1,83	2,16
20	2,85	3,17
21	4,46	4,71
22	7,01	7,06
23	$1,10 \cdot 10^4$	$1,05 \cdot 10^3$
24	1,73	1,57

τ	x für $\tau_Z < 10$	$M \mathfrak{M}^{-1}$ für $\tau_Z < 10$
25	2,75	2,41
26	4,35	3,66
27	6,89	5,52
28	$1,10 \cdot 10^5$	8,62
29	1,73	$1,27 \cdot 10^4$
30	2,77	2,00

Ein interessantes Ergebnis bietet die Diskussion der Massen in Abhängigkeit von x und damit von τ bzw. T dar. Wir erhalten hier folgendes Bild (vgl. Tab. für $M \mathfrak{M}^{-1}$):

T°	r in cm	M in g
2320	$1,42 \cdot 10^{11}$	$1,67 \cdot 10^{28}$
2060	3,44	3,55
1860	8,31	7,55
1690	$2,04 \cdot 10^{12}$	$1,68 \cdot 10^{29}$
1550	5,05	3,74
1430	$1,27 \cdot 10^{13}$	8,71
1330	3,21	$2,05 \cdot 10^{30}$
1240	8,08	4,76

Man ersieht:

1. Die auftretenden Massen nehmen mit abnehmenden Randtemperaturen monoton zu.
2. Sie sind von der Grössenordnung der Planetenmassen, wenn wir dasjenige Temperaturgebiet als Rand annehmen, in dem der Schmelzpunkt von Eisen liegt; denn einmal sind die Planetenmassen folgende:

Merkur	$2,4 \cdot 10^{26}$ g	Jupiter	$1,9 \cdot 10^{30}$ g
Venus	$5,0 \cdot 10^{27}$ g	Saturn	$5,7 \cdot 10^{29}$ g
Erde	$6,0 \cdot 10^{27}$ g	Uranus	$9 \cdot 10^{28}$ g
Mars	$6,6 \cdot 10^{26}$ g	Neptun	$1 \cdot 10^{29}$ g

Andrerseits ist die Schmelztemperatur von Eisen ungefähr 1530° K.

Innerhalb der Fehlergrenzen treffen wir also auf das Richtige. Besonders gut stimmen die Massen der grössern Planeten. Die kleinen sind aber entweder in der Nähe der Sonne (Merkur) oder

in der Nähe von Jupiter (Mars), wo ja die Planetoiden schon lange die Verwunderung der Astronomen hervorgerufen haben, die gerade zwischen ihm und Mars liegen.

Man kann die Überlegung etwas feiner gestalten, wenn man die mittleren Dichten in Betracht zieht:

Venus . . .	0,94	Saturn . . .	0,12
Erde . . .	1,00	Uranus . . .	0,25
Jupiter . . .	0,24	Neptun . . .	0,24

Venus und Erde haben also eine vier- bis sechsmal grössere mittlere Dichte. Das Vorhandensein einer ausgedehnten Gasatmosphäre ist bei Jupiter und Saturn sehr wahrscheinlich. Diese die Gashülle konstituierenden, schwer verflüssigbaren Stoffe werden in der *VFK* verteilt gewesen sein. Teils als Trägergas, teils als zusätzlicher Massenfaktor, teils als nach aussen abschirmender Mantel haben sie vielleicht eine gewissermassen ruhige Ausbildung der *VFK* gewährleistet und sowohl die bei den angegebenen Randtemperaturen etwas instabilen Verhältnisse — Nähe anderer Planeten, rasch fortschreitende Kondensation — gesichert. Wo diese abschirmende Hülle fehlte oder in nur geringem Masse vorhandene war, musste der Aufbau schon bei höheren Temperaturen, also näher beim Zentrum, gestört und durch diesen „Abschneideprozess“ die Masse kleiner werden.

In bezug auf die räumliche Ausdehnung lässt sich folgendes erkennen: Bei einer Masse von $\sim 10^{30}$ g ergibt sich ein Radius von $\sim 10^{13}$ cm. Berechnen wir aus der für Polytropen gültigen Gleichung (2,18) den Radius für $M = 10^{30}$ g, $T_z = 10^{40}$, $\mu \sim 50$, so ergibt für $0 \leq n \leq 4$

$$r \sim 5 \cdot 10^{12} \text{ cm}$$

Es ist dabei zu bedenken, dass die Ausdehnung der *VFK* eher zu gross berechnet wurde, sowohl weil für L die obere Grenze genommen wurde, als auch wieder der Trägergaseinfluss zu berücksichtigen ist.

Man versteht von hier aus ebenfalls, warum in Sonnennähe keine grossen Planeten stehen. Wenn nämlich die Sonnenmasse zu 10^{33} g angenommen wird, die Masse eines Planeten zu 10^{29} g und sein Radius im Zustand der *VFK* z. B. zu 10^{12} cm, so ergibt eine leicht durchführbare Abschätzung für die Minimaldistanz Sonne-Planet, damit eine geschlossene, d. h. von der Sonne nur in zweiter Näherung gestörte Kugel möglich ist, den Wert von 10^9 km. Die äussersten Planeten — von Pluto wird abgesehen — haben auch

tatsächlich eine Masse von 10^{29} g. Ihre Ähnlichkeit lässt sich auf Grund der ungestörten Ausbildung einer *VFK* plausibel machen.

Aus dem eben angezogenen ist auch zu schliessen, dass, wenn überhaupt die Verflüssigung nach KELVIN erfolgte, dies dann zu einer Zeit geschah, in der die Planeten bereits separates Dasein hatten und nicht mehr in einem Mutternebel mit vergleichbarer Gesamtmasse eingebettet lagen. Der relativ am besten mit den vorangegangenen Ausführungen vereinbare Ursprungstyp ist eine Gaskugel. Wie diese entstanden ist, bildet eine andere Frage. Die Rotationsgeschwindigkeit darf allerdings im Dampfzustand nicht zu gross sein; infolge des Erhaltungssatzes des Drehimpulses lässt sich das auch widerspruchsfrei in das Ganze einfügen (vgl. NÖLKE¹⁶), S. 53). Für die Dichte hat man nach (3,25)

$$\rho = 0,76 \tau e^{-\tau} \text{ gcm}^{-3} \quad (3,32)$$

und für den Druck, ebenfalls nach (3,25):

$$p = 4,13 \cdot 10^{10} e^{-\tau} \text{ Dyn cm}^{-2} \quad (3,33)$$

Die weitgehende Unabhängigkeit der Grössen- und Massenverhältnisse der *VFK* von der Zentraltemperatur begründet eine für die Anwendung auf reale Sachverhalte günstige Tatsache. Oben (S. 181) wurde ja die Temperaturveränderlichkeit der Konstante L aus (3,5) festgestellt. Aber gerade diejenigen Temperaturgebiete, die für den Aufbau der *VFK* massgebend sind, fallen in das Intervall $1000\text{—}3000^\circ$, also erstens in einen relativ kleinen Bereich und zweitens in einen, wo L experimentell bestimmt ist. Der starken Auswirkung einer Unsicherheit im Werte von L wird so weitgehend entgegengewirkt. Wir erkennen weiter, aus gleichen Gründen, dass auch die Anwendung des idealen Gasgesetzes auf den in Nähe der Kondensationstemperatur befindlichen Dampf die Resultate der Berechnung nicht zu sehr fälschen wird. Die Dampfdichte ρ der *VFK* ist ja, bis aufs Zentrum, klein. Frappant ist die Wirkung der Veränderlichkeit der sog. spezifischen Wärme eines Dampfes gemäss den Überlegungen von CLAUSIUS. EMDEN hat in seinem einschlägigen Buch⁶) dieser Tatsache einen kurzen Abschnitt gewidmet (S. 395), der sehr anschaulich die Sachlage skizziert und deshalb hier auszugsweise angeführt werden soll. Er schreibt:

„Wird ein Volum gesättigten Dampfes adiabatisch komprimiert, so wirken während dieser Veränderung zwei Umstände gegeneinander. Die Volumverminderung an sich hat Kondensation zur Folge, die Temperaturerhöhung an sich wird überhitzen und

weitere Dampfaufnahme ermöglichen. Soll dabei der Dampf einen thermodynamischen Weg zurücklegen derart, dass er stets gerade gesättigt bleibt, so muss, wenn die Volumverminderung die Temperaturerhöhung ΔT überwiegt, zur Verhütung der Kondensation ein bestimmtes Wärmequantum ΔQ zugeführt, im Falle die Temperaturerhöhung überwiegt, ein bestimmtes Wärmequantum ΔQ entzogen werden. Dieses Verhältnis $\frac{\Delta Q}{\Delta T}$, die Wärmekapazität des Dampfes auf diesem bestimmten Weg, kurz als „Wärmekapazität des gesättigten Dampfes“ bekannt, kann $\cong 0$ sein“.

„Würde die Erdatmosphäre ausschliesslich aus Wasserdampf bestehen, so können aufsteigende Strömungen zu Wolkenbildung führen. In einer Erdatmosphäre aus Dampf des Äthyläthers, dessen Wärmekapazität > 0 ist, wurden aufsteigende Ströme überhitzten Dampf liefern; eine Wolkenbildung könnte nur durch absteigende Ströme eintreten, falls in der Höhe die Dämpfe, etwa durch Wärmeausstrahlung, ihren Entropiegehalt vermindert hätten. In diesen beiden Atmosphären würden sich viele meteorologische Vorgänge mit entgegengesetztem Vorzeichen abspielen. In einer geeignet aus Äther- und Wasserdampf gemischten Atmosphäre brauchten weder auf- noch absteigende Ströme zu Wolkenbildung zu führen.“

Genauer handelt es sich um folgendes²⁰⁾:

Die spezifische Wärme γ eines Gemisches von ξ Gramm Dampf und $(1 - \xi)$ Gramm Flüssigkeit ist

$$\gamma = (1 - \xi)c_p + \xi h;$$

c_p ist die spezifische Wärme der Flüssigkeit bei konstantem Druck, h diejenige des Dampfes. Und für h gilt nun die Gleichung

$$h = c_p + \frac{d\lambda}{dT} - \frac{\lambda}{T}$$

so dass γ in der Tat $\cong 0$ sein kann, negativ insbesondere für kleine T . Der Umschlagspunkt T_0 von γ ist für ein $\xi \sim 1$, wie es bei der *FK* angenommen wurde, gegeben durch $\left(\frac{d\lambda}{dT} = 0\right)$:

$$T_0 \sim \frac{\lambda}{c_p}$$

Unterhalb T_0 ist $\gamma_{\xi \sim 1} < 0$. Aufsteigende Ströme ergeben also Kondensation für ein $T < T_0$.

Für Eisen ist $\lambda = 1,3 \cdot 10^3$ cal/g, $c_p \sim 0,2$ cal/g grad²¹⁾, also

$$T_0 \sim 8 \cdot 10^3 \text{ }^\circ$$

Im weitaus grössten Teil der FK erleiden also nur aufsteigende Gasmassen Kondensation, wie es auch vorher angenommen wurde.

Aus Gründen der Kuriosität und zur Erhellung einer bekannten Regel sei schliesslich die Masse einer aus Wasserdampf bestehenden VFK mit einer Zentraltemperatur $T_Z \sim 500^\circ \text{K}$ und Randtemperatur $T_R \sim 300^\circ \text{K}$ angegeben. Für die Konstanten P und L werden die Werte gewählt:

$$P = 1,59 \cdot 10^{12} \text{ cgs}; \quad L = 5,29 \cdot 10^{30}$$

Man erhält

$$M_{\text{H}_2\text{O}} \sim 4 \cdot 10^{27} \text{ g}$$

Der Unterschied ist nicht gross, aber die Fähigkeit von Eisen, grössere Massen zu bilden, tritt doch deutlich hervor. Die Randtemperatur wurde auch hier in der Nähe des Schmelzpunktes genommen. Dass die Kugeln nicht stark voneinander abweichen beruht auf der angenäherten Gleichheit von τ_{Eisen} und $\tau_{\text{H}_2\text{O}}$ für phasenmässig äquivalente Temperaturen. Es macht sich hier das Theorem der übereinstimmenden Zustände und im speziellen die Regel von PICTET-TROUTON bemerkbar.

IV. Ergänzende Schlussbemerkungen

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der FK (3,12) lautete:

$$\Phi(\tau) = \frac{A}{x} + \frac{x^2}{6} - B$$

Wenn man nun beachtet, dass für $\Phi(\tau)$ die Relationen gelten

$$\left. \begin{aligned} - \Phi(\tau) &= O\left(\frac{1}{\tau}\right) \text{ für } \tau \rightarrow 0 \\ \Phi(\tau) &= O\left(\frac{e^\tau}{\tau^2}\right) \text{ für } \tau \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (4,1)$$

so erhält man folgende Aussagen:

1. Wenn B bei festem A wächst, so herrschen im gleichen Abstand x vom Mittelpunkt höhere Hitzgrade.
2. Bei festem B nimmt mit wachsendem A die Temperatur ab, bei $A = 0$ tritt die VFK auf.
3. Für $A \neq 0$ existiert keine im Zentrum physikalisch realisierbare Lösung. Für $A < 0$ wird dort die Temperatur unendlich, für $A > 0$ hat man ein Temperatur- und damit Druckmaximum im Abstand

$$x_m = \sqrt[3]{3A} \quad (4,2)$$

Der Druck nimmt von hier an nach innen wieder ab.

Die Bemerkung, dass um einen andersgearteten Kern — etwa polytroper oder flüssiger Natur — sich eine FK -Schale anfügen lässt, führt uns weiter²²⁾. Dabei ist die Bestimmung der Grenzflächenverhältnisse Kern- FK -Schale verschieden je nach Kernart. Haben wir ein gasförmiges Zentrum, so werden wir vor allem Druckgleichheit an der Grenzfläche verlangen. Dadurch ist allerdings bloss eine dynamische Stabilität erreicht, dagegen nicht eine thermische. Je nachdem nämlich der Randdruck des Kerns grösser oder kleiner ist als der Dampfdruck bei der betreffenden Grenztemperatur, muss die FK -Schale an der Innenseite eine höhere oder tiefere Temperatur haben als der Kern. Natürlich ist realiter eine Übergangsschicht vorhanden, die eigentliche „Verflüssigungszone“. Dazu kommt die Bedingung, dass die Schwerebeschleunigung beim Übergang von Kern zu FK -Schale sich stetig ändere. Dies führt, wie man mit Hilfe von (3,1), (3,10), (3,11), (3,14) und (3,28) ersieht, zu folgender Gleichung für die Konstante A

$$A = \frac{x_0^3}{3} \left(1 - \frac{\bar{\rho}_k}{\rho_0} \right) \quad (4,3)$$

Dabei bedeuten x_0, ρ_0 die der Grenzfläche entsprechenden Werte von x und ρ in der FK -Schale; $\bar{\rho}_k$ ist die mittlere Kerndichte. Man erkennt:

Es sind Lösungen mit $A > 0$ zu erwarten. Für diese ist

$$3 A \leq x_0^3$$

Das ist wichtig. Denn das Maximum der Temperatur liegt ja bei Lösungen mit $A > 0$ an der Stelle

$$x_m = \sqrt[3]{3 A} \leq x_0,$$

also nicht innerhalb der FK -Schale, und ist somit unschädlich.

Als zweite Bedingung bei flüssigem Kern wird man, um eine Vergrösserung desselben zu sichern, d. h. seine Verdampfung zu verhindern, verlangen, dass die Randtemperatur höchstens gleich der angrenzenden FK -Temperatur sei. Das ergibt eine Ungleichung für die Konstante B .

Die beiden Konstanten sind also bei gasförmigem Kern vollständig festgelegt, bei flüssigem im Variationsbereich eingengt. Für die Masse der Gesamtkugel findet man analog wie in (3,25a) die Beziehung:

$$M = M_0 + \mathfrak{M} \left[\frac{\xi^2}{y \ln y} \frac{dy}{a \xi} \right]_{x_0}^x \quad (4,4)$$

wo $M_0 =$ Kernmasse, $M =$ Gesamtmasse.

Wenn konstante Totalmasse vorausgesetzt wird, und sich x_0 sowie τ_0 ($\tau_0 =$ Wert von τ an der Grenzfläche) ändern, so ist dies auch bei x_R sowie τ_R der Fall, wo etwa x_R den Radius derjenigen Kugel bedeutet, innerhalb welcher M enthalten ist. Allein x_0 und τ_0 selbst stehen in Beziehung zueinander, etwa gemäss einer Emdenpolytopen. Dadurch wird eine allgemeine Diskussion dieses Radius x_R von der speziellen Kernstruktur abhängig gemacht.

Eine wichtige Frage ist die nach der thermischen Stabilität der Temperaturverteilung in Abhängigkeit vom Radius. Hier ergibt sich für das Verhältnis ε von wirklichem, d. h. VFK -Temperaturgradient, zu adiabatischem

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{dT}{dr}\right)_{VFK}}{\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{\tau} \quad (4,5)^*$$

$\kappa =$ Verhältnis der spez. Wärmen.

Für $\varepsilon > 1$ herrscht bekanntlich Instabilität: ein spontan sich nach „oben“ in Bewegung setzendes Gaselement steigt weiter.

Man erkennt, dass für

$$\tau > \frac{\kappa}{\kappa-1}$$

Stabilität vorhanden ist. Bei Berücksichtigung der bekannten Werte von κ ergibt dies die Aussage, dass nur der zentrale Teil der VFK Konvektionsströmungen zulässt. Diese Bemerkungen basieren allerdings auf dem trockenadiabatischen Gradienten. Da die feuchtadiabatischen — mit reversibel und irreversibel feuchtadiabatischem Gradient als Extremfällen (vgl. S. 175) — immer

*) Beweis: Für einen adiabatischen Vorgang ist

$$T = \text{const} \cdot p^{1-\frac{1}{\kappa}}$$

oder, mit (3,1) und

$$p = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \rho T,$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\mu}{\mathfrak{R}} g = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\mu}{\mathfrak{R}} \alpha^2 \mathfrak{M} G \frac{[M\mathfrak{M}^{-1}]}{x^2}$$

Andererseits ist infolge (3,18) und (3,20), (3,25)

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{VFK} = -\frac{\alpha L}{3} x e^{-\tau}$$

woraus sofort ε folgt wegen (3,19), (3,26).

kleiner sind, so muss damit gerechnet werden, dass noch in weiteren Gebieten der *VFK* Instabilität vorhanden ist. Aber diese Instabilität ist letztlich begründet in der Kondensationswärme des in aufsteigenden Strömen verflüssigten Dampfes: diese aufsteigenden Dampfmassen bleiben gesättigt und entsprechen also immer noch den Annahmen über die Konstitution der *VFK*; die Erhaltung der letzteren ist damit gesichert.

Eine Schwierigkeit bedeutet die Tatsache, dass die *VFK* nicht endlich ist. Sie lässt sich wohl beheben durch folgende überschlägige Rechnung: Erstens kann man die durch Überschreiten einer hyperbolischen Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2 G M_r}{r}}$$

pro Jahr von der Masse M_r innerhalb der Kugel mit Radius r verlorene Teilmasse bestimmen²³⁾. Für eine *VFK* mit $M_r = 1,68 \cdot 10^{29}$ g und $r = 2,04 \cdot 10^{12}$ cm ist die Randtemperatur 1690° . Sie bestehe aus Eisen mit $\mu = 57$. Dann beträgt der Massenverlust

$$\Delta M \sim 5 \cdot 10^{27} \text{ g/Jahr}$$

Ermittelt man andererseits die zur Abstrahlung der gesamten Verdampfungswärme $M \cdot \lambda$ bei der angegebenen Randtemperatur von 1690° K nötige Zeit t^* , so erhält man

$$t \sim 1/2 \text{ Jahr}$$

Diese Zeit — sie wird natürlich nur grössenordnungsmässig stimmen — ist sehr kurz. Der Massenverlust im *VFK*-Stadium wird dadurch in erträglichen Schranken gehalten.

Auffällig sind weiter die infolge der Fastisothermstruktur auch in äusseren Schichten auftretenden Hitzegrade. Sie lassen eine Entgasung der Materie verständlich erscheinen. Dass gerade die Wahl des Schmelzpunktes von Eisen als Randtemperatur die richtigen Grössenordnungen der Massen ergibt, ist wohl zufälliger Natur; denn hier ist dann auch die Ausdehnung gross genug — von der Grössenordnung der heutigen Planetenabstände —, um die Störungen durch Nachbarmassen übermächtig werden zu lassen.

*) Gemäss der Beziehung

$$t = \frac{M \lambda}{4 \pi r^2 \sigma T_e^4}$$

Mit $\sigma =$ Stefan'sche Konstante $\sim 5 \cdot 10^{-5}$ cgs grad⁻⁴, $T_e^4 = 2 T^4$ ²⁴⁾.

Die Möglichkeit einer stetigen Reihenfolge stabiler FK -Schalen mit wachsendem Ausmass, als Hülle eines gasförmigen bzw. flüssigen Kerns, lässt erkennen, dass die in diesen Ausführungen diskutierten Anschauungen eine zumindest dynamisch stabile Entwicklung der Kondensation einer Gaskugel aufzeigen. Indem die Tropfen — es sei hier festgestellt, dass das nur als rohe Umschreibung zu werten ist*) — immer näher ans Zentrum gelangen können, ist damit auch ein Vordringen der FK -Region gegen den Mittelpunkt hin verbunden, bis schliesslich die VFK entsteht. Da diese für die zentralen Teile kaum mehr zuständig, sie andererseits weitgehend unabhängig von den dortigen Verhältnissen ist, so soll über die Vorgänge im Zentrum bei der Kondensation einer Gaskugel nichts weiter ausgesagt werden. Nur sei darauf aufmerksam gemacht, dass der Kern mit seiner kleinen Masse gemäss den in Abschnitt II gemachten Überlegungen sich direkt verflüssigen kann. Die in ihm vorhandenen extremen Bedingungen machen das nur wahrscheinlicher.

Eine Synthese der beiden Möglichkeiten zur Kondensation wird das Richtige treffen:

Zuerst einmal erfolgt Verflüssigung von aussen bis in die Nähe des Zentrums, dann besorgt eine direkte den Rest. Es bildet sich ein flüssiger Kern, der mit weiterschreitender Abkühlung sukzessive wächst bis zu seiner vollen durch die Masse M bestimmten Grösse. Im Leben eines Planeten bedeutet die Verflüssigung eine nur kurz dauernde, aber wichtige Episode.

Die vorliegende Arbeit ist unter Leitung von Herrn Professor A. MERCIER entstanden, dem ich für fördernde Diskussionen bestens danke.

Seminar für theoretische Physik der Universität Bern.

Literaturverzeichnis

- 1) EDDINGTON-V. D. PAHLEN, Der innere Aufbau der Sterne, Springer 1928, S. 499.
- 2) KUHN-RITTMANN, Geol. Rundschau XXXII, 215 (1941).
- 3) A. MERCIER, Arch. de Genève XX, 31 (1938).
- 4) loc. cit.³⁾, S. 54.
- 5) loc. cit.³⁾, S. 56.
- 6) R. EMDEN, Gaskugeln, Teubner 1907.
- 7) R. EMDEN, Thermodynamik der Himmelskörper, Encycl. Math. Wiss. VI, 2, 24.
- 8) loc. cit.¹⁾, Kap. IV.
- 9) loc. cit.³⁾, S. 42.
- 10) loc. cit.¹⁾, S. 145.

*) Ein typischer „Nebelregen“ dürfte ein besseres Bild sein.

- 11) VÉRONNET, Comptes R. **165**, 1055 (1917) und Comptes R. **166**, 109, 286 (1917).
 - 12) Vgl. etwa KOSCHMIEDER, Dynamische Meteorologie, AVG., (1941).
 - 13) Etwa FINDEISEN, Beiträge zur Physik d. freien Atmosphäre **25** (1939).
 - 14) loc. cit.¹²⁾, § 18.
 - 15) KELVIN-TAIT, Treat on Nat. Philosophy II, 482 (1923).
 - 16) F. NÖLKE, Die Entwicklung des Sonnensystems und der Erde, Hdbuch d. Geophysik I, 9 (1931); insbesondere § 26, S. 65. Dort ist auch noch weitere Literatur angegeben.
 - 17) v. HEVESY, Hdbuch d. Geophysik II, 1090 (1933). — RUSSELL, Astroph. Journ., **70**, 11 (1929).
 - 18) loc. cit.⁷⁾, S. 414.
 - 19) Critical Tables III, 205 (1928).
 - 20) Vgl. etwa C. SCHÄFER, Theoretische Physik II, § 50.
 - 21) ESPE-KNOLL, Werkstoffkunde der Hochvakuumtechnik, Springer 1936, S. 59.
 - 22) Vgl.⁶⁾, Kap. XIII.
 - 23) Vgl. ⁶⁾, S. 271, oder ⁷⁾, S. 427.
 - 24) Vgl. ¹⁾, S. 403.
-